VORLESUNGEN

ÜBER

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

MORITZ CANTOR.

DRITTER (SCHLUSS-)BAND.

VON 1668—1758.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898

Vorwort.

In einer Töchterschule, so erzählt man sich, soll einst das Aufsatzthema „Gedanken bei Besteigung eines hohen Berges“ aufgegeben worden sein, und eine Schülerin wusste die Aufgabe am kürzesten und treffendsten zu lösen, indem sie nur den einen Satz niederschrieb: „Wäre ich oben!“ Ich kann nicht sagen, wie oft dieses Geschichtchen in meinem Kopfe als Selbsterlebniss umherspukte, wenn ich als Anfangsdatum auch nur das Jahr 1894 wähle, in welchem die erste Abtheilung, oder das Jahr 1896, in welchem die zweite Abtheilung dieses dritten Bandes meiner Vorlesungen über Geschichte der Mathematik ausgegeben wurde. Wäre ich oben, sehnte ich mich, und Anfragen von den verschiedensten Seiten, wann die Schlussabtheilung erscheinen werde, verstärkten die Empfindung. Jetzt bin ich oben. Ich habe den Gipfelpunkt erreicht, welchen ich 1880, als ich den ersten Band in die Oeffentlichkeit schickte, als Endziel genannt habe, und nachdem ich angelangt bin, geht es mir, wie es so vielen Reisenden in fremden Landen ergangen ist. Der Gipfel, den ich unter grosser Anstrengung erklommen habe, erweist sich als Vorberg, und hinter und über ihm bleiben neue hohe Spitzen zu erreichen, neue und lohnende Ausblicke nach rückwärts wie nach vorwärts versprechend. Auch die bereits geschichtlich gewordene Entwicklung der Mathematik ist mit dem Jahre 1758 nichts weniger als abgeschlossen. Euler's, Daniel Bernoulli's, D'Alembert's spätere Arbeiten, Lagrange, Lambert, Laplace, Legendre, Gauss, Monge, Carnot, um nur Schriftsteller allerersten Ranges zu nennen, gehören sicherlich schon der Geschichte an, und ein vierter und fünfter Band mindestens kann zu den drei vollendeten Bänden hinzutreten, ohne dass man der Gegenwart so nahe käme, dass die Objectivität der Erzählung Gefahr liefe.

Allerdings steigt mit jedem neuen Bande die Schwierigkeit für den Verfasser. Zu den Denkschriften gelehrter Gesellschaften, welche schon in dem vorliegenden III. Bande fortwährend als Arbeitsmaterial um uns herum lagen, oftmals mehrere zu gleicher Zeit aufgeschlagen, kamen neue, von denen die gedruckten Abhandlungen der Turiner Akademie am Schlusse des III. Bandes ankündigend genannt sind. Noch etwas später erschienen gegenwärtig wenig bekannte Zeitschriften, in welchen Mathematisches man könnte fast eher sagen verborgen als veröffentlicht wurde, und welche nur um so sorgsamer durchforscht werden müssen. Eine andere Schwierigkeit besteht darin, dass die Gegenstände der Untersuchungen mit dem wachsenden Umfange der mathematischen Wissenschaften immer vielfältiger wurden. Die Kapiteleintheilung wird immer misslicher, die Abschnitte können nur immer kürzere Zeitfristen behandeln, wenn man überhaupt dabei beharren will, Abschnitte mit zeitlicher Begrenzung festzuhalten und nicht lieber dazu übergeht, was neuerdings empfohlen worden ist, aus einzelnen Wissensgebieten besondere Abschnitte statt besonderer Kapitel zu bilden. Ich bin in der That schwankend, ob ich eine solche tief einschneidende Aenderung empfehlen, ob ich vor ihr warnen möchte. Es ist ja zweifellos, dass durch sie die Entwicklung, in welcher eine einzelne Frage sich fortgepflanzt hat, deutlicher hervortreten wird, aber nicht minder zweifellos geht darüber das Gesammtbild des einzelnen Zeitpunktes verloren. Der Leser wird sich nicht mehr bewusst werden, welcherlei Forschungsgegenstände zu dieser oder jener Zeit, angeregt durch diesen oder jenen Geisteshelden im Vordergrunde standen, mit einem Worte in der Mode waren. Es wird genau überlegt werden müssen, wohin bei solchem Für und Wider die Entscheidung zu fallen hat.

Soll das etwa eine entschuldigende Anzeige einer Fortsetzung meines Werkes über den gewählten Zielpunkt hinaus sein? Keineswegs. Die Möglichkeit weiter zu gehen, gebe ich unumwunden zu. Ich hege auch den Wunsch, dass weitergegangen werde, aber jüngere Schriftsteller mit frischer Kraft mögen sich auf die Reise begeben. Mit über 68 vollendeten Lebensjahren beginnt man keinen neuen Band, zu welchem man nicht durch längst gegebenes Versprechen sich verpflichtet hat. Mein Antheil an der Geschichte der Mathematik ist vollendet. Nur die Druckfertigstellung neuer Auflagen der drei vorhandenen Bände, so weit die Gunst des lesenden Publikums solche gestattet, rechne ich noch zu meiner Aufgabe. Die Fortsetzung meines Lebenswerkes überlasse ich Nachfolgern von weniger bedingter Lebenszukunft. Fehlt es doch nicht an dazu besonders veranlagten Persönlichkeiten, unter welchen ich nur vier in alphabetischer Reihen-

folge nennen möchte: Friedrich Engel, Franz W. Meyer, Ferdinand Rudio, Paul Stäckel. Mit keinem dieser jüngeren Fachgenossen habe ich irgend Rücksprache genommen, aber Jeder von ihnen wäre mir als Bearbeiter nachfolgender Bände willkommen.

Mit dieser, ich möchte fast sagen, letztwilligen Aeusserung könnte ich von meinen Lesern mich verabschieden, bliebe mir nicht, was ich soeben mir noch als Altentheil vorbehalten habe. Statt einer Druckfertigstellung einer neuen Auflage gewährt mir die Ausgabe der dritten Abtheilung dieses Bandes die Möglichkeit, auf die beiden ersten Abtheilungen zurückzugreifen und Verbesserungen nachzutragen, zu welchen mir theils spätere Forschung, meistens Bemängelungen von Seiten von Fachgenossen die Anregung gaben, unter denen ich mich, abermals in alphabetischer Reihenfolge, den Herren Cajori, Eneström, Gibson, Schwering, Sonin, Sturm, Tischer, Zeuthen zu besonderem Danke für ihre Bemerkungen verbunden fühle. Ich will die nachträglichen Zusätze nach der Reihenfolge der Seitenzahlen ordnen.

S. 4. Im Jahre 1694 erschien von Harald Vallerius (1646 bis 1716) der seit 1690 Professor der Mathematik in Upsala war, eine 20 Seiten starke Abhandlung: *De matheseos incrementis*, welche durch Beispiele zu belegen suchte, wie weit die damalige Mathematik der der Alten überlegen sei. Der Verfasser ist nicht mit seinem Sohne Johannes Vallerius (1677—1718) zu verwechseln, wie es S. 255 geschah, wo ich Johannes V. als Verfasser einer geschichtlichen Arbeit über die Würfelverdoppelung hätte nennen müssen.

S. 11. In Spanien übersetzte 1689 ein Pater Kresa Euklid's Elemente ins Spanische, und der Uebersetzer sowie auch gleichzeitig Antonio Hugo betonten dabei die Nothwendigkeit, manche Aenderungen eintreten zu lassen.

S. 43. De Witt's Meinung von der nur sehr langsam sich ändernden Sterblichkeit ist nicht klar genug wiedergegeben. De Witt behauptete, im Alter von 3 bis zu 53 Jahren sterben jährlich 2 Personen, von 53 bis zu 63 Jahren jährlich 3 Personen, von 63 bis zu 73 Jahren jährlich 4 Personen, von 73 bis zu 80 Jahren jährlich 6 Personen. Die Anfangszahl der Dreijährigen ist demzufolge $50 \times 2 + 10 \times 3 + 10 \times 4 + 7 \times 6 = 212$. Später stellte De Witt eine zweite Annahme in Rechnung, welche ein wesentlich rascheres Absterben der Menschen in Aussicht nimmt und demgemäss den Preis einer zu erwerbenden Leibrente erniedrigt.

S. 45. Gemeinsam mit einer von Spinoza herrührenden Schrift über den Regenbogen und vielleicht von dem gleichen Verfasser herrührend erschien 1687 eine Abhandlung: *Reeckening van Kanssen.*

d. h. Rechnung von Wahrscheinlichkeiten. In ihr ist folgende Aufgabe gelöst: A und B würfeln mit zwei gewöhnlichen Würfeln; A soll gewinnen, wenn er 6 Augen wirft, B dagegen muss 7 Augen werfen, um zu gewinnen; zuerst wirft A einmal, dann B zweimal, dann haben A und B umschichtig je 2 Würfe: wie verhalten sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten der Spieler? Die Antwort lautet $A : B = 10355 : 12276$.

S. 65. Die Behauptung, auf Newton's Grabstein in der Westminsterabtei sei die Binomialreihe eingemeisselt, gründet sich auf eine Mittheilung von Edmund Stone in seinem *New mathematical dictionary*, von welchem S. 490 die Rede ist. Sie findet sich bei dem Worte *Binomial Root*. Brewster spricht in seiner Biographie Newton's weniger bestimmt nur von einer eingemeisselten convergenten Reihe. De Morgan stellte 1840 die ganze Behauptung in Abrede. H. Cajori hat 1894 die Inschrift neuerdings untersucht, aber nur ihre durch Verwitterung verursachte Unlesbarkeit feststellen können. Zweifel sind daher jedenfalls gestattet.

S. 94. Es ist irrig, dass die Briefe zahlentheoretischen Inhaltes von Fermat u. s. w. erst 1693 bekannt geworden wären. Sie erschienen vielmehr schon 1658 durch Wallis herausgegeben (vergl. Bd. II, S. 704).

S. 95. Wallis hat sich im 88. und im 89. Kapitel seiner Algebra mit den bei der Division entstehenden Reihen und mit der Vergleichung dieser Betrachtungen mit der Verwandlung von Brüchen in Decimal- und Sexagesimalbrüche beschäftigt. Er will bei dieser Verwandlung den Bruch zunächst reducirt wissen, ein Kunstausdruck, den er hier für die Kürzung des Bruches durch den grössten Gemeintheiler von Zähler und Nenner einführt. Enthält der Nenner des reducirten Bruches keine anderen Grundtheiler als 2 und 5, so verwandelt sich der Bruch in einen geschlossenen Decimalbruch. Enthält der Nenner noch andere Grundtheiler, so ist der Decimalbruch endlos, *Quotiens est interminata*. Alsdann ergiebt sich, dass nach einer gewissen Fortsetzung des Verfahrens die gleichen Zahlen wie zuerst und in der gleichen Ordnung immer wieder auftreten, *redeunt iidem numeri et eodem ordine circulantur quo primo*. Die Anzahl der so cyklisch wiederkehrenden Ziffern kann nicht grösser als der um die Einheit verminderte Divisor sein, häufig ist sie ein Untervielfaches jener Zahl. Damit war also die Lehre von den periodischen Decimalbrüchen und in ihr ein wichtiges Kapitel der Zahlentheorie in Angriff genommen.

S. 120. Hier durfte ein spanischer Schriftsteller A. H. Omerique erwähnt werden, der 1698 in Cadix eine *Analysis geometrica* oder

wenigstens deren ersten Theil veröffentlichte, welcher Anwendungen der Algebra auf die Geometrie der Ebene enthielt.

S. 161—166 bedürfen einer vollständigen Umarbeitung, da ich mich hier mehrfach getäuscht habe, indem ich, anstatt vorher die Quelle genau zu vergleichen, ungerechtfertigte Vorwürfe von Anderen übernahm. Newton setzte seiner Vorschrift, man solle von $max^{m-1}y^n\dot{x}$ als Fluxion zu ax^my^n als Fluente übergehen und dürfe, wenn in der Gleichung $nax^my^{n-1}\dot{y}$ gleichfalls vorkomme, welches zu ax^my^n führe, dieses Glied in der Endgleichung nicht mehrmals sondern nur einmal schreiben, die Warnung hinzu, es sei zweckmässig, von der gefundenen Fluentengleichung zur Fluxionsgleichung zurückzukehren: nur wenn man dadurch zur ursprünglich vorgelegten Fluxionsgleichung gelange, sei der Gang ein richtiger gewesen. Die Vorschrift Newton's, man solle, um die Fluente von $\frac{a}{x}$ bilden zu können, die Umformung in $\frac{a}{b+x}$ oder in $\frac{a}{b-x}$ vornehmen und diesen Bruch in Reihengestalt entwickeln, ist als eine Verlegung eines Coordinatensystems aufzufassen, wenn auch versäumt ist zu betonen, dass die Veränderung von $\frac{a}{x}$ in $\frac{a}{b-x}$ eine gleichzeitige Veränderung von $\dot{x}$ in $-\dot{x}$ erfordere. Endlich müssen Newton's Gleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen als totale und nicht als partielle Differentialgleichungen betrachtet werden. Alsdann ist das Verfahren, eine hypothetische Gleichung zwischen x und y anzusetzen, geeignet, zur Integration zu führen: berechtigt ist es aber damit noch keineswegs.

S. 172. Newton lernte das Horologium oscillatorium von 1673 sofort nach dessen Erscheinen kennen. Huygens selbst schickte ihm ein Exemplar, und Newton's Empfangsanzeige vom 23. Juni 1673 hat sich erhalten.

S. 179. Im zweiten Newton'schen Briefe vom 24. October 1676 ist nicht nur der erste, sondern auch der zweite Hauptfall berührt, in welchem das binomische Integral in geschlossener Form gefunden werden kann. In einem letzten Beispiele deutet Newton nämlich an, die Entwicklung gelinge auch mitunter nach Zurückführung der Curvengleichung auf die Form $y = az^{\vartheta+\lambda\eta}(ez^{-\eta}+f)^{\lambda}$, und das kann keinen anderen Sinn haben als den, dass die Integration gelinge, wenn $\frac{\vartheta+\lambda\eta+1}{-\eta}$ oder $\frac{\vartheta+1}{\eta}+\lambda$ ganzzahlig ausfalle.

S. 188. John Craig's *Methodus quadraturas determinandi* von 1685, welche sich in Form und Inhalt vollkommen an Leibnizens Aufsatz von 1684 anschliesst, ist im Einverständnisse mit Newton

veröffentlicht. Man könnte ausser aus allgemeinen Erwägungen den Schluss daraus ziehen, dass in Craig's Methodus das Newton'sche Binomialtheorem erstmalig gedruckt erscheint, aber man hat auch ein ganz bestimmtes Zeugniss dafür. Craig gab 1718 ein zweites Werk: *De calculo fluentium* heraus, und in dessen Vorrede erzählt er ausdrücklich, er habe 1685 in Cambridge gewohnt, und Newton habe auf seine Bitte sein damaliges Buch vor der Drucklegung gelesen.

S. 221. Dass die Reihenform $a \cdot \log(a+z) = \frac{az}{a+z} + \frac{az^2}{2(a+z)^2} + \frac{az^3}{3(a+z)^3} + \cdots$ mittels der Substitution $\frac{z}{a+z} = u$ in die Gestalt $\log a - \log(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots$ übergeführt werden kann, ändert daran nichts, dass zunächst beide Entwicklungen von einander verschieden sind.

S. 241. Ein wesentlich neues Licht fiel auf die ganze Frage, wie es sich mit der Abhängigkeit De L'Hôpital's von Johann Bernoulli's Vorlesungsnotizen verhalte, seit Briefe zwischen beiden Männern bekannt wurden, welche, im Besitze der Stockholmer Akademie der Wissenschaften befindlich, vollständiger Druckgebung noch immer entgegenharren. Aus jenen Briefen geht nämlich Dreierlei mit Ausschluss jedes Zweifels hervor: Erstens dass De L'Hôpital selbst Johann Bernoulli wiederholt mitgetheilt hat, er beabsichtige eine Differentialrechnung zu schreiben. Zweitens dass Johann Bernoulli diese Absicht billigte. Drittens dass Johann Bernoulli, nachdem er die gedruckte *Analyse des infiniments petits* gelesen hatte, ihrem Verfasser nur einen Vorwurf machte, nämlich den der allzuhöflichen Erwähnung Jacob Bernoulli's.

S. 255. Die Quelle für die Angabe, Pierre Rémond de Montmort habe begonnen eine Geschichte der Geometrie zu schreiben, ist eine in den A. E. 1721 pag. 214 abgedruckte Stelle eines Briefes desselben vom 17. Juni 1717 an Johann Bernoulli. Dort heisst es: *J'ai dessin de donner quelque jour une Histoire de la Géométrie qui est déjà assez avancée.*

S. 256. Zu den Arbeiten über Geschichte der Mathematik gehört ferner eine 1706 in Kopenhagen gedruckte Abhandlung von J. Gram: Cogitationum ad loca scriptorum antiquiorum specimina. I. De origine geometriae apud Aegyptos, und ebenso eine 1724 in Basel veröffentlichte Abhandlung von Johann II Bernoulli, dem jüngeren Bruder Daniel Bernoulli's: Utrum Galli praestant Anglis inventorum physicorum et mathematicorum laude.

S. 295. Der in den Untersuchungsausschuss über den Prioritätsstreit erwählte Burnet wird von De Morgan (Phil. Mag. 4 Ser. IV, 325 Note (1852)) Sohn eines Bischofs und Schüler von Craig genannt. An einen William Burnet (1688—1729), der also 1712 erst 24 Jahre alt, mithin etwas jung für eine so verantwortliche Vertrauensstellung gewesen wäre, könnte man auch denken. Ein Brief an diesen von Johann Bernoulli mit dem Datum des 15. Mai 1714 befindet sich unter den Handschriften der Stockholmer Akademie.

S. 296. Der letzte Satz des die Veröffentlichung des Commercium Epistolicum betreffenden Beschlusses der Royal Society muss folgendermassen übersetzt werden: Die Gesellschaft ordnete den Druck der Briefe, der Manuscripte und des Sitzungsbeschlusses an, sowie auch solcher Schriftstücke, welche in den Acta Eruditorum sich vor fänden und geeignet erscheinen, Licht über die Angelegenheit zu verbreiten.

S. 311. Die naheliegende Bemerkung, dass Newton weit eher als ein Anderer in der Lage gewesen sei, Manches von Barrow zu entlehnen, liess Leibniz sich in seinem Briefe an Conti nicht entgehen. Sie findet sich im Recueil Des Maizeaux II, 63.

S. 333. Wie Jacob Bernoulli zu den nach ihm benannten Zahlen, und insbesondere wie er zu der Kenntniss gekommen ist, dass in den Potenzsummen nicht alle Potenzen der Gliederanzahl vorkommen, sondern dass sie umschichtig fehlen, bleibt nach wie vor ein Geheimniss. Herr Schwering hat uns indessen einen Wiederherstellungsversuch mitgetheilt, welcher keiner anderen Hilfsmittel sich bedient, als Bernoulli zur Verfügung standen. Sei angenommen $Sn^c = x \cdot n^{c+1} + y \cdot n^c + z \cdot n^{c-1} + u \cdot n^{c-2} + \cdots$, wo $x, y, z, u \cdots$ vorläufig unbestimmte Coefficienten sind. Die Gleichung muss auch für $S(n+1)^c$ anwendbar sein und $S(n+1)^c = x(n+1)^{c+1} + y(n+1)^c + z(n+1)^{c-1} + u(n+1)^{c-2} + \cdots$ liefern. Die Binomialentwicklungen $(n+1)^{c+1}$, $(n+1)^c$, $(n+1)^{c-1}$, $(n+1)^{c-2} \cdots$ sind aber bekannt, da c eine ganze positive Zahl ist, und können in die Formel für $S(n+1)^c$ eingesetzt werden. Erwägt man ferner, dass $(n+1)^c = S(n+1)^c - Sn^c$, so findet man einestheils $(n+1)^c = n^c + cn^{c-1} + \frac{c(c-1)}{1 \cdot 2} n^{c-2} + \cdots$ und andererntheils

$$\begin{aligned}(n+1)^c = x[(c+1)n^c &+ \frac{(c+1)c}{1 \cdot 2} n^{c-1} + \frac{(c+1)c(c-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^{c-2} + \cdots] \\ &+ y[cn^{c-1} + \frac{c(c-1)}{1 \cdot 2} n^{c-2} + \cdots] \\ &+ z[(c-1)n^{c-2} + \cdots] \\ &+ \cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Coefficientenvergleichung gleichhoher Potenzen von n liefert:

$$1 = x(c+1)$$
$$c = x\frac{(c+1)c}{2} + yc$$
$$\frac{c(c-1)}{2} = x\frac{(c+1)c(c-1)}{6} + y\frac{c(c-1)}{2} + z(c-1)$$
$$\frac{c(c-1)(c-2)}{6} = x\frac{(c+1)c(c-1)(c-2)}{24} + y\frac{c(c-1)(c-2)}{6}$$
$$+ z\frac{(c-1)(c-2)}{2} + u(c-2).$$

Daraus findet man aber der Reihe nach: $x = \frac{1}{c+1}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{c}{12}$, $u = 0$. Nachdem die ersten Coefficienten x, y, z und das Verschwinden von u ermittelt ist, kann neben $S(n+1)^c$ auch $S(n-1)^c$ angesetzt und die Differenz $(n+1)^c + n^c = S(n+1)^c - S(n-1)^c$ $= x[(n+1)^{c+1} - (n-1)^{c+1}] + y[(n+1)^c - (n-1)^c] +$ $z[(n+1)^{c-1} - (n-1)^{c-1}] + u[(n+1)^{c-2} - (n-1)^{c-2}] + \cdots$ ins Auge gefasst werden. Die Klammerausdrücke sind abwechselnd gerade und ungerade Functionen von n. Daher zerfällt die Gleichung in zwei, deren eine die Potenzen n^c, n^{c-2}, n^{c-4} u. s. w. enthält, die andere die übrigen. Sie heissen:

$$zn^c + \frac{c(c-1)}{1\cdot 2}n^{c-2} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}n^{c-4} + \cdots$$
$$= x[(n+1)^{c+1} - (n-1)^{c+1}] + z[(n+1)^{c-1} - (n-1)^{c-1}]$$
$$+ v[(n+1)^{c-3} - (n-1)^{c-3}] + \cdots$$

$$cn^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{1\cdot 2\cdot 3}n^{c-3} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}n^{c-5} + \cdots$$
$$= y[(n+1)^c - (n-1)^c] + u[(n+1)^{c-2} - (n-1)^{c-2}] + \cdots.$$

In der zweiten Gleichung ist die linke Seite $\frac{1}{2}[(n+1)^c - (n-1)^c]$, rechts steht $\left(\text{wegen } y = \frac{1}{2}\right)$ die Summe $\frac{1}{2}[(n+1)^c - (n-1)^c]$ $+ u[(n+1)^{c-2} - (n-1)^{c-2}] + \cdots$. Mithin müssen u und überhaupt die Coefficienten von $[(n+1)^{c-2\lambda} - (n-1)^{c-2\lambda}]$ verschwinden.

S. 336. Die *Kybeia* Caramuel's ist keine besondere Schrift, sondern nur ein Kapitel seiner Mathesis biceps, in deren II. Bande es pag. 972—995 als Unterabtheilung des Syntagma sextum Combinatoria zu finden ist.

S. 342. Die erste Ausgabe von De Moivre's *Doctrine of chances* ist nicht von 1716, sondern von 1718.

S. 364. Es giebt nur eine Ausgabe von Taylor's *Methodus incrementorum*, nämlich von 1715. Im Jahre 1717 wurde nur ein neues Titelblatt gedruckt, also eine sogenannte neue Titelausgabe veranstaltet, was darauf schliessen lässt, dass der Absatz kein sehr befriedigender gewesen sein kann.

S. 369. Auch am Schlusse der *Methodus incrementorum* kehrt die Betrachtung endlicher Differenzen noch einmal wieder, indem bei Gelegenheit der Aufgabe der athmosphärischen Lichtbrechung auf S. 112—114 eine Differenzengleichung integrirt wird.

S. 404. Die erste Veröffentlichung von Newton's Enumeratio fand 1704 statt; die Jahreszahl 1706 ist ein Versehen.

S. 408. Der Satz, eine Curve 3ten Grades sei durch sieben ihrer Punkte gegeben, und man könne ohne Rechnung deren Construction finden, ist schon in Newton's zweitem Briefe an Leibniz vom 24. October 1676 ausgesprochen. Daraus schliessen zu wollen, die ganze Enumeratio gehe bis auf 1676 zurück, dürfte allzukühn sein.

S. 429. Jacob Bernoulli veröffentlichte zuerst in Basel im Jahre 1700 eine kleine Schrift: *Jacobi Bernoullii ad fratrem suum Johannem Bernoulli epistola cum annexa solutione propria problematis isoperimetrici*, von welcher ein Theil, im wesentlichen eine Anzahl von Beispielen, in den A. E. vom Juni 1700 abgedruckt wurde. Der in den A. E. fehlende, auch später in die Gesammtausgabe von Jacob Bernoulli's Schriften nicht übergegangene Theil des Briefes von 1700 ist 1792 durch Charles Bossut in der von dem Abbé Rozier geleiteten Zeitschrift: *Observations sur la physique, sur l'histoire naturelle et sur les arts* T. XLI, p. 161—173 erneut zum Abdruck gebracht worden.

S. 437. Darüber, wie es mit der von Johann Bernoulli unter dem 1. Februar 1701 der Pariser Akademie versiegelt eingereichten Abhandlung gegangen ist, haben im Besitze der Stockholmer Akademie befindliche Briefe von Varignon an Joh. Bernoulli Licht verbreitet. Varignon schrieb am 27. Februar 1701 an Johann Bernoulli, dessen Bruder Jacob habe an ihn einen überaus groben Brief über seine Parteilichkeit für Johann gerichtet und habe in Aussicht gestellt, er wolle bei der Eröffnung des Umschlages zugegen sein. Darauf habe er, Varignon, im Einverständnisse mit De L'Hôpital, Jacob zugesagt, Johann's Abhandlung werde zurückgezogen werden; er bitte also Johann, Anordnungen in diesem Sinne zu treffen. Johann muss das wohl gethan haben, denn am 23. März 1701 schickte Fontenelle, der Secretär der Akademie, das Packet an Johann Bernoulli zurück, der es uneröffnet aufbewahrte, und der es nach dem

am 16. August 1705 erfolgten Tode des Jacob Bernoulli neuerdings nach Paris schickte. Es trug damals das noch unverletzte Siegel der Pariser Akademie, welches erst in der Sitzung vom 17. April 1706 öffentlich erbrochen wurde.

S. 442. Die von Taylor benutzte Form $x = \frac{1+z^2}{(a+\sqrt{1-a^2}\cdot z)^2}$ geht in die andere Form $\frac{1+z^2}{(az+\sqrt{1-a^2})^2}$ über, wenn man a durch $\sqrt{1-a^2}$ ersetzt.

S. 458. Noch bevor Daniel Bernoulli seine Untersuchungen über die Riccati'sche Gleichung in den A. E. von 1725 veröffentlichte, gab er sie 1724 in Venedig in Druck in seinem Buche: *Danielis Bernoullii exercitationes quaedam mathematicae*, pag. 77—80.

S. 460. Von dem Leben Goldbach's vor seiner italienischen Reise wissen wir noch, dass er 1718 einige Zeit in Schweden zubrachte.

Heidelberg, April 1898.

Moritz Cantor.

Inhaltsverzeichniss.

Abschnitt XVI. (1668—1699.)

Abschnitt XVII. (1700—1726.)

Abschnitt XVIII. (1727—1758.)

XVI. Die Zeit von 1668—1699.

82. Kapitel.

Geschichte der Mathematik. Klassikerausgaben. Elementargeometrie.

Die gleichen Namen, welche am Schlusse des VIII. Abschnittes im I. Bande dieses Werkes auftraten, und welche als die der Träger einer neuen Zeit angekündigt wurden, eröffneten im II. Bande den IX. Abschnitt. Ein ähnlicher Abschluss wie dem I. Bande konnte auch dem II. gegeben werden, ein Zeichen dafür, dass die von uns benutzte Eintheilung keine bloss äusserliche ist. Der XV. Abschnitt kündigte in seinen letzten Sätzen wieder zwei Männer an, Leibniz und Newton, deren geschichtliche Bedeutung es bilden sollte, Methoden, welche vorher den Gipfelpunkt bezeichneten, bis zu welchem nur besonders ausgewählte Geister aufzusteigen vermochten, der Allgemeinheit zugänglich zu machen. Auf dem früher unerreichbar steilen Gipfel konnte man nunmehr daran denken, einen neuen mächtig in die Höhe ragenden Bau aufzuführen, an dessen Errichtung abermals Jahrhunderte gearbeitet haben, und noch immer arbeiten.

Werden wir den XVI. Abschnitt damit beginnen können, die wissenschaftliche Thätigkeit eben jener beiden Männer genau zu schildern? Was wir in den vorhergehenden Zeilen über die Bedeutung von Leibniz und Newton ausgesprochen haben, genügt, um die aufgeworfene Frage zu verneinen. Noch war die Infinitesimalrechnung das letzte Ziel mathematischen Denkens. Noch boten niedriger gelegene Gebiete Raum und Gelegenheit zu erfolgreicher Forschung. Ihre Geschichte haben wir gleichfalls zu erzählen, und, wie uns däucht, ist es nicht bloss der seitherigen Darstellung insbesondere des XIV. und XV. Abschnittes entsprechender, sondern in der That sachgemässer, auch die drei Abschnitte dieses letzten Bandes, deren jeder eine Zeitdauer von ungefähr 30 Jahren umfassen soll, so zu gliedern, dass die einzelnen Kapitel etwa der Schwierigkeit der in ihnen bearbeiteten Gegenstände ihre Rangfolge verdanken, während als Einleitung diejenigen Arbeiten besprochen werden sollen, welche innerhalb des jedesmaligen Zeitraumes geschichtlichen Untersuchungen sich zuwandten.

Im gegenwärtigen Abschnitte sind es drei Männer, von welchen wir geschichtliche Leistungen zu erwähnen haben, ein Deutscher, ein Engländer, ein Franzose.

Georg Albrecht Hamberger[1]) (1662—1716) war Professor der Mathematik, später der Physik an der Universität Jena. Er hat 1694 zwei Schriften herausgegeben, deren Titel beanspruchen dürfen hier genannt zu werden: *De meritis Germanorum in mathesin* und *De usu matheseos in theologia.*

John Wallis (1616—1703) ist uns im vorigen Bande wiederholt begegnet [Bd. II, S. 628 und häufiger]. Sein *Treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises* (London 1685) ist in lateinischer Bearbeitung 1693 im II. Bande der Werke von Wallis abermals gedruckt. Auf den Werth dieser Algebra als solcher kommen wir später zu reden, über deren geschichtlichen Theil müssen wir das Urtheil ergänzend wiederholen, welches wir [Bd. II, S. 722 Note 3] gelegentlich aussprachen. Er ist überhaupt kein geschichtlicher Theil, sondern eine von englischem übermässigem Nationalstolze beeinflusste Parteischrift. Eine Verherrlichung von Thomas Harriot, von Isaac Newton, von Wallis selbst ist beabsichtigt, und namentlich der erstgenannte hat, wenn man Wallis Glauben schenkt, so ziemlich Alles erfunden, was von hervorragender Wichtigkeit in der Lehre von den Gleichungen ist. Durch das Studium Harriots soll z. B. Descartes auf den Satz von Zeichenwechsel und Zeichenfolge gekommen sein[2]), von welchem jener nicht ein Wort gesagt hat, noch sagen konnte, weil für ihn negative Wurzeln nicht vorhanden waren. Sich selbst schreibt Wallis die Ausziehung der Kubikwurzel aus einem Binomium $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$, zu; er will diese Lehre und ihre Anwendung bei dem irreductiblen Falle der Gleichung dritten Grades erfunden haben[3]), Dinge von damals schon mehr als hundertjährigem Alter. Das schlimmste war, dass kritiklose Leser den zuversichtlich ausgesprochenen Behauptungen vertrauten, und so entstanden Irrthümer, welche lange Zeit unangefochten von Lehrbuch zu Lehrbuch sich forterbten.

Claude François Milliet Dechales[4]) (1621—1678) in Chambéry in Savoyen geboren, war Mitglied des Jesuitenordens und fand bald als Missionar in der Türkei, bald als Lehrer an verschiedenen Anstalten, in Marseille, in Lyon, in Chambéry, Verwendung. Sein *Cursus seu Mundus mathematicus* erschien 1674 in Lyon in drei Foliobänden, und 1690 folgte eine auf vier Bände angewachsene aber

[1]) Poggendorff I, 1007. [2]) Wallis Opera II, 171. [3]) Ebenda 187.
[4]) *Biographie universelle* VII, 637 s. v. Challe.

dadurch keineswegs verbesserte zweite Auflage. Dechales war inzwischen längst verstorben, so dass es zweifelhaft erscheinen könnte, wie weit man berechtigt ist, ihn für die 108 Seiten starke Abhandlung *Tractatus prooemialis de progressu mathescos et illustribus mathematicis*, welche in der zweiten Auflage das Werk eröffnet, während die erste Auflage sich durch ihr Fehlen vortheilhaft auszeichnet, verantwortlich zu machen. Der Zweifel schwindet jedoch gegenüber der Vorrede zur zweiten Auflage. Pater Aimé Varcin, der durch den Bruder des Verstorbenen mit der Aufgabe den Neudruck zu leiten betraut war, und dem Dechales' schriftlicher Nachlass dazu zur Verfügung stand, erklärt dort ausdrücklich, er habe jene Abhandlung, welcher er nicht genug Lobsprüche ertheilen kann, vorgefunden. Fachmänner sind nicht im Stande, jenem Lobe zuzustimmen, vermögen vielmehr zu Dechales' Entschuldigung höchstens zu vermuthen, dieser habe nur einen ersten, keineswegs für die Oeffentlichkeit bestimmten Entwurf niederzuschreiben die Zeit gehabt, den er vor dem Drucke noch Zeile für Zeile abgeändert haben würde. Wäre dem nicht so, so müsste man dem strengen Urtheile sich anschliessen, welches einer der gründlichsten Kenner des Alterthums gefällt hat[1]): „Wer dieses oft gelobte Buch nicht gelesen hat, hat gar keine Vorstellung davon, mit welcher Gedankenlosigkeit diese vorgebliche Geschichte der Mathematik zusammengestoppelt ist.“ Kein Mensch kann es Dechales zum Vorwurfe machen, dass ihm damals nur handschriftlich zerstreut vorhandene, aber noch nicht herausgegebene Schriftsteller unbekannt waren; auch das mangelnde Quellenstudium der bereits gedruckten Mathematiker könnte man allenfalls entschuldigen; wenn er nur wenigstens die Schriften von Ramus (Bd. II, S. 504), von Vossius (Bd. II, S. 600) genügend benutzt hätte! Und unter allen Umständen rechtfertigt sich der härteste Dechales gemachte Vorwurf, der der Gedankenlosigkeit, durch die fortwährend zu Tage tretenden Verwechslungen, aus welchen der Leser nicht klug werden kann, wenn er nicht selbst mit besseren Kenntnissen versehen ist, als sie bei Dechales ihm aufgetischt werden. Man weiss aus Proklus (Bd. I, S. 124), dass ein Bruder des Stesichorus als Geometer gerühmt wurde. Dessen Name wird bald Mamerkus, bald Mamertinus, bald Ameristus geschrieben; im Tractatus prooemialis pag. 7 heisst es: *Thaleti proxime successit Mamertinus insignis Geometra quique multa geometrica adinvenisse dicitur. Eeodem fere tempore vixit Amethistus .... Frater fuit Stesichori poetae.* Aus einem Mathematiker sind mithin deren zwei geworden. Geminus von Rhodos lebte zu drei verschiedenen

[1]) Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 12–13.

Zeiten: auf pag. 8 vor Euklid, auf pag. 79 als Zeitgenosse Ciceros und Sullas, auf pag. 11 und pag. 47 als Lehrer des Proklus im IV nachchristlichen Jahrhunderte. Dieser letzteren Zeit gehörte gemäss pag. 11 auch Eudemus an. Theon von Smyrna hat zweimal gelebt: auf pag. 61 im II., auf pag. 12 und pag. 30 im XII. Jahrhunderte. Auf der ersten Kolumne von pag. 13 wird zum XV. Jahrhunderte berichtet: *Frater lucas de Burgo sancti sepulchri Minorita de Geometria et de divina proportione scripsit;* auf der zweiten Kolumne heisst es: *1508 Frater Lucas Patiolus Burgensis Minorita tractatum edidit geometricum Italicum de mensuratione scilicet, et productione corporum sphaerae inscriptibilium.* Dass hier nur eine und dieselbe Person gemeint ist, ist schwer zu errathen. In ähnlichem Widerspruche steht pag. 13: *Decimo quinto saeculo Joannes de Monteregio inter multa opus de triangulis edidit tam de rectilineis, quam sphaericis* zu pag. 14: *1561 Joannes Regiomontanus Trigonometriam edidit.* Wie es nun gar mit der Vollständigkeit beschaffen ist, dafür mag als Beispiel dienen, dass keine einzige algebraische Schrift des Cardano genannt ist.

Den geschichtlichen Werken schliessen wir das Auftreten von in regelmässiger Wiederkehr erscheinenden Schriften an, in welchen neue wissenschaftliche Ergebnisse mitgetheilt werden konnten, was früher, wie wir wissen, sofern der Urheber die Buchform nicht wählen wollte, oder nicht zu wählen im Stande war, nur durch gelehrten Briefwechsel zu geschehen pflegte. Gelehrte Gesellschaften fanden derartige Veröffentlichungen seit ihrem Entstehen als ihren Zwecken entsprechend.

Die Accademia del Cimento (Bd. II, S. 607), gegründet im Juni 1657, aber schon 1667 wieder geschlossen — wie man sagt, weil der Papst die Verleihung des Cardinalhutes an Leopold von Medici, den Gründer jener Akademie, an diese Bedingung knüpfte — gab 1667 das während der zehn Jahre ihres Bestandes durch ihren Sekretär Lorenzo Magalotti (1637—1712) geführte Tagebuch ihrer Sitzungen heraus.

Die Royal Society in London constituirte sich nach wohl zwölfjährigem geheimen Bestehen am 16. November 1660 öffentlich und erhielt 1662 die königliche Bestätigung[1]). Ihr erster Präsident war Lord Brouncker (Bd. II, S. 698), ihr Sekretär Heinrich Oldenburg[2]) (1626—1678) neben John Wilkins[3]) (1614—1672). Ersterer in Bremen geboren, war 1653 als Consul seiner Vaterstadt nach England übergesiedelt und hatte später als Hofmeister einiger

[1]) A. Hume, *The learned societies* etc. (London, 1853) pag. 67. [2]) Rees, *Cyclopaedia* XXV (London, 1819). [3]) Ebenda XXXVIII (London, 1819).

jungen Adligen Eingang in hochgestellte Familien gewonnen. Die Royal Society bediente sich seiner zur Führung des auswärtigen Briefwechsels und insbesondere auch zur Herausgabe der akademischen Schriften, welche den Namen der *Philosophical Transactions* erhielten. Der erste Band gilt für das Jahr 1665.

Die Gründung der Pariser Académie des sciences fällt in das Jahr 1666 (Bd. II, S. 618). Ihr Sekretär war Jean Baptiste Duhamel[1]) (1624—1706), ein Mitglied der Congregation des Oratoriums und seit 1656 Almosenier des Königs Ludwig XIV. Daneben bekleidete er die Professur der Philosophie am Collège de France. Duhamel gab in der *Histoire de l'Académie des sciences* einen sehr unregelmässigen und unvollständigen Bericht über den Inhalt der Sitzungen dieser gelehrten Körperschaft, und erst seit deren neuen Satzungen von 1699 lenkte die Veröffentlichung in geregelte Bahnen ein.

Aber inzwischen waren wissenschaftliche Zeitschriften entstanden, welche auch allgemeineren Wünschen durch die Einrichtung entgegenkamen, dass sie nicht nur solche Mittheilungen brachten, welche vorher in einer Sitzung einer Akademie hatten vorgetragen werden können. Die erste solche Zeitschrift war das *Journal des Sçavans* und weil sie die erste war, mag von ihrer Geschichte etwas ausführlicher die Rede sein[2]). Denis de Sallo, Sieur de la Coudraye (1626—1669) war seit 1652 Nachfolger seines Vaters als Parlamentsrath in Paris. Sein wesentlicher Charakterzug war eine auf alle Gebiete sich erstreckende Wissbegierde, die er dadurch zu befriedigen suchte, dass er las was immer neu erschien, und dass er Leute besoldete, welche für ihn die Stellen abschrieben, die er bezeichnete, und denen er Bemerkungen und eigene Gedanken zu diesen Stellen in die Feder diktirte. Auf Grund dieser Sammlung von wichtigen Auszügen war De Sallo in den Stand gesetzt, binnen sehr kurzer Zeit Abhandlungen über die entlegensten Dinge zu verfassen, und so lehrte ihn die eigene Erfahrung den Nutzen gut gemachter Bücherauszüge. Er fasste den Gedanken einer Zeitschrift, welche ihrem Leserkreise das biete, was er für sich allein mit grossem Kostenaufwand zu beschaffen sich gewöhnt hatte. Er fand Mitarbeiter, welche bereit und befähigt waren, auf seinen Plan einzugehen, darunter den Abbé Jean Gallois[3]) (1632—1707), Professor des Griechischen am Collège Royal zu Paris, der zu derartigen Arbeiten wie

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* XV, 99—102 (Paris, 1856). [2]) Jacques Boyer, *Denis de Sallo fondateur du Journal des Sçavans et son oeuvre* in der Revue scientifique (Revue rose) LII, 400—401 vom 23. September 1893. [3]) *Nouvelle Biographie universelle* XIX, 326—327 (Paris 1857).

geboren erschien. Der damals allmächtige, den Wissenschaften günstige Minister Colbert (1619—1683) wurde ins Interesse gezogen und liess der neuen Zeitschrift ein Privilegium zu Theil werden, und am Montag 5. Januar 1665 erschien die erste Nummer des Journal des Sçavans auf anderthalb Druckbogen in Quart. Als Herausgeber war Hédouville genannt, ein Diener De Sallos. Die Auszüge waren aber auch Kritiken, und so zahm diese gehalten waren, verliehen sie doch der Zeitschrift eine gewisse Macht und schufen ihr Feinde. Besonders verhasst war sie dem Jesuitenorden, De Sallo war überdies des Jansenismus verdächtig, und als nun gar eine Stelle gedruckt wurde, welche als Tadel einer Inquisitionsmassregel aufgefasst werden konnte, trat der päpstliche Nuntius als Kläger auf. Colbert sah sich genöthigt, De Sallo die Fortführung der Zeitschrift zu untersagen. Seine eigentliche Herzensmeinung äusserte sich dadurch, dass er De Sallo, um ihn für den Verlust zu entschädigen, in der Finanzverwaltung unterbrachte und die Leitung der Zeitschrift, welche nicht unterdrückt wurde, dem seitherigen Mitarbeiter Gallois übertrug, in dessen Händen sie 1666 bis 1675 blieb. Von 1675 bis 1686 war Abbé La Roque der Herausgeber, auf ihn folgte der Präsident Cousin, und 1701 übernahm der Staat die Zeitschrift, mit deren Leitung eine Vereinigung mehrerer Gelehrten betraut wurde. Das ist die Gestalt, in welcher sie bis 1792 fortbestand, in welcher sie 1816 neubegründet wurde.

Das Pariser Journal des Sçavans wurde das Vorbild der von 1682 bis 1774 in Leipzig herausgegebenen *Acta Eruditorum*, seit 1707 *Nova Acta Eruditorum*, welche Otto Mencke[1]) (1644—1707) ins Leben rief.

In Holland wurden ähnliche Unternehmungen ins Werk gesetzt, die *Nouvelles de la république des lettres* 1684—1718, die *Bibliothèque universelle et historique* 1686—1693, die *Histoire des ouvrages des savants* 1687—1709, denen insgesammt ein nur kleines Format — Duodez — gegeben wurde.

Das sind die wichtigsten Fundorte für Einzelveröffentlichungen zunächst in der Zeit, mit welcher dieser Abschnitt sich beschäftigt, aber auch noch über jene Zeit hinaus.

Als gleichfalls an die geschichtlichen Arbeiten sich anschliessend nannten wir die Veranstaltung von Ausgaben klassischer Schriftsteller. Deren Anzahl beginnt aus einem doppelten Grunde abzunehmen. Erstens gab es nachgrade schon Ausgaben der am meisten berühmten

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXI, 312—313 (Artikel von Mutzenbecher).

Werke des Alterthums, dem eigentlichen Bedürfnisse war also schon genügt; und zweitens hat die zweite Hälfte des XVII. Jahrh. wenigstens in Frankreich und England eher eine Abneigung gegen das Alterthum, eine Minderschätzung seiner Leistungen, als eine besondere Vorliebe desselben, welche kritische Ausgaben hätte ins Leben rufen können, heranwachsen sehen. Beide Gründe wirkten gemeinsam, wenn auch nicht so zwingend, dass nicht Ausnahmen von der Regel in den meisten Ländern Europas zu verzeichnen wären.

In Paris gab Claude Perrault (1613—1688), ein Mann von vielseitiger Bildung, der uns im 91. Kapitel wiederbegegnen wird, 1673 den Vitruv heraus. Ebenda erschien 1693 unter dem Titel *Veterum mathematicorum opera omnia* eine von Melchisedech Thévenot veranstaltete Sammlung alter Kriegsschriftsteller. In Amsterdam besorgte Wilhelm Goesius 1674 die römischen Feldmesser zum Drucke.

In England begegnen wir einer Persönlichkeit, welche mit mindestens gleicher Vorliebe die Veröffentlichung von Schriften der jüngsten Vergangenheit neben solchen des Alterthums nach Kräften förderte. Wir meinen John Collins[1] (1625—1683). Er war in seiner Jugend Lehrling bei einem Buchhändler; später ging er zum Rechenfache über; während der englischen Revolution war er Schiffsmann. Nach der Wiederherstellung des Königthums kamen für Collins ruhigere und auch bessere Zeiten. Von einem königlichen Jahresgehalte lebend, wurde er Mitglied der Royal Society. Er führte einen so ausgedehnten gelehrten Briefwechsel, dass derselbe von geschichtlicher Wichtigkeit für die Entdeckungen des letzten Drittels des XVII. Jahrh. geblieben ist, trotzdem grade damals, wie wir oben sagten, Akademieschriften und Zeitschriften die Briefwechsel in grossem Maassstabe allmälig verdrängten. Collins also vermittelte 1668 den Druck der mit Zusätzen von Pell versehenen Branckerschen Uebersetzung der Algebra von Rahn (Bd. II, S. 708). Er soll bei Herausgabe der Algebra von Kersey 1673—1674 betheiligt gewesen sein. Er übergab 1675 Bearbeitungen der Werke des Archimed, der Kegelschnitte des Apollonius dem Drucke, welche Isaac Barrow verfasst hatte, und auch schon 1669—1670 eigene Schriften desselben Gelehrten. Wenn Collins auch eine Mitwirkung bei dem Drucke der 1687, mithin vier Jahre nach seinem Tode erschienenen Algebra des Wallis nachgerühmt wird, so kann dieselbe höchstens darin bestanden haben, dass er den Verfasser zur Herausgabe ermunterte.

[1]) *National Biography* XI, 369 (London, 1887, edited by Leslie Stephen).

Wir haben Isaac Barrow[1]) (1630—1677) genannt. Er war in erster Linie und aus vollster Ueberzeugung Theologe, aber um ein guter Theologe zu sein, musste er, wie von einem Lobredner gesagt worden ist, Chronologie verstehen, Chronologie schliesst Astronomie, Astronomie Mathematik ein, und auf diese Weise wurde Barrow zum Mathematiker. Die Anfänge seiner Laufbahn waren schwierig. Barrow gehörte gleich Lord Brouncker, gleich John Wallis, gleich William Oughtred der strenggläubigen Partei an und musste die Verfolgungen erdulden, unter welchen alle seine Gesinnungsgenossen litten. Bei Wiedereinsetzung des Königthums erhielt Barrow die sogenannte Gresham-Professur der Geometrie. Er gab sie 1663 wieder auf, als er zu der damals durch letztwillige Verfügung von Henry Lucas gegründeten Professur der Geometrie nach Cambridge berufen wurde, und auch diese Stellung legte er 1669 zu Gunsten seines Schülers Isaac Newton nieder, um von da an geistliche Aemter zu verwalten. Die frühsten mathematischen Arbeiten Barrows greifen bis 1655 zurück, wo er die Elemente, und 1657, wo er die Daten Euklids in lateinischen Bearbeitungen veröffentlichte, welche 1676 abermals gedruckt wurden und bis zum Anfange des XVIII. Jahrh. in England ausschliesslich in Gebrauch blieben. Dann folgten 1675 jene vorerwähnten, durch Aufforderung von Collins hervorgerufenen Bearbeitungen der Werke des Archimed und der Kegelschnitte des Apollonius, auch eine Bearbeitung der Sphärik des Theodosius. Die Archimedbearbeitung enthält auch die aus einer arabischen Uebersetzung 1659 durch Samuel Foster (Bd. II, S. 539) bekannt gewordenen Wahlsätze (Bd. I, S. 256). Eine nachgelassene, 1678 gedruckte Schrift Barrows *Lectio in qua theoremata Archimedis de sphaera et cylindro per methodum indivisibilium investigata exhibentur* darf hier gleichfalls genannt werden.

Mit der wirklichen Herausgabe des Archimed und zwar in deutscher Sprache beschäftigte sich Johann Christoph Sturm[2]) (1635—1703). Er hat schon während der Zeit, dass er als Prediger zu Deiningen im Oettingschen angestellt war, 1667 eine deutsche Uebersetzung der archimedischen *Sandeszahl* veröffentlicht, und als er 1669 als Nachfolger von Abdias Trew zum Professor der Mathe-

[1]) *National Biography* III, 299—305 (London, 1885, edited by Leslie Stephen). W. W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge* pag. 46—49 (Cambridge, 1889). *Opera mathematica Barrowii* (1860 ed. Whewell). [2]) Poggendorff II, 1043—1044. S. Günther, Die mathematischen und Naturwissenschaften an der nürnbergischen Universität Altdorf (Separatabzug aus dem 3. Hefte der Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg) S. 28—29.

matik und Physik in Altdorf ernannt wurde, liess er 1670 den *Deutschen Archimed* nachfolgen, eine von zahlreichen Anmerkungen begleitete Uebersetzung auch der übrigen archimedischen Schriften mit Ausnahme der Wahlsätze, deren Auffindung Sturm entgangen sein dürfte. Schon in der Sandeszahl hat Sturm Gewicht darauf gelegt, deutsche Ausdrücke an die Stelle der fremdländischen zu setzen. Eine *Nota*, welche das Vorwort schliesst, sagt ausdrücklich: *Damit der begierige Leser durch einige scheinende Neuigkeit etlicher verteutschter Kunstwörter nicht aufgehalten werde, so soll er wissen, dass hierinnen ein Durchmesser so viel heisse als sonsten Diameter, der Halbmesser so viel als Semidiameter, Proportio ist von uns eine Verhältniss, Proportionalia gleichverhaltende Dinge, Cylindrus eine Rund-Säule etc. verteutschet.* In dem Deutschen Archimed ist sodann der Gesammtvorrath deutscher Ausdrücke in dem Maasse angewachsen, dass ein *gedoppeltes Register* nach der deutschen und nach der lateinischen und griechischen Buchstabenfolge auf $3^1/_2$ Folioseiten im Vorberichte abgedruckt werden konnte. Wir erwähnen aus dem ersten deutsch geordneten Register: *gleichlauffende Lineen für Parallela, Folge für Corollarium, Hülfssatz für Lemma, Lehrsatz für Propositio,* dann aus dem zweiten Register: *Centrum der Mittelpunkt, Latus rectum der Mitmesser in denen Kegellinien, Postulatum eine Forderung, Vertex der Scheitelpunkt* u. s. w., Ausdrücke, welche wohl zum grössten Theil von Sturm zuerst benutzt worden sein mögen. Sein *Mitmesser* dürfte dem einige dreissig Jahre früher in Frankreich entstandenen *Paramètre* nachgebildet sein. Die Sandeszahl von 1667 ist dem Deutschen Archimed von 1670 als letzter Abschnitt beigefügt, hat aber die alten mit 1 anfangenden Seitenzahlen beibehalten. Von einer zufälligen Anheftung durch den Buchbinder kann nicht die Rede sein, denn in dem zu Anfang befindlichen *Verzeichnis derer in diesem Werk begriffenen Archimedischen Schrifften* ist die Sandeszahl als VII. Schrift angekündigt. Man wird also annehmen müssen, dass von dem Drucke von 1667 noch so viele Exemplare auf Lager sich befanden, dass es unnöthig war, diesen Abschnitt 1670 neu zu drucken.

In Italien finden wir Elia Astorini[1] (1651—1702), einen Carmelitermönch, der weite, lang ausgedehnte Reisen machte und in Marburg und Gröningen, zuletzt in seinem Heimathlande in Siena als Universitätslehrer thätig war. Er gab in Italien 1691 die Elemente des Euklid, 1702 die Kegelschnitte des Apollonius heraus. Von einem Archimedes restitutus finden wir gleichfalls unbestimmte Nachricht.

Gehen wir von den Herausgebern alter Geometer zu den Original-

[1]) Poggendorff I, 71.

schriftstellern über, so wird, und zwar nicht bloss in diesem Kapitel, eine Erscheinung uns entgegentreten, auf welche wir gleich hier, wo es um die Männer sich handelt, welche im Geiste und nach der Weise der Alten Geometrie trieben, aufmerksam machen möchten: die Namen der Schriftsteller, welche eine grosse geschichtliche Bedeutung erworben haben, sind recht dünn gesäet. Wir müssen, um nicht allzuviele scheinbare Lücken gegen bibliographische Sammelwerke aufzuweisen, noch Mittelgut und noch Geringeres erwähnen. Nicht als ob in dieser Bemerkung ein Tadel gegen die Leistungen der Endjahrzehnte des XVII. Jahrh. ausgesprochen sein soll.

Es ist ja wahr, dass in Deutschland die Nachwehen des dreissigjährigen Krieges sich, wie überall so auch in den mathematischen Wissenschaften, wahrnehmen liessen. Es ist nicht minder wahr, dass in Frankreich der wachsende Einfluss der Jesuiten, welcher in der Aufhebung des Ediktes von Nantes am 22. October 1685 gipfelte, zahlreiche Persönlichkeiten aus dem Lande trieb, welche bei ruhiger verlaufendem Leben die Mathematik gerade in Frankreich vielleicht in dem stetigen Wachsthume erhalten hätten, von welchem unser XIV. und XV. Abschnitt glänzende Zeugnisse gaben. In Italien mag eine ähnliche Machtentfaltung des gleichen Ordens, der seit seinem Siege über Galilei allgewaltig geworden war, unserer Wissenschaft schädlich gewesen sein. Wollten wir unseren Rundgang durch Europa nach England fortsetzen, so könnten wir dort auf die Nachwirkung der kaum beseitigten Staatsumwälzung, könnten wir auf neuerdings beginnende politische Wirren hinweisen.

Alle diese Störungen waren thatsächlich vorhanden. Aber wollten wir irgend einen anderen Zeitraum von annähernd gleicher Dauer und innerhalb desselben die politischen Verhältnisse der europäischen Reiche unter die Lupe nehmen, so würden Störungsgründe einer ruhigen Entwicklung gleichfalls nicht fehlen. Haben wir doch an manchen Stellen des I. wie des II. Bandes auf Derartiges aufmerksam gemacht. Es ist vielmehr ein Andres, was in Betracht kommt.

Je näher die Zeit an unsere Gegenwart heranrückt, um so mehr Bücher haben sich erhalten, deren Verfasser durch den Lokalpatriotismus ihrer Heimaths- oder Ordensgenossen, aber auch nur durch diesen, mit dem Lorbeer der Berühmtheit belohnt wurden. Die Vergessenheit hatte noch nicht Zeit sich ihrer zu bemächtigen, denn nur langsam, dann aber meistens sicher siebt die Gerechtigkeit der Nachkommen. Um ein Beispiel von schlagender Beweiskraft anzuführen, wen kennen wir aus dem grossen Jahrhunderte griechischer Mathematik? Euklid, Archimed, Eratosthenes, Apollonius. Glaubt Jemand, in der Zeit, welche diese Männer hervorzubringen im Stande

war, habe neben ihnen kein einziger anderer Mathematiker gelebt? Gewiss nicht, aber jene anderen sind meistens vergessen. Aehnlich wird es mit Dutzenden von Persönlichkeiten gehen, welche dem nicht minder grossen Jahrhunderte angehören, dessen Darstellung dieser III. Band unserer Vorlesungen über Geschichte der Mathematik gewidmet ist. Wir fühlen uns nur nicht berechtigt vorzugreifen und sie heute schon todtzuschweigen.

Wir nennen deshalb Gilles François Gottigniez[1]) (1630 bis 1689), einen belgischen Jesuiten, der seit 1662 am Collegio Romano in Rom lehrte, und der dort seit 1666 zahlreiche Schriften veröffentlichte. Sie beziehen sich nicht auf Geometrie allein, sondern stellen in ihrer Gesammtheit einen vollständigen Lehrgang der Elementarmathematik dar.

Camillo Guarino Guarini[2]) (1624—1683), ein italienischer Theatiner, gab 1671 und 1676 zu Turin einen *Euclides adauctus et methodicus* heraus, dessen XXXII. Abschnitt ein Vorläufer der späteren descriptiven Geometrie genannt worden ist.

Vitale Giordano Giordani[3]) (1633—1711) aus Unteritalien kam nach wildem Wanderleben nach Rom, wo er Mathematiker der dorthin in einer Art von Selbstverbannung zurückgezogenen Königin Christine von Schweden und später Professor der Mathematik an verschiedenen gelehrten Anstalten wurde. Er übergab 1686 einen *Corso di matematica* dem Drucke, dessen erster Band den besonderen Titel *Euclide restituto* führt. Im Jahre 1689 lernte Giordano Leibniz kennen, der sich damals in Rom befand. Drei kurz darauf zwischen beiden gewechselte Briefe haben sich erhalten[4]). Sie beziehen sich auf geometrische Definitionen.

Claude François Milliet Dechales und sein *Mundus mathematicus* von 1674 und 1690 ist uns (S. 4—6) durch die sehr schwache geschichtliche Einleitung bekannt geworden, welche als Verschlimmbesserung der zweiten Auflage an deren Spitze trat. Im Uebrigen kann man das Lehrbuch keineswegs als schlecht bezeichnen, wenigstens nicht in dem, was es enthält. Es beginnt, wenn wir von jener Einleitung absehen, mit einer Geometrie nach Euklid, d. h. die sechs ersten, das elfte und das zwölfte Buch der Elemente sind der Hauptsache nach vorhanden, die dazwischen liegenden Bücher VII bis X fehlen. Es folgt das Rechnen, und zwar zuerst das Zahlenrechnen an ganzen

[1]) De Backer, *Bibliothèque des écrivains de la Compagnie de Jésus* II, 253. Quételet, *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* pag. 233. [2]) Tiraboschi, *Storia della letteratura italiana* VIII, 276. Chasles, *Aperçu hist.* 345 (deutsch 363). [3]) Ebenda l. c. VIII, 273. Poggendorff I, 901. [4]) Leibniz, Mathematische Schriften herausgegeben von C. J. Gerhardt I, 195—200.

und gebrochenen Zahlen mit Einschluss der Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln, dann die *Arithmetica calculatoria et divinatoria*. Arithmetica calculatoria ist das alte Linienrechnen mit Rechenpfennigen nebst dessen Anwendung auf benannte Zahlen. Arithmetica divinatoria ist eine kleine Sammlung von Rechenkunststückchen und dergleichen, unter welchen auch die Aufgabe von den 15 Christen und 15 Türken (Bd. II, S. 332 und öfter) nicht fehlt. Nun geht der Verfasser zu der Sphärik des Theodosius in freier Uebersetzung über und nach dieser zur Trigonometrie. Deren erstes Buch lehrt den Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen unter einander und die Berechnung trigonometrischer Tafeln. Das zweite Buch lehrt Logarithmen sowohl der trigonometrischen Funktionen als der Zahlen für die Basis 10 mit sieben Decimalstellen berechnen und dieser Logarithmen sich bedienen. Dann folgt eine Logarithmentafel selbst. Das dritte Buch ist der ebenen, das vierte, fünfte, sechste der sphärischen Trigonometrie gewidmet. Jetzt kommen lauter Gebiete, welche man als angewandte Mathematik oder als Physik zu benennen pflegt: Praktische Geometrie, Mechanik, Statik, Geographie, Magnetismus, Bürgerliche Baukunst, Zimmerkunst (ars tignoria), Steinschnitt, Kriegsbaukunst, Hydrostatik, Lehre von den Quellen und Flüssen, Hydraulik, Schifffahrtskunde, Optik, Perspektive, Katoptrik, Dioptrik, Musik, Feuerwerkskunst, Benutzung der Astrolabien, Gnomonik, Astronomie, Kalenderkunde. Auf 25 Folioseiten schliesst sich die Astrologie an oder vielmehr neben der Angabe der Regeln, nach welchen die Astrologen beim Aufstellen der Horoskope verfahren, eine kräftige Bekämpfung der Hallucinationen, als welche dem Verfasser die ganze Sterndeuterei erscheint. Die Zusammenstellung der Gründe, um derenwillen man auf das Gerede der Astrologen, Wetterpropheten u. s. w. nichts geben dürfe, ist eine so vollständige, dass sie auch heute noch gegen manchen Aberglauben, der in wissenschaftlichem Gewande auftritt, mit Erfolg benutzt werden könnte. Und nun kommen als Schluss des ganzen Werkes noch drei Wissensgebiete, die man an dieser Stelle gewiss nicht leicht mehr sucht: Algebra, Indivisibilien, Kegelschnittslehre. Die Algebra, mehr als 100 Folioseiten in acht Bücher eingetheilt, führt den Leser auf eine Stufe, welche nicht ganz mit der von Vieta erreichten Höhe übereinstimmt, so innig auch in manchen Dingen, beispielsweise in dem Gebrauche fremdartiger Kunstausdrücke, in der Nichtanerkennung negativer Gleichungswurzeln, in der Anwendung der Buchstaben A, E, I, O, V, Y für unbekannte Grössen, die Anlehnung an Vieta ist. Von diesen Vokalen macht ferner Dechales ebenso wenig wie Vieta ausschliesslichen Gebrauch. In der *Algebra numerosa*, welche von der *Algebra speciosa* unterschieden

wird, heisst die Unbekannte nach der bei Vieta theilweise noch erhaltenen Sitte einer weit zurückliegenden Zeit *R*, ihr Quadrat *q*, ihr Kubus *c* u. s. w. Diese Buchstaben werden aber bei höheren Potenzen nicht addirt, sondern multiplicirt, und damit ist Vieta gegenüber (Bd. II, S. 579) ein bewusster Rückschritt vollzogen. Dechales hat ihn damit zu begründen gesucht, dass er sagt[1]), man könne die fünfte Potenz doch nicht, wie es Einige wollen, *quadratocubus* nennen, da sie weder ein Quadrat noch ein Kubus sei. Er hat aber dabei nicht bedacht, dass ihm so die Multiplicationsregel der Potenzen durch blosses Nebeneinanderschreiben ihrer Zeichen verloren ging, welche der Gewinn bei Vieta's Neuerung war, mochten auch sprachliche Einwendungen gegen sie erhoben werden können. In der Algebra speciosa, in welcher die Vokale als Vertreter der Unbekannten auftreten, werden die aufeinander folgenden Potenzen durch rechts von den Buchstaben aber auf gleicher Linie mit ihnen angeschriebenen Zahlen, die Glieder einer arithmetischen Reihe, angedeutet, welche Exponenten genannt werden[2]). Dem Ausdrucke „sie werden genannt" darf man wohl entnehmen, dass Dechales das Wort Exponent einem Vorgänger entlehnte, und dieser Vorgänger war nach aller Wahrscheinlichkeit Michael Stifel, der in seiner *Arithmetica integra*[3]) das gleiche Wort für die Glieder einer arithmetischen Reihe, welche solchen einer geometrischen Reihe entsprechen, in Anwendung brachte. Links von den Buchstaben stehen abermals Zahlen als Coefficienten, wie Dechales mit Vieta (Bd. II, S. 580) aber in erweiterter Bedeutung des Wortes sagt. Demnach ist bei Dechales $4A3$ das Gleiche, was Descartes und seine Nachfolger $4x^3$ schrieben. Dechales behandelt Gleichungen ersten und zweiten Grades, letztere indem er sie durch Wegschaffung des Gliedes ersten Grades in reinquadratische umwandelt, wenn er auch diesen Grundgedanken nirgend deutlich ausspricht, so wenig Vieta es gethan hat. Gleichungen von höherem Grade werden, wieder im Anschlusse an Vieta (Bd. II, S. 588), durch ein gewisses Divisionsverfahren numerisch aufgelöst. Der Name des Diophant kommt häufig bei Dechales vor. Einestheils wird bei quadratischen Gleichungen die gewöhnliche Auflösung von der Diophantischen unterschieden. Unter ersterer versteht Dechales die

[1]) *Quintus numerus ab unitate vocatur ab aliquibus quadrato-cubus sed male cum neque sit quadratus, neque cubus, atque adeo nec dici possit quadratus cubi, nec cubus quadrati: eum vocabimus supersolidum vel surde solidum. Itali relatum primum dixerunt, nos illum littera S. notabimus.* [2]) *Hi numeri progressionis arithmeticae respondentes numeris cossicis vocantur eorum exponentes.*
[3]) *Arithmetica integra* fol. 250 recto: *Est* — 3 *exponens ipsius* $\frac{1}{8}$, *sicut* 6 *est exponens numeri* 64 *et* 3 *est exponens numeri* 8.

Zurückführung der Gleichung auf die Form, in welcher das Quadrat der Unbekannten nur noch mit dem Coefficienten 1 versehen ist, unter letzterer dagegen die vorbereitende Vervielfachung der Gleichung mit dem Coefficienten des quadratischen Gliedes, so dass dieses einen selbst quadratischen Coefficienten erhält. Anderntheils sind zahlreiche Aufgaben aus den beiden ersten Büchern des Diophant, und zwar sowohl bestimmte als unbestimmte, behandelt. Die unbestimmten sind ihrem Ursprunge nach von höherem als dem ersten Grade, da unbestimmte Aufgaben ersten Grades bei Diophant nicht vorkommen. Bachets methodisches Verfahren (Bd. II, S. 703—704) zur Auffindung ganzzahliger Auflösungen solcher Gleichungen ersten Grades, deren Unbekannte an Zahl die der vorgelegten Gleichungen übertreffen, darf man daher bei Dechales nicht suchen. Am Schlusse jener Diophantischen Gleichungsbeispiele meint er dann[1]) einigermassen naiv, sie genügten dem Anfänger, um sich daran zu üben: wolle einer mehr, so solle er den Diophant selbst zur Hand nehmen, den er nach dem Vorausgeschickten leicht werde durchlaufen können. Die Behandlung der Indivisibilien, nach Cavalieri gearbeitet, bewahrt sich eine gewisse Freiheit von dem Vorbilde, dem nicht alle Beweise genau so, wie sie bei Cavalieri vorkommen, entnommen sind. Allerdings haben auch nicht alle Sätze Cavalieris Eingang gefunden, und beispielsweise von dem wichtigsten Ergebnisse von Cavalieris Untersuchungen (Bd. II, S. 771), welches der Formel

$$\int_0^a \frac{k b^n x^n}{a^n} dx = \frac{k a b^n}{n+1}$$

entspricht, ist keine Rede. Dagegen sind die Untersuchungen über die Quadratrix und über die Spirale vorhanden. Bei ersteren lässt Dechales sein Licht als grosser Geschichtskenner leuchten. Die Quadratrix stamme von Nicostratus und Nicomedes! Es gehört fast eine gewisse Phantasie dazu, den Namen Dinostratus hier zu erkennen. Die in fünf Büchern behandelten Kegelschnitte bilden den Schluss des Werkes. Das erste Buch handelt von der Parabel, das zweite von der Ellipse, das dritte von der Hyperbel, wo überall die Curven innerhalb der Ebene betrachtet sind. Das vierte Buch setzt sie zu dem durch eine Ebene geschnittenen Kegel in Beziehung. Das fünfte Buch lehrt die Ellipse als Cylinderschnitt kennen. In einer Vorrede erklärt Dechales, es habe ursprünglich in seiner Absicht gelegen, Alles zu vereinigen, was man von den Kegelschnitten

[1]) *Atque haec sufficiant ut Tyro se exercere possit, et intelligat Diophantum; qui plura volet assumat ipsum Diophantum, quem ex praesuppositis fundamentis percurret facile.*

wisse, aber er habe diese Absicht aufgegeben, weil zu den früher bekannten vier Büchern des Apollonius drei weitere Bücher getreten seien, weil ausserdem das Werk des Gregorius von St. Vincentius mit mehr als tausend Lehrsätzen zu benutzen gewesen wäre, und so begnüge er sich mit dem, was in der angewandten Mathematik, namentlich in der Optik zur Anwendung komme, um die Leser nicht abzuschrecken. Man sieht, dass Dechales die Arbeiten von Mydorge, von Desargues, von Pascal ebenso wenig erwähnt wie die von Fermat, von Descartes, von Wallis. Was er gibt, ist ein Auszug aus Apollonius mit geringen Zuthaten, wie z. B. die *zweier asymptotischer Parabeln*. Dechales versteht darunter (Figur 1) zwei Parabeln von gleicher Brennweite, deren Axen aufeinander liegen, deren Scheitel aber von einander entfernt angenommen werden. Beide schneiden sich erst im Unendlichen, und ihre Entfernung nimmt fortwährend ab, wenn man als Entfernung das Stück einer zur Axe senkrechten Geraden von einem Punkte der einen Parabel bis zum Durchschnitte mit der anderen Parabel annimmt[1]). Die Methode der Beweisführung ist die altgriechische, eine analytische Geometrie gibt es für die Leser des Mundus mathematicus noch nicht. Einige Kunstausdrücke, wie Parameter, ordinatim Applicata, Focus haben sich allerdings eingeschlichen. Statt Focus wird häufiger *Umbilicus*, Nabelpunkt gebraucht. Die auf der Axe gemessene Entfernung von dem Scheitel des Kegelschnittes bis zum Eintreffen einer Ordinate heisst *Sagitta*, während in den Indivisibilien das Wort Abscissa dafür in Gebrauch war.


Fig. 1

Wir haben den Mundus mathematicus recht ausführlich, mancher Leser wird vielleicht denken allzuausführlich geschildert. Wir haben es gethan, weil er ein weit und breit berühmtes Lehrbuch war, weil er die Summe des Wissens uns kennzeichnet, welche am Anfange des letzten Viertels des XVII. Jahrh. solche Gebildete besassen, die, ohne Mathematiker von Fach zu sein, doch ihrer Kenntnisse in dieser Wissenschaft sich einigermassen rühmen konnten.

Dass die an sich ziemlich beengten Ausblicke nach einer höheren

[1]) Die Gleichungen der beiden Parabeln heissen: $Y^2 = pX$, $y^2 = p(X - a)$. Folglich ist $Y^2 - y^2 = pa$, $Y - y = \frac{pa}{Y + y}$ und da $Y + y$ fortwährend wächst, so nimmt $Y - y$ fortwährend ab.

Mathematik am Ende des ganzen Werkes vereinigt sind, fordert fast zum Vergleiche mit den in derselben Zeit durch Mitglieder desselben Ordens veranstalteten Klassikerausgaben *in usum Delphini* auf, in welchen alle für schlüpfrig gehaltenen Stellen ausgemerzt, dagegen am Schlusse vereinigt abgedruckt waren, und nicht minder erinnert das Ausweichen vor wirklichen Schwierigkeiten an wieder in derselben Zeit veranstaltete Klassikerausgaben mit einer Fülle oberflächlicher Anmerkungen, durch welche Minelli eine flüchtige Berühmtheit erlangte.

83. Kapitel.

Einzelne geometrische Untersuchungen. Leibnizens Characteristica geometrica.

Einen Gegensatz gegen die Vereinigung sämmtlicher elementaren mathematischen Lehren in ein Werk bildet die Behandlung einzelner geometrischer Aufgaben. Dahin gehört das 1678 in Mailand gedruckte Buch *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* des Giovanni Ceva[1]). Hier ist der Satz des Menelaos (Bd. I, S. 350) mit Hülfe von Schwerpunktbetrachtungen bewiesen (Figur 2). In a, A, C mögen die Massen a_1, A_1, C_1 sich befinden, von denen a_1 willkürlich ist, A_1, C_1 aber den Bedingungen genügen, dass B der Schwerpunkt von a_1 und C_1 und b der Schwerpunkt von A_1 und C_1 sei.

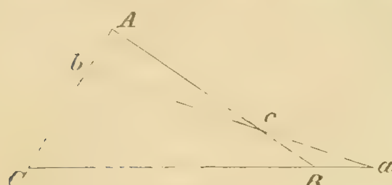


Fig. 2.

Dann muss $aB \cdot a_1 = BC \cdot C_1$ sein und durch Addition von $aB \cdot C_1 = aB \cdot C_1$ auch $aB(a_1 + C_1) = aC \cdot C_1$, mithin $\frac{aB}{aC} = \frac{C_1}{a_1 + C_1}$. Weil B Schwerpunkt von a_1 und C_1 ist, können diese beiden Gewichte durch das in B angebrachte Gewicht $a_1 + C_1$ ersetzt werden. Der Schwerpunkt der drei Gewichte a_1, A_1, C_1 muss erstens auf der Verbindungsgeraden von a mit b (als dem Schwerpunkte von A_1 und C_1) liegen und zweitens auf der Verbindungsgeraden von A mit B (als dem Schwerpunkte von a_1 und C_1) d. h. in dem Durchschnittspunkte c von ab und AB. Mithin ist das Produkt von Bc in das nach B verbrachte Gewicht $a_1 + C_1$ gleich dem Produkte von cA in A_1, also auch $\frac{a_1 + C_1}{A_1} = \frac{cA}{cB}$. Die Vervielfachung dieser Gleichung mit der oben erhaltenen $\frac{C_1}{a_1 + C_1} = \frac{aB}{aC}$ gibt $\frac{C_1}{A_1} = \frac{aB \cdot cA}{aC \cdot cB}$. Weil aber A_1 und C_1 ihren Schwerpunkt gegebener-

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 294—296 (deutsch 299—302). Poggendorff I, 414.

massen in b besitzen, muss $\frac{C_1}{A_1} = \frac{bA}{bC}$ sein, und so entsteht der zu beweisende Produktensatz: $aB \cdot bC \cdot cA = aC \cdot bA \cdot cB$. Ceva hat aber dann auch einen zweiten Produktensatz für die Abschnitte, die auf den drei Seiten eines Dreiecks durch Ecktransversalen mit gemeinsamem Durchschnittspunkte gebildet werden, bewiesen, und dieser Satz pflegt in der Geometrie als Satz des Ceva benannt zu werden. Es sei (Figur 3) D der Durchschnittspunkt der Transversalen $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$. In A denkt man sich ein beliebiges Gewicht A_1, in B und C solche Gewichte B_1 und C_1, dass γ der Schwerpunkt von A_1 und B_1, β der von A_1 und C_1 ist. Der Schwerpunkt der drei Gewichte A_1, B_1, C_1 muss nun ebensowohl auf $C\gamma$ als an $B\beta$ liegen, d. h. in D.

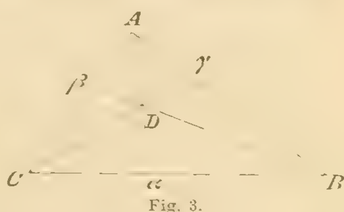


Fig. 3.

Damit ist aber festgestellt, dass jener gemeinsame Schwerpunkt auch auf den Verbindungsgeraden von A mit dem Schwerpunkte der B_1 und C_1 liegen muss, d. h. dass α dieser letztere Schwerpunkt ist. In den drei Punkten α, β, γ finden demnach die Gleichungen statt:

$$C\alpha \cdot C_1 = B\alpha \cdot B_1, \quad A\beta \cdot A_1 = C\beta \cdot C_1, \quad B\gamma \cdot B_1 = A\gamma \cdot A_1.$$

Deren Multiplikation aber führt nach Weglassung der auf beiden Seiten auftretenden Faktoren A_1, B_1, C_1 zu $C\alpha \cdot A\beta \cdot B\gamma = B\alpha \cdot C\beta \cdot A\gamma$. Ceva fügte diesem statischen Beweise noch zwei geometrische hinzu, deren einen er dem Mailänder Kriegsbaumeister Pietro Paolo Caravaggio[1]) (1617—1688) als Erfinder zuschrieb. Ceva beweist dann gleichfalls auf statischem Wege einen ganz ähnlichen Satz über das Viereck, dessen Eckpunkte nicht alle derselben Ebene angehören: werde es von einer Ebene so geschnitten, dass jede Seite in zwei Abschnitte zerfällt, so sei das Produkt von vier von diesen Abschnitten, welche keinen Endpunkt unter sich gemeinschaftlich haben, gleich dem Produkte der vier anderen. Das zweite Buch wendet die Gedanken und Sätze des ersten Buches auf Kegelschnitte an. Hier ist unter Anderem bewiesen, dass in jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecke die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt besitzen. Endlich lehrt ein Anhang, der vielleicht besser als besondere Abhandlung bezeichnet wäre, Sätze, die sich auf die Flächeninhalte gewisser ebenen Figuren und auf die Rauminhalte und Schwerpunkte von Umdrehungskörpern zweiten Grades beziehen.

Pater Sigismund Ferdinand Hartmann[2]) (1632—1681),

[1]) Poggendorff I, 375. [2]) Ebenda I, 1023.

Professor der Mathematik in Breslau und Olmütz, dann Professor der Mathematik und Theologie in Prag, stellte im September 1679 die Aufgabe, ein gleichseitiges Dreieck zu verdoppeln, so dass es gleichseitig bleibe, bei der Auflösung sollten aber Proportionen nicht angewandt werden. In den Acta Eruditorum[1]) von 1682, dem ersten Bande dieser Zeitschrift (S. 8) hat sich ein Ungenannter mit der sehr leichten Aufgabe beschäftigt. Die Heidelberger Universitätsbibliothek besitzt ein Exemplar der A. E., in welchem die Namen der Verfasser, so weit sie nicht im Drucke genannt sind, in schriftlicher Randnote beigesetzt erscheinen. Dort ist pag. 23 als Verfasser des erwähnten Aufsatzes Basilius Titel, Festungshauptmann der Pleissenburg angegeben. Titel also, wenn wir jener Randnote Glaube beimessen[2]), fügte noch einige Fragen bei, und diese beantwortete auf pag. 230 des gleichen Jahrganges ein polnischer Jesuit Adam Adamandus Kochansky, früher in Prag ansässig, nachmals Mathematiker des Königs von Polen. Kochansky behauptet zugleich, wenn AD Durchmesser eines Kreises, BC eine Senkrechte auf den Durchmesser im Punkte B bis zum Durchschnitte C mit der Kreisperipherie sei, so verhalte sich nicht nur, wie allgemein bekannt ist,

$$AB : BC = BC : BD,$$

sondern es sei auch weiter $BC : BD = BD : AD$, oder mit anderen Worten BC und BD seien die zwei mittleren Proportionalen zwischen AB und AD. Kochansky bestätigt seine jedenfalls nur näherungsweise aufgestellte Behauptung durch die Zahlenwerthe

$$AD = 20\,000\,000\,000,\ AB = 6\,353\,443\,923,\ BD = 13\,646\,556\,077,$$

aus welchen $BC = 9\,311\,424\,637$ folgt, und diese Zahlenwerthe erfüllen die zweite der behaupteten Proportionen. Ein in Wien lebender Piarist Augustin Thomas a St. Josepho[3]) hat alsdann 1690 es der Mühe werth gehalten, ein besonderes Büchelchen *Metamorphosis geometrica proportionum vinculis expedita* über die ursprüngliche Hartmannsche Aufgabe zu schreiben, und dieser selbe Wiener Mönch stand in Briefwechsel mit Leibniz, der ihn schätzte.

Der vorhin genannte Kochansky ist am bekanntesten durch

---

[1]) Da wir die Acta Eruditorum ausserordentlich häufig zu erwähnen haben werden, so wollen wir sie künftig regelmässig nur durch A. E. bezeichnen. [2]) Dass dieses nicht immer statthaft ist, trotzdem auch in den Bibliotheken von Leipzig, Dresden u. s. w. Exemplare mit gleichen Randnoten sich befinden, hat F. Giesel nachgewiesen. Vergl. dessen Delitzscher Programm der Höheren Bürgerschule für Ostern 1866: Die Entstehung des Newton-Leibniz'schen Prioritätsstreites hinsichtlich der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Anmerkung 53 auf S. 17–18. [3]) Poggendorff I, 1203.

eine äusserst elegante näherungsweise vollzogene Rectification des Kreises, welche er in den A. E. von 1685, pag. 394—398 unter der Ueberschritt *Observationes Cyclometricae ad facilitandam Praxin accomodatae* veröffentlichte. Man zieht (Figur 4) an den Endpunkten des Durchmessers BD die Berührungslinien BG, DL und macht DL dem dreifachen Halbmesser gleich. Dann zieht man $AC \perp BD$ und schneidet von C aus die Bögen CE und CF von je 60^0 ab, worauf man AEJ, AFK bis zum Durchschnitte mit BG, DL zeichnet. Verbindet man J mit L gradlinig, so ist, sagt Kochansky, JL = arc BCD *proxime*. Ist der Halbmesser zur Einheit gewählt, und berücksichtigt man, dass das Dreieck AJB und ebenso das ihm gleiche AKD die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks ist, so ergibt sich

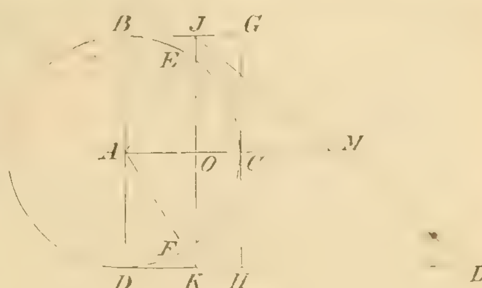


Fig. 4.

$$AD = 1, \quad DK = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{6}\sqrt{12}, \quad DL = 3,$$

$$KL = 3 - \tfrac{1}{6}\sqrt{12}, \quad KL^2 = \tfrac{28}{3} - \sqrt{12};$$

ferner $JK = BD = 2$, $JK^2 = 4$, folglich

$$JL^2 = \tfrac{40}{3} - \sqrt{12} = 13{,}3333333 - 3{,}4641016 = 9{,}869\,2317$$

und $JL = \sqrt{9{,}8692317} = 3{,}1415 \cdots$ also eine Zeichnung, welche den Werth von π auf vier Decimalstellen richtig liefert.

An diese angenäherte Rectification können wir eine gleichfalls angenäherte geometrische Kreistheilung anschliessen, welche Carlo Renaldini[1]) (1615—1698) zugeschrieben wird, der sie in seiner Schrift *De resolutione et compositione mathematica* veröffentlicht haben soll. Renaldini war seit 1649 Professor in Pisa und seit 1657 zugleich auch Mitglied der Accademia del Cimento. Als diese Vereinigung 1667 aufgelöst wurde, siedelte Renaldini, wie man sagt, weil das Klima von Pisa ihm nicht zuträglich war, nach Padua über, von wo er 1698 sich nach seiner Vaterstadt Ancona zurückzog. Dort starb er nach ganz kurzer Zeit. Renaldini gab allerdings 1668 in Padua ein Buch des angeführten Titels heraus, aber es war nur der wiederholte Abdruck eines Abschnittes eines bereits 1655 als *Opus mathematicum* erschienenen Werkes, und die Methode Renaldinis ist

[1]) Tiraboschi, *Storia della letteratura italiana* VIII, 247.

zudem keine andere als die 1628 durch Antoine de Ville zuerst veröffentlichte, welche alsdann Abraham Bosse 1665 verbesserte (Bd. II, Vorwort S. IX). Wir nehmen Gelegenheit, sie hier nachträglich mitzutheilen[1]) (Figur 5). Ueber dem Durchmesser AB des Kreises wird das gleichseitige Dreieck ABC gezeichnet und AB in n gleiche Theile getheilt, so dass $AE = ED = \cdots = \frac{AB}{n}$. De Ville schrieb vor, man solle C mit E durch eine Gerade verbinden, welche verlängert den Kreis in Q treffe, so sei AQ der $2n$te, und bei $AQ = QP'$ folglich AP' der $n$te Theil des Kreisumfanges. Bosse veränderte die Vorschrift dahin, man solle C mit dem zweiten Theilpunkte D des Durchmessers durch eine Gerade verbinden, welche verlängert den Kreis in P treffe, so sei AP der $n$te Theil des Kreisumfanges. Renaldinis Vorschrift deckt sich mit der von Bosse. Ob sie schon im Opus mathematicum von 1655 enthalten ist, mithin älter als die Veröffentlichung von Bosse, ob sie jünger als letztere erst im Abdrucke von 1668 erschien, wissen wir nicht zu entscheiden. Zur rechnerischen Prüfung des Verfahrens führt folgende Betrachtung[2]). Sei $AO = OB = OP = 1$, so ist $OC = \sqrt{3}$, $\frac{OC}{OP} = \frac{\sin OPC}{\sin OCP} = \sqrt{3}$, $\sin OPD = \sqrt{3} \cdot \sin OCP$.

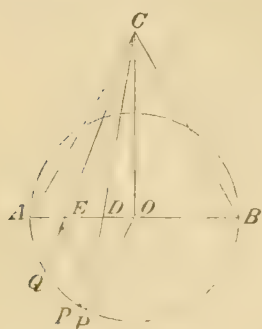


Fig. 5.

Ferner $AD = \frac{2AB}{n} = \frac{4}{n}$, $DO = AO - AD = \frac{n-4}{n}$,

$$\operatorname{tang} OCD = \frac{OD}{OC} = \frac{n-4}{n\sqrt{3}},\quad \sin OCD^2 = \frac{\operatorname{tang} OCD^2}{1 + \operatorname{tang} OCD^2} = \frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 8n + 16}.$$

Mithin

$$\sin OCP = \sqrt{\frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 8n + 16}},\quad \sin OPD = \sqrt{3} \cdot \sin OCP = \sqrt{\frac{3n^2 - 24n + 48}{4n^2 - 8n + 16}}$$

und

$$\operatorname{arc} OCP = \arcsin \sqrt{\frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 8n + 16}},\quad \operatorname{arc} OPD = \arcsin \sqrt{\frac{3n^2 - 24n + 48}{4n^2 - 8n + 16}}.$$

Aber

$$180^0 = POD + 90^0 + OCP + OPD,$$
$$POD = AOP = 90^0 - OCP - OPD.$$

Da nun $AOP = \frac{360^0}{n}$ sein soll, so setzt die angegebene Construction voraus, es sei

[1]) Kästner, Geometrische Abhandlungen, 1. Sammlung, S. 266—281. A. J. Pressland, *On the history and degree of certain geometrical approximations* pag. 1—2. [2]) Diese Prüfung hat Kästner l. c. angestellt.

$$\arcsin\sqrt{\frac{n^2-8n+16}{4n^2-8n+16}}+\arcsin\sqrt{\frac{3n^2-24n+48}{4n^2-8n+16}}=\frac{n-4}{n}\cdot 90^0.$$

Dieses trifft, wie man sofort sieht, bei $n=4$ genau ein, aber auch bei grösseren n ist der Fehler nicht sehr beträchtlich.

Hier können wir vielleicht zweckmässig auch eine Aufgabe der praktischen Geometrie erwähnen, das sogenannte Rückwärtseinschneiden (Bd. II, S. 645). Die Lösung dieser Aufgabe wurde 1692 durch Laurent Pothenot der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgelegt und im X. Bande ihrer Berichte (1730) gedruckt, ohne dass der frühere Bearbeiter der gleichen Aufgabe Willebrord Snellius genannt wäre. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass dieses Verschweigen eines Vorgängers ohne jede böse Absicht stattfand und auf Unkenntniss beruhte. Pothenot[1]) war 1679 Bewerber um die damals zu besetzende Professur der Mathematik am Collège Royal de France, unterlag aber gegen einen gewissen La Montre. Als dieser nach Rochefort versetzt worden war, meldete Pothenot sich neuerdings und zwar ohne Wettbewerber und wurde 1684 in Besitz der Professur gesetzt, welche er bis zu seinem Tode 1732 behielt. Auch Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften war Pothenot seit 1682. Vor 1699 wurde aber sein Sitz wegen fortgesetzter Abwesenheit des Inhabers wieder für frei erklärt. Die Professur dagegen wurde ihm offen gehalten, und seit 1726 hielt er auch wieder selbst Vorlesungen.

Zur elementaren Geometrie im Sinne der Alten haben wir im vorigen Bande auch die Streitfrage über den Contingenzwinkel gerechnet und wenn auch allmälig die Behandlungsweise jener Frage sich veränderte, wenn Gesichtspunkte hervortraten, deren erstes Erscheinen auf ganz anderem Gebiete liegt und erst in viel späteren Kapiteln dieses Abschnittes uns beschäftigen wird, so halten wir es doch für zweckmässig der alten Gewohnheit treu zu bleiben. Wir erinnern uns, dass es der Hauptsache nach zwei einander widersprechende Meinungen über den Contingenzwinkel gab, deren letzte Vertreter Clavius und Wallis waren (Bd. II, S. 628—629). Ersterer nannte den Contingenzwinkel zwar einen Winkel, von dessen Grösse man zu reden berechtigt sei, der aber von heterogener Natur als die durch grade Linien gebildeten Winkel mit diesen nicht verglichen werden könne. Der letztere behauptete, der Contingenzwinkel sei überhaupt ein *non-angulum*, ein *non-quantum*. Wir wissen ferner, dass der Jesuit Leotaud für seinen Ordensgenossen Clavius in die

[1]) L. Am. Sédillot, *Les professeurcs de mathématiques et de physique générale au Collège de France* im *Bullettino Boncompagni* II, 444—446.

Schranken trat. Es geschah dieses in der *Cyclomathia* von 1662. Ihr wieder entgegenzutreten schickte sich Wallis 1667 an. Er verfasste einen vom 17. Februar 1667 datirten Brief an Leotaud. Dessen Herausgabe unterblieb jedoch bis 1685, wo der Brief als Theil der *Defensio Tractatus de angulo contactus et semicirculi* Aufnahme fand. Eine zweite Veröffentlichung fand statt, als 1693 die Gesammtwerke von Wallis im Drucke erschienen[1]). Indem Wallis zunächst darauf abhebt, Leotaud habe wahrscheinlich in Clavius mehr den Ordensgenossen als den Mathematiker vertheidigt, was ihm besonders schlecht anstehe, der selbst gegen einen Ordensgenossen, gegen Gregorius von St. Vincentius, die Feder geführt habe (Bd. II, S. 655), setzt er hinzu, zwei andere Ordensgenossen, Aynscom und Tacquet, stünden in der Berührungsfrage auf seiner Seite gegen Clavius, beziehungsweise gegen Leotaud. Aus dem eigentlichen Inhalte der Defensio heben wir als wesentlich hervor, dass Wallis deutlich betont, man müsse wirklich vorhandene Grössen von solchen unterscheiden, die nur im Entstehen begriffen seien. Ein Punkt sei keine Länge, sondern Anfang einer Länge. Eine Linie sei keine Fläche, sondern Anfang einer Fläche. Geschwindigkeit sei keine Bewegung, sondern Antrieb zur Bewegung. So sei auch ein Winkel nicht die Entfernung zweier Linien, sondern ihr Bestreben sich von einander zu entfernen[2]). Wie weit die Linien, die im Vereinigungspunkte gar keinen Winkel bilden, im späteren Verlaufe sich von einander entfernen, das hängt von dem Krümmungsgrade[3]) ab, den man zu vergleichen habe. Ein Kreis mit kleinem Halbmesser sei in höherem Grade gekrümmt als ein solcher mit grossem Halbmesser, weil gleichviel Krümmung bei ihm auf kürzerer Strecke vorhanden sei[4]). So spitzt sich schliesslich der ganze Streit auf eine Benennungsfrage zu. Clavius nannte *Angulus Contactus*, was Wallis viel richtiger *Gradus Curvitatis* nennt, richtiger weil die Benutzung dieses Ausdruckes zeigt, dass Krümmung und Krümmung nach einem und demselben Maassstabe verglichen werden können, nicht aber Krümmung und Winkel. Die Gerade hat die geringste Krümmung, von dem Winkel aber, den sie mit einer von ihr berührten Curve bildet, kann man nicht sagen, er sei grösser oder kleiner als der Winkel, den eine zweite dort berührte Curve mit der ersten bildet: es ist beidemal ein Nichtwinkel.

Wallis hat noch eine zweite Schwierigkeit der elementaren Geometrie der Untersuchung unterworfen: das *Parallelenaxiom*. Seinen

[1]) Wallis, Opera II, 631—664. [2]) Ebenda II, 654: *Angulus (seu gradus divaricationis) Distantia non est sed Inceptivus distantiae.* [3]) Ebenda 656: *gradus curvitatis.* [4]) *Circuli minoris arcus est magis curvus ut qui tantundem curvitatis habet in minori longitudine, adeoque est intensive curvior.*

vermeintlichen Beweis trug er im Juli 1663 in Oxford vor, veröffentlichte ihn aber erst 1693 in der Abhandlung *De postulato quinto*[1]. Wallis bespricht zuerst die Frage, ob man es mit einer des Beweises bedürftigen Annahme oder mit einer Forderung zu thun habe, und kommt zur Ueberzeugung, eine solche Unterscheidung sei nur Wortklauberei. Sodann gibt er den von Nasîr Eddîn (Bd. I, S. 669) herrührenden Beweis, welchen Edward Pocock[2]) (1604—1691), Professor der arabischen Sprache in Oxford, für ihn übersetzt hatte. Wir benutzen diese Gelegenheit, den in unserem I. Bande vernachlässigten Beweis hier anzudeuten. Drang doch Nasir Eddins Untersuchung jetzt erst in lateinischer Sprache in die europäische Mathematik ein, für welche sie bisher nicht vorhanden war. Der Geometer aus Tûs beginnt mit drei Hilfssätzen (Figur 6). Erstens: wenn zwei Gerade AB, CD durch die GH, JK, LM... so geschnitten werden, dass alle Schneidenden auf AB senkrecht stehen, d. h. mit ihr nur rechte Winkel bilden, mit der CD dagegen Winkel, welche ihren Nebenwinkeln ungleich sind, so dass die gegen C sich öffnenden Winkel sämmtlich stumpf, die gegen D sich öffnenden sämmtlich spitz sind, so nehmen die Schneidenden gegen D hin fortwährend ab $GH > JK > LM \cdots$ und umgekehrt: wenn die insgesammt zu AB senkrechten Schneidenden in dem angegebenen Sinne an Grösse abnehmen, so bilden sie mit der CD gegen C hin stumpfe, gegen D hin spitze Winkel. Zweitens: wenn RH und SQ zu AB senkrecht stehen und unter einander gleich sind, so stehen sie auch zu der R mit S verbindenden Geraden EF senkrecht. Drittens: die drei Winkel eines Dreiecks haben als Winkelsumme zwei Rechte. Auf sie stützt sich dann die weitere Untersuchung. Von den Hilfssätzen selbst wird der dritte in drei von einander unterschiedenen Fällen (rechtwinkliges, stumpfwinkliges, spitzwinkliges Dreieck) mit Hilfe des zweiten bewiesen, der zweite in indirekter Beweisführung mit Hilfe des ersten; der erste leuchte von selbst ein. Sei es, wirft Wallis hier ein[3]), aber ist der Satz von dem Durchschnitt zweier in derselben Ebene sich einander nähernder Geraden nicht noch leichter einleuchtend, als diese ganze Vorbereitung? Und am Schlusse der Darstellung des ganzen Nasir

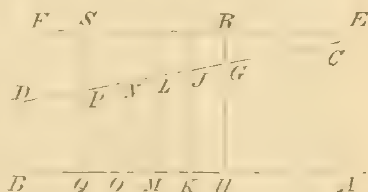


Fig. 6.

[1] Wallis, Opera II, 665—678. [2]) Poggendorff II, 478. [3]) Wallis II, 670: *Esto. At, inquam, ecquis non facilius conceperit ut clarum, Duas rectas (in eodem plano) convergentes, tandem (si producantur) occursuras, quam hunc totum apparatum.*

Eddîn'schen Beweisverfahrens kommt er wiederholt zu dem Ausspruche[1]), man schlage unverdientermassen auf Euklid wegen seiner nicht unbilligen Forderung. Wenn Wallis trotzdem einen ihm selbst eigenthümlichen Beweisversuch anschliesst[2]), so kann man voraus wissen, dass auch dieser Versuch auf nichts anderes hinauslaufen wird, als auf den Ersatz der euklidischen Forderung durch eine minder anstössige. Der Kern der Sache ist folgender (Figur 7). Steht eine Gerade AB auf einer anderen AC unter einem Winkel auf, so kann der Winkel weiter geschoben werden ohne sich in seiner Grösse zu verändern, und zwar durch eine Bewegung, bei welcher der Schenkel AC immer einen Theil derselben unendlichen Geraden bildet. Der Winkel bei A ist dann dem gleichliegenden in jeder von ihm erzielten Stellung gleich und vereinigt sich mit dessen Nebenwinkel zu zwei Rechten. Ist der Winkel DCA kleiner als jener Nebenwinkel, so muss CP zwischen AC und diejenige Lage von AB fallen, welche entsteht, wenn A bis nach C verschoben wird. Vorher kann aber unmöglich $\alpha\beta$ etwa ganz zwischen CD und CA fallen, denn wie wollte die plötzliche Lagenänderung eintreten, dass $\alpha\beta$ nur rechts, eine ihr gleichlaufende Gerade nur links von CD sich befände? Demnach muss $\alpha\beta$ die CD in einem Punkte π schneiden, so dass ein Dreieck $C\alpha\pi$ entsteht. Lässt man alle diese Schlüsse gelten, so kommt nun noch eine neue Forderung, welche die euklidische an Gewaltsamkeit weit übertrifft. Wallis nimmt nämlich beweislos an, zu jeder Figur könne eine ihr ähnliche mit beliebiger Veränderung der einzelnen Ausmessungen erzielt werden. Folglich müsse über der Grundlinie CA ein Dreieck gebildet werden können, welches dem Dreiecke $C\alpha\pi$ ähnlich sei. Heisst dieses Dreieck CAP, so ist P ein Durchschnittspunkt der AB und CD, d. h. diese beiden Geraden, welche mit AC Winkel bilden, die beide nach innen schauend eine geringere Summe als zwei Rechte besitzen, schneiden einander.

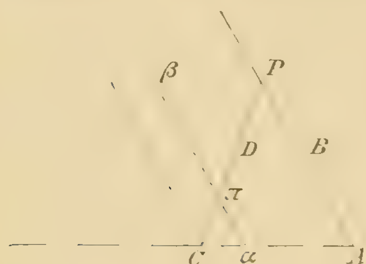


Fig. 7.

Der theoretischen Begründung von Theilen der Elementargeometrie gab sich auch ein Mann von hoher wissenschaftlicher Bedeutung hin: Gottfried Wilhelm Leibniz[3]) (1646—1716). Wir

[1]) Wallis II, 675: *Quo confirmatior factus sum, immerito suggillatum iri Euclidem propter hoc (non iniquum) Postulatum.* [2]) Ebenda 674—678. [3]) Allgemeine deutsche Biographie XVIII, 172—209. Artikel von Prantl, welcher sämmtliches bis 1882 herausgegebene Material an Briefen u. s. w. berücksichtigt

werden bei ihm und, sagen wir es gleich voraus, bei seinem grossen Nebenbuhler Newton im Verlaufe unserer Darstellung vielfach auf einzelne Lebensereignisse ein erhebliches Gewicht zu legen haben. Wir müssen deshalb genauer bei der Lebensgeschichte beider verweilen, zunächst bei der von Leibniz.

Die Familie Leibniz war aus Polen eingewandert. Ein Mitglied derselben wurde in Leipzig Notar und Professor der Moral. Er schrieb sich Leibnütz, aber der Sohn Gottfried Wilhelm liess auf seinen ersten Schriften den Namen in der Form Leibnuzius und Leibnüzius drucken, später Leibnitius. Die Unterschrift war meistens Leibniz und nur ausnahmsweise Leibnitz. Ein frühreifer Student von noch nicht 15 Jahren wurde Leibniz zu Ostern 1661 in die Listen der Leipziger Hochschule eingetragen. Im Frühjahre 1663 vertheidigte er als Baccalaureus der Philosophie eine die Logik betreffende Abhandlung und ging dann auf ein halbes Jahr nach Jena, wo er unter Erhard Weigel seine in Leipzig schon ohne Lehrer begonnenen mathematischen Studien fortsetzte. Grosse Förderung erhielt Leibniz offenbar nicht durch Weigel, wenigstens sagt er nirgend dergleichen[1]. 1664 erwarb Leibniz in Leipzig die philosophische Magisterwürde, 1665 eben dort das juristische Baccalaureat, 1666 erlangte er durch die Schrift *Dissertatio de arte combinatoria*[2]) das Recht ein akademisches Lehramt auszuüben. Noch in demselben Jahre wurde er in Altdorf Doctor beider Rechte, eine ihm sofort dort angebotene ausserordentliche Professur lehnte er ab.

Das Jahr 1667 brachte Leibniz in Beziehung zu Joh. Christ. von Boineburg, dem geistreichen ehemaligen kurmainzischen Minister, und dieser veranlasste sein erstes Eintreten in eine politisch bedeutsame Thätigkeit, welche er von Frankfurt am Main, später von Mainz aus ausübte. In diese Jahre fallen aber auch Leibnizens erste Abhandlungen über die Bewegungslehre (1670 und 1671), welche ihn unter Anderem mit Oldenburg in London, mit Honoratus Fabri in Rom in briefliche Verbindung brachten. Im März 1672 ging Leibniz mit politischen Aufträgen nach Paris, und wenn auch die Absichten der Auftraggeber keinen Erfolg erzielten, für Leibniz war der Pariser Aufenthalt, der ihn mit dortigen Gelehrten bekannt machte, von grösster Bedeutung.

Im Januar 1673 begleitete er den kurmainzischen Gesandten nach London. Oldenburg wurde besucht, Collins aber kann Leibniz

[1]) Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland S. 139. [2]) Wenn wir Bd. II S. 844 fälschlich 1668 als Druckjahr angaben, so folgten wir hierin ebenso wie in der Rechtschreibung des Namens Leibnitz einem Irrthume bei Poggendorff I, 1413.

damals bei dem ersten etwa siebenwöchentlichen Londoner Aufenthalte von 1673 nicht kennen gelernt haben. Sonst hätte Oldenburg in einem Briefe an Leibniz vom 6. April 1673 nicht schreiben können: *Scias me scriptum tuum impertiisse Doctiss$^{\underline{o}}$ nostro Collinio, similiter e Societate Regia*[1]). Das musste Leibniz von Collins wissen, wenn er mit ihm zusammengetroffen wäre und ein Zusammentreffen beider, ohne dass Oldenburg davon Kenntniss erhalten hätte, ist bei dem engen Verkehre der Londoner Gesellschaftsmitglieder unter einander vollends undenkbar. Anfangs März war Leibniz wieder in Paris, etwa fünf Wochen später, am 9. April, ernannte ihn die Königliche Gesellschaft in London einstimmig zu ihrem Mitgliede.

Leibniz blieb inzwischen in Paris, wo er jetzt Huygens persönlich kennen lernte, und wo er, während er nach den verschiedensten Seiten Fühlung nahm, um eine sichere Lebensstellung zu gewinnen, immer tiefer in die Mathematik eindrang. Zu einzelnen Arbeiten vereinigte er sich mit Walther von Tschirnhaus, welcher im September 1675 von London, wo er mit Oldenburg und Collins verkehrt hatte, nach Paris kam.

Im September 1676 erhielt Leibniz einen Ruf nach Hannover als Bibliotheksvorstand und Hofrath mit einem Jahresgehalte von 600 Thalern. Er nahm ihn an, ging aber zunächst im October auf wenige Wochen nach London. Das war der zweite kurze Londoner Aufenthalt vom October 1676, während dessen Leibniz mit Collins verkehrte.

Im gleichen Monate war Leibniz in Amsterdam bei Hudde. Auch im Haag, in Delft hielt er sich bei Gelehrten auf. Zu Ende December 1676 traf er in Hannover ein und verweilte hier fast volle 11 Jahre bis zum October 1687. Die in dieser Zeit entstandenen Arbeiten, gleichwie die früheren, gleichwie die späteren werden, soweit sie mathematischen Inhaltes waren, uns noch beschäftigen, zunächst haben wir es nur mit der Herstellung eines Ort und Zeit in Zusammenhang bringenden Rahmens zu thun.

Im October 1687 verliess Leibniz Hannover, um eine wissenschaftliche Reise zur Durchforschung von Bibliotheken und Archiven in Deutschland und Italien anzutreten. Es sollte Stoff zu einer Geschichte des welfischen Hauses gesammelt werden, zu deren Anfertigung Leibniz sich 1680 verpflichtet hatte. Auch Staatsgeschäfte wurden auf dieser Reise besorgt, welche sich bis zum Juni 1690 ausdehnte.

[1]) Leibnizens mathematische Schriften herausgegeben von C. J. Gerhardt I, 38. Wir citiren künftig diese 1849 bis 1863 im Drucke erschienene Ausgabe kurz als Leibniz. Die Bände I bis IV enthalten den mathematischen Briefwechsel, die Bände V bis VII Abhandlungen.

Wieder beginnt ein durch zahlreiche wissenschaftliche und staatsmännische Arbeiten ausgefüllter, durch kleine Reisen ab und zu unterbrochener zehnjähriger Aufenthalt in Hannover. Zu Anfang März 1700 lud der Kurfürst von Brandenburg Leibniz nach Berlin ein. Es handelte sich um eine Verbesserung des Kalenders, um die Annahme eines Reichskalenders, der in den Daten mit dem gregorianischen Kalender übereinstimmte. Es handelte sich zugleich um die **Gründung der Berliner Akademie.**

Wir beabsichtigen, unseren XVI. Abschnitt mit dieser Gründung zu schliessen. Gleichwohl sei gestattet, Leibnizens Lebenslauf über jene Grenze hinaus in die dem XVII. Abschnitte zugewiesene Zeit zu verfolgen. Leibniz, von seinem Kurfürsten Georg Ludwig von Hannover beurlaubt, nahm im Mai 1700 die Einladung an. Am 11. Juli unterzeichnete Kurfürst Friedrich III. von Brandenburg den Stiftungsbrief der „*Societät der Wissenschaften*", am folgenden Tage ernannte er Leibniz zu deren Präsidenten, eine Ernennung, welche aber staatsrechtliche Dienste keineswegs ausschloss, wie denn Leibniz auch an den langathmigen Unterhandlungen betheiligt war, welche dahin führten, dass sich Kurfürst Friedrich am 18. Januar 1701 in Königsberg die Krone aufs Haupt setzte und fortan König Friedrich I. von Preussen hiess.

Auch der andere Monarch, dem Leibniz seine Dienste widmete, Kurfürst Georg Ludwig von Hannover, hatte die Anwartschaft auf eine Königskrone, und wir müssen ausnahmsweise die Geschichte der englischen Thronfolge, um die es sich handelt, berühren. In Karl II. war 1660 wieder ein König eingesetzt worden, der nach wenigen Jahren die Zuneigung, die ihm anfangs entgegengebracht wurde, neuerdings verscherzte. Aber der König hatte die Macht in Händen und brach den sich regenden Widerstand mit eiserner Strenge, die er insbesondere seit 1680 walten liess. Sein Bruder, der zum Katholicismus übergetretene Herzog von York, führte thatsächlich die Regierung, und zahlreiche Todesurtheile wurden gefällt und vollzogen. Karl II. starb 1685, sein eben genannter Bruder erbte als Jakob II. die Königswürde. Er hatte aus der Zeit, in welcher er noch Protestant gewesen war, zwei Töchter: Maria und Anna, jene mit Wilhelm von Oranien, diese mit Georg von Dänemark vermählt. Da wurde 1688 die Geburt eines Kronprinzen Jakob verkündigt, der in der Volksmeinung für ein untergeschobenes Kind galt, untergeschoben um die protestantischen Töchter von der Regierung auszuschliessen und das katholische Königthum erblich zu machen. Jetzt landete Wilhelm von Oranien mit bewaffneter Macht in England. Volk, Armee, Flotte jubelten ihm zu, und ein zusammentretendes Parlament

sprach 1689 Maria nebst ihrem Gemahle, jetzt Wilhelm III., die durch neue dem Parlamente vorbehaltene Rechte ziemlich beschränkte Königswürde zu. Nach ihrem kinderlosen Tode sollte die Krone auf Marias Schwester Anna übergehen. Maria starb 1694, Wilhelm III. 1702, Leibeserben beider waren nicht vorhanden, und Königin Anna bestieg den Thron. Ein Jahr früher (1701) war mit dem Parlamente die *Succession-Act* vereinbart worden, welche auch den Fall des kinderlosen Todes Annas vorsehend, die Kurfürstin Sophie von Hannover, die jüngste Tochter jener englischen Prinzessin Elisabeth, welche einst mit Friedrich von der Pfalz verheirathet gewesen, und ihre Nachkommen, sofern sie protestantisch seien, auf Englands Thron berief. Neben den hier geschilderten politischen Ereignissen gingen noch andere kriegerischer Natur einher, indem Frankreich die Partei des vertriebenen Jakob II. und seines Sohnes, der als Jakob III. Anspruch auf die Thronfolge erhob, ergriff, ohne wesentliche Erfolge erzielen zu können. Auch Königin Anna war, soweit ihre Macht reichte, geneigt, dem von ihr persönlich anerkannten Bruder Jacob III. die Nachfolge zu verschaffen, und, was das Auffallendste ist, Kurfürstin Sophie, die berufene Erbin des englischen Thrones, theilte die gleiche Neigung.

Leibniz war es vorbehalten, durch mündliche und schriftliche Ueberredung es dahin zu bringen, dass Kurfürstin Sophie endlich einwilligte, jenes die Erbfolge ordnende Gesetz ihrerseits gut zu heissen. Königin Anna starb am 12. August 1714. Kurfürstin Sophie war ihr am 14. Juni vorausgegangen. Deren Sohn, der mehrgenannte Georg Ludwig, bestieg als Georg I. den englischen Thron. Es ist begreiflich, dass Leibnizens Thätigkeit in der ganzen Frage kein Geheimniss blieb, und dass, woran wir uns später erinnern müssen, die Gegner der Hannoverischen Thronfolge in England um so erbittertere Gegner, ja persönliche Feinde Leibnizens wurden.

Die ganze Zeit, deren Bedeutung für die englische Geschichte wir hier zu erläutern hatten, war für Leibniz auch in jeder anderen Beziehung reich ausgefüllt. Schriftstellerische Thätigkeit der mannigfachsten Art, ein ausgedehnter Briefwechsel, in welchem kaum ein Gebiet menschlichen Denkens undurchsprochen blieb, staatsrechtliche Gutachten über fast alle Fragen der damals so bewegten grossen Politik, daneben persönliche Bestrebungen, denen zu Liebe Leibniz oft zwischen Hannover, Berlin, Wien unterwegs war, und die doch ebenso wie die um ihretwillen unternommenen Reisen geheim bleiben sollten, nahmen Zeit und Gedanken Leibnizens in fortwährend wechselnden Anspruch, worauf wir auch später hinzuweisen haben werden.

Seine Gönner sahen diese Zersplitterung mit wachsendem Unmuthe, und in Berlin beispielsweise gab man im December 1710 der Societät der Wissenschaften ohne Leibnizens Vorwissen einen neuen Direktor und den neuen Namen der *„Akademie der Wissenschaften“*, unter welchem sie am 19. Januar 1711 gleichsam neu gegründet wurde.

Als König Georg I. 1714 seine Residenz in London aufschlug, beabsichtigte Leibniz ihm dahin zu folgen, und diese Uebersiedelung hätte vermuthlich zur Klärung mancher Verhältnisse zu englischen Mathematikern beigetragen, allein sie wurde ihm gradezu untersagt, weil das Ministerium bezüglich der in Hannover und in England einzuhaltenden Politik seine Meinung nicht theilte, namentlich in dem Punkte nicht seiner Ansicht war, man müsse sich jeder Einmischung in englische Parteiverhältnisse von Hannover aus enthalten. Die letzten Jahre des so bewegten und inhaltreichen Lebens erhielten dadurch einen bitteren Geschmack, erhöht durch schwere körperliche Leiden. Als Leibniz am 14. November 1716 in Hannover starb, betheiligte sich an seinem Leichenbegängnisse weder der Hof noch die Geistlichkeit. In der Pariser Akademie, welcher Leibniz seit 1700 als Mitglied angehörte, wurde durch Fontenelle eine Lobrede auf ihn gehalten. Die Berliner Akademie schwieg den Mann todt, der sie ins Leben gerufen hatte, und erst viel später entschloss man sich zu der Sühne der noch jetzt üblichen alljährlichen Leibnizfeier.

Leibniz verlebte (S. 28) von December 1676 bis October 1687 elf Jahre ruhiger Geistesarbeit in Hannover. In dem dritten Jahre dieses Zeitabschnittes im August 1679 brachte er seine *Characteristica geometrica*[1]) zu Papier, die Arbeit, durch welche er dem gegenwärtigen Kapitel angehört. Charaktere nennt Leibniz Dinge, durch welche die gegenseitigen Beziehungen anderer Dinge dargestellt werden, während sie leichterer Behandlung als jene zugänglich sind[2]). So ist ein Modell Charakter einer Maschine, eine Zeichnung in der Ebene Charakter eines räumlichen Gebildes, ein Buchstabe Charakter einer unbestimmt gelassenen Zahl. Geometrisches durch Charaktere zu bezeichnen sei sehr wünschenswerth, damit unter Vermeidung des Gewirres vielliniger Figuren Sätze einfach an den Charakteren erwiesen werden könnten. Schon gewisse algebraische Grössenbeziehungen genügen unter Umständen. So bedeute $AB = BC = AC$, dass ABC ein gleichseitiges Dreieck sei. So sei in $AB + BC = AC$ der Satz enthalten, dass die drei Punkte A, B, C in gerader Linie liegen.

[1]) Leibniz V, 141—171. Vergl. Gerhardt, Math. Deutschl. 184—186.
[2]) Ebenda V, 141: *Characteres sunt res quaedam, quibus aliarum rerum inter se relationes exprimuntur, et quarum facilior est quam illarum tractatio.*

Aber das Bestreben müsse doch dahin sich richten, das Geometrische selbst zu charakterisiren, und dazu habe er wohl zehnmal den Anlauf genommen, bis er zu einer ihm genügenden von den ersten Grundbegriffen ausgehenden Auffassung gelangt sei.

Der Punkt ist das räumlich Meistbegrenzte und drückt einfach die Ruhelage im Raume aus[1]). Alle Punkte können zusammenfallen, sind congruent. Der Weg eines Punktes nach einem anderen heisst Linie. Er ist ein Stetiges, denn jeder Theil desselben hat Endpunkte, welche ihm mit einem vorhergehenden, mit einem folgenden Theile gemeinsam sind. Der Weg einer Linie, deren Punkte nicht immer der eine an die Stelle des anderen gelangen, ist eine Oberfläche, und der Weg einer Oberfläche, deren Punkte nicht immer der eine an die Stelle des anderen gelangen, ist ein Körper. Der Körper aber kann nicht bewegt werden, ohne dass alle seine Punkte immer einer an die Stelle des anderen gelangen, er bringt daher **keine neue Abmessung hervor**[2]).

Unter den Linien ist die Gerade besonders hervorzuheben. Ihr Begriff ist gleichzeitig mit dem der begrenzenden Punkte als einfachster Weg — *via simplissima* — vom einen zum anderen gegeben, aber die Entstehung der Geraden kann verschiedentlich gelehrt werden. Folgende Erzeugungsweise ist die einfachste: Die Gerade enthält alle Punkte, welche, während ein Körper um zwei feste unbewegliche Punkte in Bewegung versetzt wird, mit jenen beiden Punkten in Ruhe bleiben[3]). Als eine zweite Entstehung wird die derartige Spannung einer biegsamen Linie bezeichnet, dass sie nicht zu grösserer Länge ausgedehnt werden kann. Des Weiteren definirt Leibniz den Kreis, die Ebene[4]). Wird ein Linienzug ACB so in Bewegung gesetzt, dass seine Punkte A und B unbewegt bleiben, so beschreibt der Punkt C eine Kreislinie. Der Ort aller Punkte, die sich gleichmässig zu einem Punkte A wie zu einem anderen Punkte B verhalten, wird **Ebene** genannt.

Ein Punkt, der eine Linie durchläuft, kann $_yb$ genannt werden, wobei der links angebrachte Stellenzeiger y, der aber bei Leibniz noch durch keinen Kunstausdruck wie Index oder dergleichen benannt

[1]) Leibniz V, 144: *Punctum exprimit id quod in extensione maxime limitatum est, nempe simplicem situm.* [2]) Ebenda 145: *Via lineae eiusmodi, ut puncta eius non semper sibi invicem succedant, Superficies est; et via superficiei, ut puncta eius non semper sibi invicem succedant est Corpus. Corpus autem moveri non potest, quin omnia eius puncta sibi succedant, et ideo novam dimensionem non producit.* [3]) Ebenda 147: *Sit corpus aliquod, cuius duo puncta sint immota et fixa, ipsum autem corpus nihilominus moveatur, tunc omnia puncta corporis quiescentia incident in rectam, quae per duo puncta fixa transit.* [4]) Ebenda 165.

wird, die verschiedensten Zahlenwerthe annimmt. Die ganze Linie heisst alsdann ${}_{\bar y}b$, indem der Stellenzeiger mit einem ihn deckenden wagrechten Strichelchen versehen wird. Wird die Linie so bewegt, dass der frühere Punkt ${}_{y}b$ nach ${}_{z}b$ gelangt, so entsteht eine Oberfläche ${}_{z\bar y}b$. Die gleiche Oberfläche muss als ${}_{\bar z\bar y}b$ entstehen, wenn durch Rückwärtsbewegung der Linie jeder ihrer Punkte ${}_{z}b$ nach ${}_{y}b$ gelangt. Man erkennt leicht in ${}_{\bar x\bar y\bar z}b$ einen Körper, welcher durch die soeben beschriebene Oberfläche erzeugt wird.

Leibniz führt nun einige neue geometrische Zeichen ein. ∞ (das Gleichheitszeichen von Descartes Bd. II, S. 724) bedeutet das Zusammenfallen oder Identischsein[1]). Dasselbe Zeichen aufwärts gestellt ≀ bedeutet Congruenz oder die Möglichkeit durch Bewegung zum Zusammenfallen gebracht werden zu können. Allerdings hat er mit beiden Zeichen auch gewechselt. Congruenz wird mitunter durch $\sim$, Coincidenz (also Identität) durch $\simeq$ dargestellt[2]), und in einem Aufsatze *Mathesis universalis*, welcher undatirt unter dem Leibnizischen Nachlasse sich vorfand, heisst das links geschlossene ∞ (das Unendlichkeitszeichen von Wallis Bd. II, S. 748) Zeichen der Identität[3]). Kehren wir zu den im August 1679 benutzten Zeichen zurück, so ist $\sim$ (ein liegendes *s* als Anfangsbuchstabe von similis) Zeichen der Aehnlichkeit. Aehnlich aber ist, was einzeln für sich betrachtet nicht unterschieden werden kann[4]); betrachtet man dagegen Aehnliches gemeinsam, so erscheint sofort ein Unterschied, das Grössersein des einen. Gleichheitszeichen ist ⊓.

Geometrisch richtig darf man folgende Schlüsse ziehen: Wenn $a \wr e$, $b \wr f$, $c \wr g$, $d \wr h$, so ist $a + b - c + d \sqcap e + f - g + h$. Wenn $a \sim b$ und $a \sqcap b$, so ist $a \wr b$. Wenn $a \infty b$, so ist $a \wr b$, $a \sqcap b$ und $a \sim b$. Wenn ferner a, b und b, c durch eines der Zeichen $\infty, \wr, \sim, \sqcap$ verbunden sind, so darf dasselbe Zeichen zwischen a, c gesetzt werden. Dagegen darf nicht geschlossen werden, dass, wenn a nicht $\infty\, b$ und b nicht $\infty\, c$, auch a nicht $\infty\, c$ sei. Bei Coincidenzen ist Addition gestattet, bei Congruenzen nicht. Aus $a \infty c$ und $b \infty d$ folgt $a \cdot b \infty c \cdot d$; aber obwohl $A \wr C$, $B \wr D$, wenn A, B, C, D Punkte bedeuten, weil je zwei beliebige Punkte congruent sind, folgt doch nicht $A \cdot B \wr C \cdot D$. Gestattet dagegen ist $A \cdot B \wr D \cdot E$, $B \cdot C \wr E \cdot F$, $A . C \wr D \cdot F$ zu $A \cdot B \cdot C \wr D \cdot E \cdot F$ zu vereinigen.

Leibniz war von diesen Gedanken so erfüllt, dass er schon am 8. September 1679 an Huygens darüber schrieb[5]). Ich bin, sagte

[1]) Leibniz V, 150: *atque ita eadem esse sive coincidere dicentur.* [2]) Ebenda 185. [3]) Ebenda VII, 57: *Nota coincidentiae seu identitatis.* [4]) Ebenda V, 153: *Similia sunt quae singula per se considerata discerni non possunt.* [5]) Ebenda I, 19.

er, mit der Algebra noch nicht zufrieden, weil sie weder die kürzesten Wege der Geometrie einschlägt, noch deren schönste Constructionen kennen lehrt. Ich glaube daher, man bedürfe einer besonderen geometrischen Analysis, welche uns unmittelbar den *situs* ausdrückt, wie die Algebra die *magnitudo*.

Darauf erläuterte er in einer Beilage[1]) jene Begriffe, von denen eben die Rede war, und bewies mit deren Hilfe den Satz, dass die Kugel durch eine Ebene in einer Kreislinie geschnitten wird. Jeder Kugelpunkt *Y* ist mit dem Kugelmittelpunkte *A* durch eine Gerade *AY* verbunden, welche mit einer bestimmten *AC* zur Deckung gebracht werden kann, oder *AC* ɣ *AY* ist der Ausdruck für eine Kugel. Der Ausdruck für eine Ebene ist, vermöge deren Definition (S. 32), *AY* ɣ *BY*, mithin auch *AC* ɣ *BC*, vorausgesetzt, dass *C* ein Punkt der Ebene sein soll. Aus *BC* ɣ *AC* und *AC* ɣ *AY* nebst *AY* ɣ *BY*, folgt *BC* ɣ *BY*. Addirt man zu diesem *BC* ɣ *BY* das früher bekannte *AC* ɣ *AY* und das selbstverständliche *AB* ɣ *AB*, so entsteht *ABC* ɣ *ABY*. Letzteres ist aber der der Definition (S. 32) entsprechende Ausdruck für eine Kreislinie, und somit ist der ausgesprochene Satz bewiesen.

Huygens antwortete am 20. November in wenig ermuthigender Weise[2]), er glaube nicht, dass auf die neue Charakteristik grosse Hoffnungen zu gründen seien. Es ist wohl anzunehmen, dass dieses abfällige Urtheil eines Mannes, den Leibniz ungemein hoch stellte, die Schuld trug, dass Jener mit seinen für die damalige Zeit allerdings durchaus neuen Gedanken nicht an die Oeffentlichkeit trat, dass er auch in seinen handschriftlichen Privatnotizen nicht weit über das an Huygens Mitgetheilte hinausging. Insbesondere hat sich kein Versuch Leibnizens erhalten, auch die Aehnlichkeit und die Bewegung neben der Congruenz in den Beweisen zur Geltung zu bringen, was ursprünglich in seiner Absicht lag[3]).

An die Schriften über Geometrie schlossen wir in früheren Abschnitten solche an, welche in der Geometrie zu benutzende Vorrichtungen kennen lehrten. Wir haben gegenwärtig nur einen solchen Schriftsteller allenfalls zu nennen: Michael Scheffelt[4]) aus Ulm (1682—1720), welcher einen Messstab erfand, der den Neperschen Rechenstäben (Bd. II, S. 660) nachgebildet das Rechnen mit geometrischen Grössen auf ein Ablesen zurückführte. Die erste Ver-

[1]) Leibniz I, 22—25. [2]) Ebenda I, 27. [3]) Ebenda V, 172: *Nunc autem ad explicandam rem situs non nisi congruentia utemur, sepositis in alium locum similitudine et motu.* [4]) Weyermann, Nachrichten von Gelehrten, Künstlern und anderen merkwürdigen Personen aus Ulm (Ulm, 1798), S. 462—463.

öffentlichung ist von 1697. Ihr folgten vier weitere Auflagen bis 1732, ein Beweis, dass man damals die Erfindung schätzte.

Noch älter ist eine Vorrichtung, von welcher wir vielleicht zweckmässiger im folgenden Kapitel sprächen, weil sie dem Rechnen diente, welche wir indessen ihres mechanischen Wesens wegen hier nennen. Wir meinen die Rechenmaschine von Leibniz. Wir wissen (Bd. II, S. 661), dass Leibniz in Paris die von Pascal erfundene Rechenmaschine sah und schätzte. Dieses hinderte aber nicht, dass er einige Unvollkommenheiten derselben bemerkte, gegen welche er Abhilfe suchte. Schon 1673 während des ersten Londoner Aufenthaltes zeigte Leibniz seine Einrichtung der Königlichen Gesellschaft dort vor[1]), und als er weitere Verbesserungen angebracht hatte, fand er auch bei der Pariser Akademie Beifall. Die Beschreibung der Leibnizischen Maschine wurde allerdings erst wesentlich später 1710 in den Druckschriften der Berliner Akademie unter dem Titel *Brevis descriptio machinae arithmeticae*[2]) veröffentlicht. Vollkommen war freilich auch diese Vorrichtung noch nicht, wiewohl Leibniz bei den immer erneuerten Versuchen der Verbesserung grosse Summen — man erzählt von 24000 Thalern — nach und nach aufgewandt hatte.

84. Kapitel.

Rechenkunst. Combinatorik. Leibrenten.

Die hervorragenderen Schriftsteller haben im letzten Drittel des XVII. Jahrh. nachgrade aufgehört, ihre Kräfte dem elementaren Rechnen zu widmen. Was an Büchern darüber in den verschiedenen Ländern gedruckt wurde, war höchstens mittelgut, und nur ganz vereinzelte mögen wegen der weiten Verbreitung, welche sie besassen, genannt werden.

Tobias Beutel[3]) verfasste ein Lehrbuch: *Chursächsischer Cedernwald, eine Arithmetik oder sehr nützliche Rechenkunst*, welches seit der Mitte bis zum Ende des XVII. Jahrh. achtmal aufgelegt wurde. Die Regeln sind in Reime gefasst, damit sie um so leichter erlernt werden konnten. Darauf beruhte gewiss wenigstens zum Theil die vielfache Anwendung des Lehrbuches, welche zum Beispiele in dem Lehr-

[1]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch II, 741—742 unter „Instrumentale Arithmetik". Vergl. auch Leibniz I, 33 einen Brief Leibnizens an Oldenburg vom 8. März 1673: *In instrumento meo arithmetico laboratur strenue;* ferner Leibniz III, 72 Anmerkung und Gerhardt, Math. Deutschl. S. 141. [2]) Miscellan. Berolin. T. I. [3]) Unger, Die Methoden der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung, S. 75, 124—125.

plane der Franckeschen Stiftungsschule in Halle von 1702 anbefohlen ist[1]).

François Barrême[2]), ein Rechenmeister zu Paris, veröffentlichte 1677 *L'Arithmétique ou le livre facile pour apprendre l'arithmétique soi même*, welche zahlreiche Auflagen nöthig machte und noch heute ein sprichwörtliches Nachleben in Frankreich führt, wo man bei einfachsten Rechnungsergebnissen sehr häufig Barrême als scherzhafte Beglaubigung anführt, ähnlich wie in Deutschland Adam Riese.

Ein Schriftsteller von vermeintlicher erfinderischer Kraft auf elementarem Gebiete war Erhard Weigel[3]) (1625—1699), der zu Weiden in der Oberpfalz geboren in Halle zum Studium sich vorbereitet hat und dort dem weit und breit bekannten Astrologen Schimpfer als Schreiber diente. Weigel, der, seit er mit elf Jahren seinen Vater verloren, auf sich selbst angewiesen war und schon in diesem zarten Alter fast gleichaltrige Kinder im Schreiben und Rechnen zu unterrichten pflegte, kam in Halle mit Studirenden aus Leipzig in Berührung, welche nicht selten dorthin reisten, um sich eben von Schimpfer ihre Nativität stellen zu lassen. Ihr Zureden bewog Weigel, sich ebenfalls zur Leipziger Hochschule zu wenden, wo er 1650 die Würde eines Magisters der Philosophie erwarb. Unter seine dortigen Gönner zählte ein Oberst Titel, Festungshauptmann der Pleissenburg, vielleicht ein naher Verwandter jenes Basilius Titel (S. 20), der 1682 dieselbe Stellung einnahm und Mitarbeiter an den A. E. war. Im Jahre 1653 starb der Jenaer Professor der Mathematik Heinrich Hofmann, und Weigel wurde zu seiner Nachfolge berufen, eine Stellung, in welcher er bis zu seinem Tode, mithin 46 Jahre hindurch, verblieb. Eine als *Astrognostisch-heraldisches Collegium* von ihm angekündigte Vorlesung zog mehr als 400 Zuhörer an, so dass er keinen genügenden Hörsaal finden konnte und vor der Stadt im Freien seine Vorträge halten musste. Den Gegenstand bildete wahrscheinlich der Europäische Wappenhimmel, d. h. die Ersetzung der altheidnischen Sternbilder durch die Wappen der Europäischen Staaten. Weigels Mathematik kann als Beispiel der Bedürfnisslosigkeit gelten, welche damals die ausnahmslose Regel an deutschen Universitäten bildete. Die Schriften von Descartes hat er niemals studirt, er würde sie auch nicht verstanden haben. Bildete er sich doch nicht wenig auf seine Erfindung des *divisor vicinus*, d. h. auf die Erfindung

[1]) Unger, Die Methoden der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung, S. 140. [2]) Poggendorff I, 105. [3]) Erhard Weigel. Ein Beitrag zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften auf den deutschen Universitäten im 17. Jahrhundert von Dr. Bartholomaei (Zeitschr. Math. Phys. XIII, Supplem. S. 1—44). Edm. Spiess, Erhard Weigel (Leipzig, 1881).

einer Regel ein, die durch die Formel

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{a - \frac{a}{b}(b-c)}{b-c}$$

dargestellt ist. So ist z. B. 998 = 1000 — 2 und demnach

$$\frac{a}{998} = \frac{a}{1000} + \frac{a - \frac{a}{1000} \cdot 998}{998}.$$

Als sein Hauptwerk betrachtete er vollends seine *Tetractys*, welche er in drei verschiedenen Schriften der Gelehrtenwelt empfahl, insbesondere in einer Schrift[1]) von 1673. Tetractys ist das Zahlensystem mit der Grundzahl 4, welches Weigel dem mit der Grundzahl 10 weit vorziehen zu müssen glaubte. Viertheilung sei das Natürliche und Nächstliegende, während die Zehnzahl ein künstlich Gemachtes sei. Einige Namen müssten zur volksthümlichen Einführung des Vierersystems allerdings neu erfunden werden, und Weigel schlägt daher mitten im lateinischen Texte derartige deutsche Namen vor. Sie lauten *Secht* statt viermal vier und *Schock* statt viermal viermal vier. Später ersetzte Weigel auch das Wort vier durch eine Neubildung *Erff*, wodurch die Zusammensetzungen und Zusammenziehungen *Zwerff* und *Dreff* für zweimal, beziehungsweise dreimal vier sich herstellen liessen. Noch 1690 ging Weigel mit dem Gedanken um, nach London zu reisen, um der dortigen Königlichen Gesellschaft seinen Divisor vicinus, seine Tetractys und verschiedene technische Erfindungen mit Ausschluss einer Schnellpresse, welche er nicht zu veröffentlichen beabsichtigte, um die Buchdrucker nicht um Arbeit und Brod zu bringen, vorzulegen. Der dazu erbetene Urlaub wurde ihm jedoch glücklicherweise verweigert, und so unterblieb der Versuch, der in einer Zeit, in welcher die fruchtbarsten Entdeckungen im Gebiete der höheren Mathematik an der Tagesordnung waren, Weigel nur hätte lächerlich machen können. Wir mussten grade wegen der Unbedeutendheit des Mannes bei ihm verweilen, denn, wie wir schon sagten, er gibt uns den Maassstab für die damals an deutschen Universitäten gelehrte Mathematik. Und dieser Mann war Leibnizens Lehrer (S. 27)?

Es bedürfte kaum der ausführlicheren Darstellung, welche Leibniz zum Schlusse eines im April 1703 an Jakob Bernoulli gerichteten Briefes von seinem Studiengange gab, um die sichere Ueberzeugung zu

[1]) Erhardi Weigelii, *Artium Architectonicarum Supremi Directoris et Prof. Publ. Tetractys, summum tum Arithmeticae tum Philosophiae discursivae compendium, artis magnae sciendi genuina radix.* Jenae MDCLXXIII. [2]) Leibniz III, 71—72.

hegen, er müsse wesentlich sich selbst Lehrer gewesen sein. „Als ich," heisst es in der Nachschrift zu jenem Briefe, welche beim wirklichen Ausfertigen desselben unterdrückt wurde und erst aus dem Leibnizischen Nachlasse bekannt geworden ist, „im Jahre 1672 nach Paris kam, war ich Autodidakt in der Geometrie, aber als solcher wenig durchgebildet[1]. Mir fehlte die Geduld, durch lange Reihen von Beweisen hindurchzueilen. Ich hatte als Knabe eine für Kinder geeignete Algebra eines gewissen Lanzius[2], dann die des Clavius zu Rathe gezogen, die des Cartesius schien mir zu verwickelt." Wir bemerken hierzu, dass unter jener Kinderalgebra wahrscheinlich die *Institutiones arithmeticae* gemeint sind, welche der Ingolstadter Professor Johann Lantz[3] 1616 und 1619 in München herausgab. Etwas weiter unten heisst es in jener Nachschrift dann weiter: „In dieser, ich hätte beinahe gesagt stolzen Unwissenheit in der Mathematik zog ich Geschichte und Rechtswissenschaft in Erwägung, dass ich ihrem Studium mich widmete."

Und in dieser stolzen Unwissenheit, möchten wir, Leibnizens Worte wiederholend, fortfahren, schrieb er 1666 seine *Dissertatio de arte combinatoria*[4], fasste er nur kurze Zeit darauf den (S. 35) bereits zur Rede gebrachten Gedanken einer *Rechenmaschine.*

Combinatorische Betrachtungen waren nichts weniger als neu. Bei Tartaglia, bei Cardano, bei Buteo, am ausführlichsten bei Pascal (Bd. II, S. 480, 489, 517, 691), in dessen 1665 durch den Buchhandel verbreiteten *Traité du triangle arithmétique* hätte Leibniz sehen können, wie weit man ihm zuvorgekommen war. Aber einestheils waren ihm jene Quellen selbst unbekannt, soweit ihr Inhalt nicht in Schwenters Erquickstunden (Aufgabe 32 und 33 des I. Buches dieser in Deutschland damals sehr verbreiteten Sammlung) übergegangen war, anderntheils war der Ausgangspunkt und noch mehr der letzte Zielpunkt Leibnizens ganz anderer Natur als bei seinen Vorgängern. Bei jenen handelte es sich um kleine mathematische Scherze, wenn wir dieses Ausdrucks uns bedienen dürfen, welche bei Cardano Anklänge an Wahrscheinlichkeitsrechnung erkennen lassen, bei Pascal erst zu höherer mathematischer Bedeutung sich erheben. Leibniz war der Zeitfolge und vielleicht auch der Geistesrichtung nach erst Philosoph und dann Mathematiker. Schon seit 1663 sind in seinem Kopfe die Keime einer *Scientia generalis* vorhanden gewesen[5], einer allgemeinen Wissenschaftslehre, welche alle Einzel-

[1]) *Eram ego Geometra autodidactus, sed parum subactus.* [2]) *Algebram Lanzii cuiusdam puerilem.* [3]) Poggendorff I, 1374. [4]) Leibniz V, 7—79. [5]) Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz herausgegeben von C. J. Gerhardt VII, 12 lin. 3 v. u.: *Rem enim iam a decimo octavo aetatis*

wissenschaften als Unterabtheilungen oder Anwendungen in sich fassen sollte. Der allgemeinen Wissenschaft sollte auch eine allgemeine Sprache, *Lingua rationalis*, zur Verfügung stehen, welche dem Gedanken sich so genau anzupassen hätte, dass sie als *filum meditandi*, als Leitfaden des Denkprozesses, zu dienen im Stande sei, ja dass die Schrift, ohne welche die Sprache der Mittheilbarkeit ausser in engsten Kreisen entbehren würde, die gleiche Eigenschaft der Gedankenhilfe besitze. Auch in dieser Richtung war Leibniz nicht ohne Vorgänger. Er war nicht der erste, welcher die Möglichkeit einer Weltschrift wenigstens ins Auge fasste, mit welcher allerdings eine Weltsprache noch nicht gegeben wäre. Die chinesische Schrift wird thatsächlich von verschiedenen Völkern, von jedem in seiner Sprache, gelesen und ermöglicht zwischen ihnen schriftlichen Verkehr, während sie einander mündlich nicht verstehen. Und auch in Europa waren seit 1661 Versuche in die Oeffentlichkeit getreten[1]).

John Wilkins (1614—1672), einer der Gründer der Royal Society in London, Prediger daselbst und von 1668 an Bischof von Chester, gab 1641 eine Schrift heraus, welche den Titel führte: *Mercury, or the secret and swift Messenger: shewing how a Man may with Privacy and Spead communicate his Thoughts to a Friend at a Distance*, und in ihr versuchte er die Begriffe zu ordnen und in ein System zu bringen, um durch gewisse Zeichen, welche ebenfalls einem Systeme angehören sollten, alle überhaupt möglichen Begriffe augenfällig zu machen. Ein zweiter Engländer, George Dalgarno, führte den Gedanken weiter aus und gab ihm 1661 in seiner *Ars signorum, vulgo character universalis et lingua philosophica* praktische Gestaltung. Er bildete 17 Grundbegriffe, welche er durch einfache Buchstaben des lateinischen und des griechischen Alphabetes (von letzterem nur η und ν) darzustellen vorschlug und glaubte damit auszukommen. Nach ihm wandte Wilkins sich abermals dem vorher schon bearbeiteten Gegenstande zu und veröffentlichte 1668 den *Essay towards a Real Character and a Philosophical Language, with a alphabetical Dictionary*. Noch späteren Datums dürfte der Versuch von P. Labbe sein, von dem Leibniz 1709 erzählt[2]), er habe *die Lateinische mittelst einiger Veränderungen zur allgemeinen Sprach machen wollen.*

Als Leibniz 1663 zuerst den Plan fasste, eine Scientia generalis zu erfinden, war demnach die erste Schrift von Wilkins und die von Dalgarno vorhanden, aber ob irgend Jemand auf dem Festlande von

anno agitari et quotidianis experimentis in instituto sum confirmatus, tametsi rudia satis prima cogitata essent.

[1]) Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz herausgegeben von C. J. Gerhardt VII, 6—9. [2]) Ebenda VII, 36 lin 12 v. u.

Europa sie damals schon gesehen hatte, ist mindestens als zweifelhaft zu bezeichnen; von dem jungen deutschen Kandidaten vollends kann mit an Gewissheit grenzender Wahrscheinlichkeit behauptet werden, er habe keine Gelegenheit gehabt, jene Schriften auch nur dem Namen nach kennen zu lernen.

Später freilich wurde das anders. Leibniz hat Dalgarnos Werk besessen und, wie er es mit den meisten Büchern machte, die in seinem Nachlasse aufgefunden worden sind, mit Randnoten versehen[1]). Er vereinigt in seinen Bemerkungen Lob mit Tadel. Er meint, Dalgarnos Methode und ebenso das, was Wilkins daraus machte, liefere einen leichten Verkehr zwischen Personen von verschiedener Sprache, aber sie sei darum doch keine *Characteristica Realis*, wie er sie zu bilden beabsichtige. Diese müsse beim Erfinden, beim Behalten, beim Beurtheilen eine unüberwindliche Kraft entwickeln. Sie müsse gleichviel bei welchem Denkstoffe das zuwege bringen, was arithmetische und algebraische Symbole in der Mathematik leisten.

Leider hat Leibniz nie und nirgend genau dargelegt, wie seine grossartigen Absichten zur Verwirklichung kommen können. Er hat die Zerlegung von Begriffen auf der einen Seite, die Vereinigung von Begriffen auf der anderen Seite zum Gegenstande von Arbeiten gemacht. Er hat die Wichtigkeit der Erzielung von Vollständigkeit in der Bildung von Verbindungen erkannt. Er hat auch mathematische Symbole unter wenig veränderter Gestalt, wie z. B. ein eingeringeltes Pluszeichen, für logische Operationen angewandt, deren Verwandtschaft mit solchen der Arithmetik ihm einleuchtete. Aber die deutliche Auseinandersetzung, er verstehe das und das unter dem Namen der Characteristica Realis, hat er niemals gegeben.

Wir haben (S. 31—34) von Leibnizens Characteristica geometrica gesprochen. Wir erkennen jetzt, dass jene Abhandlung von 1679 einen Theil jener Absichten erfüllen sollte, welche für die Characteristica realis den eigentlichen Gegenstand zu bilden bestimmt waren, dass sie vermuthlich im Nachsinnen über die allgemeinere Aufgabe entstand. Dem Leserkreise unseres Werkes gegenüber dürfen wir ferner uns gestatten, hier schon vorgreifend Dinge zu erwähnen, welche eigentlich erst im 89. Kapitel zur Rede kommen, und zu bemerken, dass die Zerlegung der Begriffe in Elementartheile mathematisch zum Differential führen musste. Das gleiche Bestreben verliess Leibniz ebenso wenig bei seinen eigentlich philosophischen Untersuchungen. Ohne dieselben in Erörterung ziehen zu dürfen, erlauben wir uns

[1]) Die philosophischen Schriften von Leibniz herausgegeben von C. J. Gerhardt VII, 7.

den Namen der Monade zu erwähnen, der 1698 zuerst[1]) bei Leibniz vorkommt.

In der Abhandlung von 1666, zu deren eigentlichen Besprechung wir jetzt erst gelangen, hat Leibniz denjenigen Theil seines grossen Planes in Angriff genommen, der in der Erzielung von Vollständigkeit der Anzahl möglicher Begriffsverbindungen besteht, und er hat der mathematischen Auffassung dieser Aufgabe den Namen der *Ars combinatoria* beigelegt, der ihr bleiben sollte. Sowohl die Versetzungen (Permutationen), als die Verbindungen (Combinationen des heutigen Sprachgebrauches) werden betrachtet[2]). Die Anzahl der vorkommenden Elemente heisst *numerus*, die Permutationen werden *variationes*, die Combinationen *complexiones* genannt, und *exponens* ist die Klasse, zu welcher combinirt wird. Der Exponent wird auch zur Bildung von Wörtern benutzt, aus welchen man die Klasse heraushört, Wörter, die freilich schon ein altes Gepräge tragen. *Combinatio* für Verbindung zu Zweien kommt bei vielen römischen Schriftstellern vor, *conternatio* für Verbindung zu Dreien bei Hyginus. Neu ist bei Leibniz die Schreibweise, beziehungsweise der Druck in Gestalt von *com 2 natio* und *con 3 natio*. Leibniz gibt einige Lehrsätze über Permutationszahlen[3]), welche, wenn die Permutationszahl für n unter einander verschiedene Elemente d. h. also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = P_n$ gesetzt wird, und wenn man den Begriff und die Bezeichnung der Congruenz der heutigen Zahlentheorie entnimmt, in folgender Gestalt auftreten:

$$P_{n(n>1)} \equiv 0 \pmod{2} \qquad P_{n(n>4)} \equiv 0 \pmod{10}$$

$$\sum_{1}^{n} P_h \equiv 1 \pmod{2} \qquad \sum_{1}^{n>3} P_h \equiv 3 \pmod{10}$$

$$P_n \equiv 0 \pmod{P_{h(h<n)}} \qquad 2P_n - (n-1)P_{n-1} = P_n + P_{n-1}$$

$$\frac{P_n^2}{P_{n-1}} = P_{n+1} - P_n.$$

Die Zahlen $\frac{P_n}{1}, \frac{P_n}{2}, \cdots \frac{P_n}{n}$ bilden eine ganzzahlige harmonische Reihe. Die Permutationszahl bei theilweise wiederholt vorkommenden Elementen ist auffallenderweise unrichtig angegeben[4]): um die Permutationszahl der Töne ut, ut, re, mi, fa, sol anzugeben, bildet nämlich Leibniz nicht $\frac{P_6}{P_2} = \frac{720}{2} = 360$ sondern

$$P_6 - P_5 = 720 - 120 = 600.$$

---

[1]) Die philosophischen Schriften von Leibniz herausgegeben von C. J. Gerhardt IV, 511 lin. 20. [2]) Leibniz V, 14. [3]) Ebenda 62. [4]) Ebenda 68.

Richtig dagegen ist mit P_{n-1} die Anzahl derartiger Versetzungen von n Elementen angegeben, welche bei cyklischer Schreibart als verschieden sich ergeben[1]); hier gelten beispielsweise *abcd, bcda, cdab, dabc* als nur eine Versetzung, wenn sie im Kreise angeschrieben sind[2]). Das wäre etwa das mathematisch Bemerkenswerthe aus der Abhandlung. Einzelne Beispiele sind für den philosophischen Zweck des Verfassers kennzeichnend, und man findet auch die Erwähnung[3]) der *Logica inventiva* und der *Scriptura universalis.*

Im Jahre 1680 leiteten der Scientia generalis zugewandte Ueberlegungen Leibniz abermals auf das Gebiet der mit Zahlentheorie verknüpften Combinatorik, auf die Zerlegung von Zahlen in ihre Primfaktoren[4]). Vielleicht stammt aus jener Zeit die undatirt erhaltene Abhandlung *De primitivis et divisoribus ex tabula combinatoria*[5]), in welcher die Theilbarkeit von $(a+1)(a+2)\cdots(a+n)$ durch $1\cdot 2\cdots n$ bei ganzzahligem a bewiesen ist.

Die Ars combinatoria von 1666 wurde ohne Leibnizens Wissen 1690 in Frankfurt a. M. nachgedruckt, wogegen sich Leibniz in den A. E. von 1691 beschwerte[6]). Es sei ein Unrecht, dass der Drucker nicht erklärt habe, es handle sich nur um eine neu aufgelegte Jugendarbeit, denn gegenwärtig habe man das Recht, Anderes und Gereifteres von ihm zu verlangen als zur Zeit, da er seine Erstlingsschrift veröffentlichte. Einige Zahlenrechnungen seien vollständiger zu vollziehen und genauer zu beweisen als es damals geschehen sei. Auch auf einen 1666 vorgekommenen Irrthum weist die Verwahrung von 1691 hin, der aber nicht jene Ermittelung der Versetzungszahl bei theilweise einander gleichen Elementen betrifft, von der (S. 41) die Rede war. Jenen Irrthum scheint also Leibniz 1691 entweder übersehen oder nicht als Irrthum erkannt zu haben.

Die Combinatorik leitet über zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir haben hier zunächst eine schon (Bd. II, S. 694) erwähnte Schrift von Jan de Witt zu besprechen, dessen *Waerdye van lyfrenten nar proportie van los-renten* (Werth von lebenslänglichen Renten im Verhältnisse zu gewöhnlichen Renten) von 1671, eine Abhandlung, welche ursprünglich nur in dreissig Exemplaren gedruckt war, von denen durch einen glücklichen Zufall eines aufgefunden wurde, nach welchem 1879 ein Neudruck hergestellt werden konnte[7]). In Holland

[1]) Leibniz V, 67: *Dato numero rerum variationem situs mere relati seu vicinitatis invenire.* [2]) *velut in circulo scripta.* [3]) Ebenda 49. [4]) Die philosophischen Schriften von Leibniz herausgegeben von C. J. Gerhardt VII, 18 lin. 8. [5]) Leibniz VII, 101—113. [6]) Die philosophischen Schriften von Leibniz herausgeg. von C. J. Gerhardt IV, 163—164. [7]) H. Bierens de Haan, der glückliche Auffinder des Originals, hat den Neudruck bei Gelegenheit des

fingen grade damals die Rentenversicherungen auf Lebensdauer an volksthümlich zu werden, und De Witt suchte sie weiter zu empfehlen. Er fühlte, dass dazu eine Berechnung des Baarwerthes einer solchen Rente auf Lebensdauer am geeignetsten sei, und er gab diese Berechnung unter Benutzung einer vierprozentigen Verzinsung, welche demnach damals die in Holland die Regel bildende gewesen sein muss. Zweierlei ist, was dabei hervorgehoben zu werden verdient: die Art der Rabattirung künftig fälliger Rentenzahlungen auf die Gegenwart und die Berücksichtigung der Sterblichkeit.

In ersterer Beziehung hat De Witt zwei Rechner T. Bellechiere und Jacob Lense benutzt, beide Buchhalter der Staaten von Holland und Westfriesland, die jeder für sich eine durch die Uebereinstimmung der Ergebnisse in ihrer Richtigkeit gewährleistete Tabelle berechneten. Wie sie die Rechnung vollzogen, ist nicht gesagt. Da indessen die Tabelle 9 805 807 als den Baarwerth von nach einem halben Jahre zahlbaren 10 000 000 angibt und $9\,805\,807 = \frac{10\,000\,000}{\sqrt{1,04}}$ ist, so ist kein Zweifel, dass zur Rabattirung einer nach n Jahren fälligen Zahlung K auf die Gegenwart die Formel $\frac{K}{1,04^n}$ angewandt wurde, mochte n ganzzahlig oder gebrochen sein, und die übrigen Zahlen der Tabelle sind gleichfalls Zeugnisse für die Benutzung dieser Formel.

Was den Einfluss der Sterblichkeit betrifft, so wird angenommen, dass während der vollen Kraft des menschlichen Lebens, für welche als Geltungsdauer die ganze Zeit vom 4. bis zum vollendeten 53. Lebensjahre vorausgesetzt ist, es gleich wahrscheinlich sei, dass ein Mensch im unmittelbar folgenden Jahre am Leben bleibe oder sterbe, und wenn er sterbe, ob im ersten oder im zweiten Halbjahre. Es wird weiter angenommen, die Wahrscheinlichkeit des Sterbens überwiege nach Zurücklegung des 53. Lebensjahres und verhalte sich zwischen 54 und 64 Jahren zu der früheren hälftigen Todesandrohung wie 3 : 2. Dieses Verhältniss steigere sich zwischen 64 und 74 Jahren auf 2 : 1, zwischen 74 und 81 Jahren auf 3 : 1. Nach 81 Jahren dürfe man rechnungsmässig die ganze Menschheit als abgestorben betrachten, wenn auch thatsächlich da und dort einzelne dieses Alter und sogar nicht unbeträchtlich überschreiten.

Von diesen Grundlagen aus, deren Rechtfertigung nicht versucht wird, sondern die als einfache Voraussetzungen ausgesprochen sind, schliesst De Witt nun weiter. Ein Leibrente von 10 000 000 Stüber

100 jährigen Stiftungsfestes einer Amsterdamer mathematischen Gesellschaft, welche meistens nach ihrem Wahrspruche: *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven* benannt wird, veranstaltet.

im halben Jahre (1 Stüber ist der zwanzigste Theil eines Guldens, die Rente beträgt darnach eine Million Gulden im Jahre) sei einem eben in die Zeit voller Lebenskraft eingetretenen 3 jährigen Kinde zugesichert, so dass sie am Ende jedes halben Jahres zur Auszahlung gelangen soll. Der Tod des Kindes kann eintreten im 1., im 2., im 3., im 100. Halbjahre nach dem Beginne der Versicherung. Stirbt das Kind im 1. Halbjahre, so kommt die Rente überhaupt nicht zur Auszahlung und ihr Baarwerth ist 0. Stirbt das Kind im 2. Halbjahre, so hat es einmal die Rente bezogen, und deren Baarwerth ist $\frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{1}{2}}} = 9\,805\,807$. Stirbt das Kind im 3. Halbjahre, so kam die Rente sowohl am Schlusse des 1., als am Schlusse des 2. Halbjahres zur Auszahlung und der Baarwerth ist

$$\frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{1}{2}}} + \frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{2}{2}}} = 19\,421\,192.$$

Genau in der gleichen Weise wird der Baarwerth sämmtlicher Rentenzahlungen gerechnet, wenn der Empfangsberechtigte im 4., 5. . . . 100. Halbjahre stirbt, die Rente mithin 3, 4 . . . 99 mal bezog. Im letztgenannten Falle ist der Baarwerth

$$\frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{1}{2}}} + \frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{2}{2}}} + \cdots + \frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{99}{2}}} = 432\,490\,825.$$

Die Gesammtsumme aller Baarwerthe bis dahin, welche durch einfache Addition vereinigt werden, weil die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens irgend eines dieser Fälle als gleich gilt, ist

$$0 + 9\,805\,807 + 19\,421\,192 + \cdots + 432\,490\,825 = 28\,151\,475\,578.$$

Soll der Baarwerth der Renten berechnet werden, sofern der Tod im 101. Halbjahre eintritt, so kommt zu dem vorhergewonnenen 432 490 825 noch $\frac{10\,000\,000}{1{,}04^{\frac{100}{2}}} = 1\,407\,126$ hinzu, er wird demnach 433 897 951. So kann man fortfahren bis zum Baarwerthe 455 999 472 der Renteneinnahmen dessen, der erst im 120. Halbjahre stirbt, und die Summe dieser gesammten aus 20 Zahlen bestehenden Gruppe ist

$$433\,897\,951 + \cdots + 455\,999\,472 = 8\,911\,946\,713.$$

Allein nun trat die erhöhte Sterblichkeit ein. Von Rechts wegen musste, weil die Sterblichkeit im Verhältnisse von 3 : 2 zunahm, jeder Baarwerth im Verhältnisse von 2 : 3 herabgemindert werden, und nimmt man zur bequemeren Rechnung die Vervielfachung mit $\frac{2}{3}$ nur einmal bei der Gesammtsumme vor, so gewinnt man

$$\frac{2}{3} \cdot 8\,911\,946\,713 = 5\,941\,297\,809.$$

Eine weitere Gruppe von 20 Einzelbaarbeträgen wird nach ihrer Vereinigung in eine Summe mit $\frac{1}{2}$, eine letzte von 14 Einzelbaarbeträgen nach ihrer Vereinigung mit $\frac{1}{3}$ vervielfacht werden müssen, um der im Verhältnisse von 2 : 1, von 3 : 1 zunehmenden Sterblichkeit Rechnung zu tragen. Alle auf ihr vorschriftsmässige Vielfache zurückgeführten Summen geben zusammen 40 964 113 736 Stüber als Baarwerth aller Renten, die überhaupt bis zum Eintreffen je eines Todesfalles im Halbjahre zur Auszahlung kamen. Zur Bildung der genannten Summe kamen erst 100, dann 20, dann abermals 20, endlich 14 Summanden in Betracht. Es wäre aber nach De Witt unrichtig, aus $100 + 20 + 20 + 14 = 154$ den Divisor zu bilden, mittels dessen man sich den Durchnittswerth zu verschaffen hätte. Vielmehr lässt De Witt die gleiche Sterblichkeitsabminderung wie bei den Baarwerthen auch bei jenen Gruppenzahlen anwenden, d. h. er bildet

$$1 \cdot 100 + \frac{2}{3} \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{3} \cdot 14 = 128$$

und dann

$$\frac{40\,964\,113\,736}{128} = 320\,032\,138 \text{ Stüber} = 16\,001\,606 \text{ Gulden.}$$

Es gewinnt so den runden Baarwerth von 16 Millionen für eine Leibrente von 1 Million. Die Leibrente liefert etwa $\frac{1}{16}$ des Anlagekapitals an Zins, während die gewöhnliche Rente von 4 Prozent nur $\frac{1}{25}$ an Zins einbringt. Die erstere Anlagsweise ist also dringend zu empfehlen. De Witt liess sich dis Richtigkeit seiner Schlüsse von Johann Hudde (Bd. II, S. 730) bestätigen.

Wir haben die De Wittsche Schrift ausführlich geschildert, damit ersichtlich werde, wie sehr die Lehre von der Wahrscheinlichkeit nur erfahrungsgemäss bekannter Ereignisse und insbesondere die Lehre von der Sterblichkeit damals noch im Argen lag. Einen ungeheuren Schritt weiter ging Edmund Halley[1]) (1656—1742). Er war vorzugsweise Astronom und ist am bekanntesten durch seinen Katalog südlicher Sterne, durch die Bahnbestimmung des nach ihm genannten Halleyschen Kometen, ausserdem durch seine Declinationskarte, Dinge, deren blosse Nennung uns hier genügen muss. Aber

---

[1]) Dessen Todesjahr ist bei Poggendorff I, 1005 verdruckt als 1724 angegeben. Ueber Halleys Leben und seine Verdienste um die Astronomie vergl. Weidler, *Historia Astronomiae* (Wittenberg, 1741) pag. 543—546, wo Halley als noch lebend bezeichnet ist, dann Montucla II, 593—599.

auch mathematische Leistungen Halleys werden uns in sehr verschiedenen Kapiteln dieses Bandes begegnen. Gegenwärtig haben wir es mit einem Aufsatze zu thun, der unter dem Titel: *An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives* in den Philosophical Transactions von 1693 erschien[1]). Auf verhältnissmässig kleinem Raume ist daselbst eine grosse Menge der fruchtbarsten Gedanken mehr angedeutet als entwickelt.

In Breslau waren für die 5 Jahre 1687—1691 Geburts- und Todeslisten veröffentlicht worden, welche das Geschlecht und beim Ableben auch das Lebensalter, in welchem es erfolgt war, genau angaben. 6193 Geburten stehen in dem ganzen Zeitraume 5869 Todesfällen gegenüber, und alljährlich ziemlich zutreffend die Durchschnittszahl von 1238 Geburten bei 1174 Todesfällen. Der jährliche Ueberschuss an Geburten von 1238—1174 = 64 oder etwa einem Zwanzigstel der Geburten bringt schwerlich eine Vermehrung der Einwohnerzahl hervor, weil annähernd ebenso viele Erwachsene zum Kriegsdienste ausgehoben werden. Bei dieser stationären Bevölkerung — ein Kunstausdruck, dessen Halley sich nicht bedient, der aber in unserem Jahrhunderte benutzt wird, um das Gleichgewicht zwischen Zuwachs und Abnahme der Bevölkerung zu bezeichnen — zeigt die Todesliste, dass von den 1238 Neugeborenen 348 innerhalb des ersten Jahres sterben und nur 890 in das zweite Lebensjahr eintreten. Von diesen sterben weitere 198 zwischen Vollendung des ersten und sechsten Lebensjahres u. s. w.

Indem Halley die proportionalen von einer Anfangszahl 1000 beginnenden Zahlen der in jedem Lebensalter lebenden Persönlichkeiten zusammenstellt, erhält er eine Liste, die, sofern nur die drei ersten und die drei letzten Zeilen abgedruckt werden sollen, folgendermassen aussieht:

1. Jahr	1000	Lebende
2. Jahr	855	Lebende
3. Jahr	798	Lebende
—	—	—
82. Jahr	28	Lebende
83. Jahr	23	Lebende
84. Jahr	20	Lebende
	34000	Lebende.

[1]) *Philosophical Transactions* XVII, 596—610. Ein Zusatz unter der Ueberschrift *Some further Considerations on the Breslow Bills of Mortality* ebenda 654–656. Durch verschiedene Druckfehler in den Seitenzahlen kommt pag. 654

Die Summe der in den verschiedenen Lebensjahren als Lebende angegebenen Anzahlen beträgt 34000, und so gross ist die der Liste entsprechende Bevölkerung.

Halley begründet diese Behauptung nicht näher, aber die Meinung ist augenscheinlich die, dass angenommen wird, die stationäre Bevölkerung sammt den absoluten Geburts- und Todeszahlen, in deren Gefolge sie eintrat, hätten sich seit 84 Jahren nicht verändert; auch damals seien, wie regelmässig in allen folgenden Jahren, 1000 Geburten im Jahre vorgekommen, die Sterbefälle mit den Lebensjahren, in welchen sie sich ereignen, hätten sich ebensowenig irgend verändert, und die gegenwärtige Bevölkerung sei die Summe der aus allen diesen Geburten am Leben Gebliebenen, indem eine Bevölkerungsveränderung durch Ein- oder Auswanderung für ausgeschlossen gilt oder doch für so geringfügig, dass sie vernachlässigt werden darf.

Halley benutzt nun erstlich seine Liste, um die Lebenswahrscheinlichkeit während eines Jahres in jedem Lebensalter zu bestimmen. Wenn neben 1. Jahr die Zahl 1000, neben 2. Jahr die Zahl 855 mit der Differenz 145 sich findet, so folgt daraus, dass man 855 gegen 145 oder beiläufig 6 gegen 1 wetten kann, dass ein im ersten Lebensjahre stehendes Kind in das zweite Lebensjahr eintreten werde. Aehnlicherweise ist die Wahrscheinlichkeit, auf englisch *the odds*[1]), für einen Vierzigjährigen, dass er weiter sieben Jahre leben werde, der Tafel zu entnehmen. Neben 40. und 47. stehen die Zahlen 445 und 377 mit der Differenz 68. Demgemäss kann 377 gegen 68, beiläufig 11 gegen 2, auf die Erhaltung des Lebens während der 7 Jahre gewettet werden. Halley fragt weiter nach der Anzahl der Jahre, auf deren fernere Durchlebung in einem gegebenen Alter 1 gegen 1 gewettet werden könne? Bei 30 Jahren z. B. findet er die Zahl 531. Deren Hälfte ist $265\frac{1}{2}$. Nun steht neben 57. die Zahl 272, neben 58. die Zahl 262, zwischen beiden Zahlen liegt $265\frac{1}{2}$, also ist gleichauf zu wetten — *it is an even lay* — dass ein 30jähriger noch zwischen 27 und 28 Jahren leben werde. In den Nachträgen[2]) bemerkt Halley, von den 1238 Neugeborenen der Breslauer Liste seien mit 17 Jahren nur noch 616 am Leben. Der Mensch habe also nicht das geringste Recht über vorzeitigen Tod — *an untimely death* — zu klagen, sofern der Verstorbene über 17 Jahre alt wurde.

Nach diesen für damals ganz neuen die Sterblichkeit betreffen-

zweimal in dem Bande vor. Der Halleysche Zusatz ist bei dem zweiten Vorkommen aufzusuchen. *Philosophical Transactions* kürzen wir künftig als P. T. ab.
[1]) P. T. XVII, 601—602. [2]) Ebenda 655.

den Entwickelungen legt Halley das Hauptgewicht auf die Werthbestimmung von Leibrenten. Der Zinsfuss, dessen er sich bedient, ist 6 Prozent[1]), woraus man entnehmen mag, wie wesentlich anders die englischen Geld- und Handelsverhältnisse im Jahre 1693 gestaltet waren als die holländischen im Jahre 1671. Der briggische Logarithmus von 1,06 ist auf 6 Decimalstellen genau 10 — 9,974694, oder 9,974694 ist die arithmetische Ergänzung — *the arithmetical complement* — jenes Logarithmen, und $9{,}974694n - 10n$ ist der Logarithmus des Baarwerthes der an alle in n Jahren noch Lebende zu zahlenden Rente vom Betrage 1. Zu ihm muss daher der Logarithmus der Anzahl dieser Lebenden addirt werden, um sodann mittelst einer Logarithmentafel den Baarwerth der Gesammtleistung der Versicherungsgesellschaft nach n Jahren zu finden. Diese Rechnung muss für alle Jahrgänge, d. h. für alle Werthe von n, durchgeführt und die Summe der sämmtlichen Baarwerthe durch die Zahl der in der Gegenwart Lebenden dividirt werden. Der Quotient lehrt, was einem gegenwärtig Lebenden eine Leibrente vom Betrage 1 werth ist. Halley hat diese Rechnung durchgeführt, indem er als gegenwärtiges Alter 1, 5, 10 Jahre und stets um 5 Jahre zunehmend zuletzt 70 Jahre annahm. Er findet

Baarwerth	der	Leibrente	1	bei	1	Jahre	ist	10,28
"	"	"	1	"	5	"	"	13,40
"	"	"	1	"	10	"	"	13,44
—	—	—	—	—	—	—	—	—
"	"	"	1	"	70	"	"	5,32.

Im Gegensatze zu De Witt erkennt Halley in seinen Zahlen einen Grund zur Abmahnung von dem Ankauf von Leibrenten, und auch hieraus erkennt man, wie grundverschieden die Verhältnisse waren innerhalb deren beide lebten. In England war[2]) vor kurzem ein 14 Prozent Jahreszins gewährendes königliches Anlehen ausgegeben worden, wodurch man um wenig mehr als 7 als Ankaufspreis eine Rente 1 erhielt, was bei der Leibrente erst in hohem Alter, zwischen 60 und 65 Jahren möglich war.

Halley wendet sich hierauf zur Frage des Ueberlebens bei zwei Personen verschiedenen Alters. Nach der Tabelle sind 610 (N) im Alter von 18 und 490 (n) im Alter von 35 Jahren vorhanden; 8 Jahre später sind 560 (R) im Alter von 26 und 417 (r) im Alter von 43 Jahren vorhanden, während 50 (Y) von der jüngeren und 73 (y) von der älteren Gruppe starben. Die beiden Gleichungen

[1]) P. T. XVII, 603. [2]) Ebenda XVII, 604: *the present Fund lately granted to their Majesties giving 14 per Cent per Annum.*

$N = R + Y$, $n = r + y$ werden miteinander vervielfacht und liefern $Nn = Rr + Yy + Ry + Yr$. Sämmtliche fünf Glieder dieser neuen Gleichung haben eine leicht verständliche Bedeutung. Nn bedeutet die Anzahl der verschiedenaltrigen Paare, welche aus allen zu Anfang Lebenden gebildet werden konnten, Rr dasselbe für den späteren Zeitpunkt. Yy ist die Anzahl der verschiedenaltrigen Paare unter den aus beiden Gruppen Verstorbenen. Ry zeigt das Ueberleben eines Jüngeren, Yr das eines Aelteren an, und die Wahrscheinlichkeit eines jeden Ereignisses wird mittels Division des ihm entsprechenden Produktes durch Nn gefunden. Halley hat diese Darstellung auch mit Hilfe einer Zeichnung versinnlicht[1] (Figur 8). Aus den Seiten $AB = N$ und $BD = n$, welche in H, beziehungsweise in I, in ihre Abschnitte $R + Y$, $r + y$ zerlegt sind, bildet er ein Rechteck und zieht $HE \parallel BD$, $IF \parallel AB$. So entstehen innerhalb des grossen Rechteckes die vier kleineren, deren Verhältniss zum grossen die Wahrscheinlichkeiten dafür darstellen, dass nach der angegebenen Frist beide Personen am Leben seien, oder beide todt, oder die jüngere, die ältere noch allein am Leben. Wird in B senkrecht zur Ebene $ABCD$ eine Gerade $BK = v$ gedacht, deren Theile ϱ und v heissen sollen, so entsteht leicht ein Parallelopipedon Nnv, welches durch Schnittebenen in die 8 kleineren Parallelopipeda $Rr\varrho$, Yyv, Rrv, $Ry\varrho$, $Yr\varrho$, Ryv, Yrv, $Yy\varrho$ zerfällt, deren Verhältnisse zum grossen Parallelopipedon die Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, dass drei in Untersuchung genommene Personen nach einer bestimmten Frist noch leben, oder alle drei verstorben sind, oder zwei derselben noch leben, oder endlich nur noch eine.

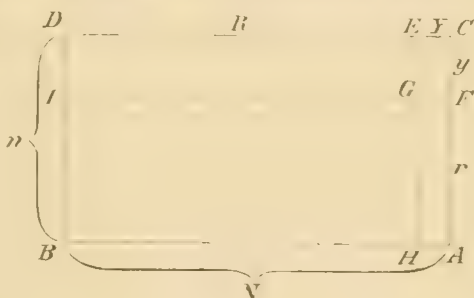


Fig. 8.

Während in Holland und England die Zinseszinsrechnung wenigstens innerhalb der hier besprochenen Leibrentenberechnung als in dem Maasse selbstverständlich betrachtet wurde, dass eine Begründung derselben überflüssig erscheinen mochte, lag die Sache in Deutschland wesentlich anders. Der bekannte sächsische Jurist Benedict Carpzow[2] (1595—1666), dessen Vorschriften für die Rechtsprechung lange Jahrzehnte hindurch als unanfechtbar galten, bediente sich bei

[1] P. T. XVII, 605—606. [2] Allgemeine deutsche Biographie IV, 11—20, Artikel von Muther.

Berechnung des Interusuriums, d. h. des Abzugs, welchen der Gläubiger sich gefallen lassen muss, wenn eine nach der Zeit t zahlbare Schuld S durch Baarzahlung getilgt werden will, der Methode dass er fragte, welchen Zins z jenes S in der Zeit t abwerfe und dass er dann dieses z von S abzog, eine Methode, welche, so grundfalsch sie ist, übungsmässig bis auf unsere Tage gestattet wird, wo es um die sogenannte Discontirung eines nach verhältnissmässig kurzer Frist fälligen Wechsels sich handelt.

Leibniz hat in den A. E. von 1682 die Interusuriumsfrage behandelt [1]). Sein Gedankengang ist folgender. Die Summe 1 sei nach einem Jahre zahlbar, und der Zinsfuss sei 5 Prozent oder $\frac{1}{\nu}$ des Kapitals, *sors*, wo die Zahl ν bei dem angenommenen Zinsfusse den Werth 20, bei anderem Zinsfusse einen anderen Werth besitzt. Zahlt der Schuldner dem Gläubiger jetzt schon 1, so wird er für diesen Betrag Gläubiger seines bisherigen Gläubigers, und wenn letzterer auch am Jahresende die Rückgabe der Summe 1 gegen seine eigene alsdann fällige Forderung wettschlagen kann, so muss er doch den Zins mit $\frac{1}{\nu}$ bezahlen. Diesen Zins vergüte er gleich jetzt, beziehungsweise gestatte, dass der Schuldner ihm nur $1 - \frac{1}{\nu}$ auszahle, so wird der Schuldner am Ende des Jahres neuerdings als Schuldner mit dem Betrage $\frac{1}{\nu^2}$ erscheinen. Dessen Baarbezahlung erfordert abermals am Ende des Jahres eine Verzinsung mit $\frac{1}{\nu^3}$, welche der ursprüngliche Gläubiger dem ursprünglichen Schuldner zu entrichten hat. Setzt man diese Betrachtungen ins Unendliche fort, so erscheint als Baarwerth der nach Jahresfrist fälligen Forderung 1 die Summe

$$1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^3} + \cdots.$$

Die Summe dieser unendlichen geometrischen Reihe ist aber $\frac{\nu}{\nu + 1}$, oder mit anderen Worten: ihr $\nu + 1$ faches ist ν. Leibniz beweist dieses durch Ausführung der Multiplikation. Die ν fache Reihe, sagt er, ist $\nu - 1 + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2} + \cdots$, die einfache $1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} - \cdots$, und deren Summe ist ν. Alsdann geht Leibniz weiter zur Untersuchung, welcher Baarwerth für die in zwei Jahren fällige Forderung 1 gezahlt werden müsse, und er findet die unendliche Reihe

$$1 - \frac{2}{\nu} + \frac{3}{\nu^2} - \frac{4}{\nu^3} + \cdots.$$

[1]) *Meditatio iuridico-mathematica de interusurio simplice.* Einen Abdruck dieser Abhandlung vergl. Leibniz VII, 125—132.

Ihre Entstehung ist diese. Die Baarzahlung 1 bringt innerhalb eines Jahres $\frac{1}{v}$ Zins, innerhalb des zweiten Jahres ebenso viel. Werden diese $\frac{2}{v}$ jetzt schon von der Zahlung zurückbehalten, so geben sie zur Hälfte Zins über 1 Jahr, zur anderen Hälfte Zins über 2 Jahre, was zusammen $\frac{3}{v^2}$ ausmacht u. s. w. Die Summe der erhaltenen Reihe leitet Leibniz nicht ab; er sagt einfach, sie sei $\left(\frac{v}{v+1}\right)^2$. Aehnlicherweise bemerkt er, bei dreijähriger Dauer bis zur Fälligkeit sei der Baarwerth $1 - \frac{3}{v} + \frac{6}{v^2} - \frac{10}{v^3} + \frac{15}{v^4} - \cdots$ mit den aufeinander folgenden Dreieckszahlen als Zählern der einzelnen Glieder und mit der Summe $\left(\frac{v}{v+1}\right)^3$ u. s. w. Man könne, fährt er fort, die Rabattirung auch immer von einem Jahre zu dem nächstvorhergehenden vornehmen. Die $\frac{v}{v+1}$, welche aus 1 entstanden, werden bei abermaliger Rabattirung zu $\left(\frac{v}{v+1}\right)^2$, diese bei nochmaliger zu $\left(\frac{v}{v+1}\right)^3$, und so liefere die Rabattirung von 1 über a Jahre den Baarwerth $\left(\frac{v}{v+1}\right)^a$, welches Leibniz in der Form $\boxed{a}\,\frac{v}{v+1}$ drucken liess.

Gegen Schluss des Aufsatzes behielt Leibniz sich vor eine Fortsetzung zu veröffentlichen, welche mit Leibrenten sich beschäftigen sollte, er hat dieses Vorhaben aber nicht ausgeführt. Ein in Leibnizens Nachlasse aufgefundener kurzer Aufsatz[1]) war möglicherweise schon entworfen, als die Abhandlung von 1682 erschien, und wurde gleich so manchem Anderem zurückbehalten. Jedenfalls wäre eine Veröffentlichung nach Halley, also nach 1693, unmöglich gewesen, indem Leibniz noch den Standpunkt einnahm, die voraussichtliche Lebensdauer des Rentennehmers ohne jegliche Begründung nach Gutdünken anzunehmen und in Rechnung zu ziehen.

Die Untersuchungen über Zinseszinsrechnung finden einen Fortsetzer in einem Mathematiker, mit dessen Persönlichkeit das 86. Kapitel uns bekannt machen wird. Es war Jakob Bernoulli, der im Maihefte 1690 der A. E. die Frage nach augenblicklichem Zinseszins stellte[2]). Ist a die Anfangsschuld, b der bedungene Jahreszins, so wächst nach Bernoulli die Schuld innerhalb eines Jahres auf

[1]) Der Aufsatz *De reditibus ad vitam*. Vergl. Leibniz VII, 133—137.
[2]) *Si creditor aliquis pecuniam suam foenori exponat ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usurae annuae sorti annumeretur.* Der Aufsatz ist abgedruckt in Jac. Bernoulli Opera I, 427—431.

$a + b + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 3 a^2} + \cdots$. Eine Ableitung dieser Formel gibt Bernoulli nicht; es ist indessen nicht schwer, sich von ihrer Richtigkeit zu überzeugen. Die Reihe ist nämlich in anderer Form geschrieben:

$$a\left[1 + \frac{b}{a} + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \cdots\right] = a \cdot e^{\frac{b}{a}} = a \cdot e^{\frac{p}{100}},$$

wenn p den Jahreszinsfuss bedeutet, vermöge dessen $b = \frac{ap}{100}$, $\frac{b}{a} = \frac{p}{100}$ ist. Ist aber p der Jahreszinsfuss, so ist $\frac{p}{n}$ der relative, oder mit Jakob Bernoulli zu reden, der proportionale Zinsfuss, der für die Dauer von $\frac{1}{n}$ Jahr in Rechnung zu ziehen ist. In einem ganzen Jahre wächst demnach a zu

$$a \cdot \left(\frac{100 + \frac{p}{n}}{100}\right)^n = a\left(1 + \frac{p}{100\,n}\right)^n = a\left[\left(1 + \frac{p}{100\,n}\right)^{\frac{100\,n}{p}}\right]^{\frac{p}{100}}$$

und bei augenblicklicher Verzinsung, d. h. bei $n = \infty$, geht

$$\left(1 + \frac{p}{100\,n}\right)^{\frac{100\,n}{p}} \text{ in } e,$$

mithin das Endergebniss in $ae^{\frac{p}{100}}$ über.

Wieder in der Zeit vor 1700 wurde eine bedeutsame Erweiterung der Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen nach der Richtung vorgenommen, dass man sie auf Geistesthatsachen ausdehnte. John Craig[1]), ein Schotte, der etwa seit 1680 in Cambridge studirte, später an verschiedenen Orten als Geistlicher lebte und zuletzt in London sich niederliess, wo er 1731 starb, veröffentlichte 1699 ein Buch *Theologiae Christianae principia mathematica*, in welchem die Zuverlässigkeit menschlicher Uebertragung der Prüfung unterzogen wurde. Craig nahm an, die Glaubwürdigkeit nehme im Quadrate der Zeit ab. Daraus zog er die Folgerung, der Glaube an die Wahrheit der christlichen Religion werde im Jahre 3150 so herabgemindert sein, dass er als nicht mehr vorhanden gelten müsse. Der jüngste Tag werde aber prophezeitermassen eintreten, ehe aller Glaube erloschen sei, folglich sei das Weltende vor 3150 zu erwarten.

Mit der abnehmenden Glaubwürdigkeit menschlicher Zeugnisse beschäftigte sich auch ein 1699 anonym erschienener Aufsatz[2]): *A Calculation of the credibility of human testimony.*

[1]) Rouse Ball, *A History of the study of mathematics at Cambridge*, pag. 77–78. [2]) P. T. XXI, 359–365

85. Kapitel.

Reihen. Mercator. Brouncker. Gregory. Newton.

In dem Leibnizischen Aufsatze über Zinseszinsrabattirung von 1682 kommt, wie wir (S. 50) bemerkt haben, die Summe der unendlichen geometrischen Reihe mit wechselnden Vorzeichen

$$1 - \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^3} + \cdots = \frac{v}{v+1}$$

vor, welche bewiesen, nicht abgeleitet wird. Schon seit 14 Jahren waren damals Untersuchungen über unendliche Reihen als solche zum Drucke gelangt, war durch James Gregory (Bd. II, S. 655—656) der Kunstausdruck der Convergenz bekannt gegeben. Zahlreiche, hochbedeutsame Fortschritte auf der neuen Bahn sind zu verzeichnen, deren Darstellung wir uns zuzuwenden haben[1]).

Man eröffnet die Reihe der zu nennenden Namen wohl am richtigsten mit Nicolaus Mercator[2]). Der eigentliche Name war Kaufmann, sein Geburtsland Holstein. Von Kopenhagen, wo Mercator studirte, und wo er auch nach vollendeten Studien noch längere Zeit blieb, wandte er sich nach London. Dort gehörte er der Royal Society an, dort verfasste er unter anderen Schriften auch die *Logarithmotechnia*[3]) von 1668. Später wandte er sich nach Paris und wirkte bei der Anlage der Wasserkünste von Versailles mit. Er starb 1687 in Paris. Mercator hatte, gleich allen Zeitgenossen, welche irgend über mathematische Gelehrsamkeit verfügten, des Wallis *Arithmetica Infinitorum* von 1655 studirt. Er wusste, dass der Satz Giltigkeit besass, welchen wir (Bd. II, S. 826) in der erheblich späteren Form von $\int\limits_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ ausgesprochen haben. Aehnlicher Summirung waren auch Ausdrücke zugänglich, bei denen, wenn wir jene späte Schreibweise beibehalten, $\int\limits_0^1 (x^{m_1} + x^{m_2} + \cdots + x^{m_n})dx$ in Frage kam, oder, noch anders ausgedrückt, Wallis und seine unmittelbaren Schüler waren im Stande die Fläche zu quadriren, deren Begrenzung aus der Abscissenaxe, aus zwei Ordinaten und aus der Curve

[1]) Vergl. insbesondere Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, 1889. Wir citiren dieses sehr zuverlässige Werk kurz als Reiff. [2]) *Nouvelle Biographie universelle* XXXV, 12—13. [3]) Sie ist abgedruckt im I. Bande der *Scriptores logarithmici*, welche Francis Maseres in sechs Bänden (London, 1791—1807) herausgab.

von der Gleichung

$$y = a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \cdots + a_\mu x^{m_\mu}$$

bestand. Bei der gleichseitigen Hyperbel — das wusste man seit 1647 durch Gregorius a Sto. Vincentio (Bd. II, S. 819) — maass jene Fläche sich durch die Logarithmen, vorausgesetzt, dass eine Asymptote der Hyperbel als Abscissenaxe gewählt wurde. Aber die Hyperbelgleichung hatte in diesem Falle nicht die oben angegebene Gestalt, sie hiess vielmehr $xy = 1$, und deshalb misslang jeder Vereinigungsversuch der beiden Ergebnisse zu einem einzigen Satze.

Hier war der Punkt, wo Mercator einsetzte. Er veränderte die Hyperbelgleichung in $y = \frac{1}{1+a}$ und wagte es, die in dem Ausdrucke $\frac{1}{1+a}$ angedeutete Division nach den gewöhnlichen Regeln der Buchstabenrechnung auszuführen. Er setzte also

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots \text{ in infinitum.}$$

Für unsere heutigen Begriffe ist das ein Schritt von fast naiver Einfachheit, aber damals war er neu und von einer Tragweite, welche die Zeitgenossen kaum zu ermessen im Stande waren, so hoch sie auch Mercators Erfindung sofort schätzten.

Vermöge dieser Reihenentwicklung neuer Art war Mercator im Stande

$$\int_0^a \frac{da}{1+a} = \int_0^a (1 - a + a^2 - a^3 + \cdots) da = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4} + \cdots$$

mit $\int_0^a \frac{da}{1+a} = \log(1+a)$ zu verbinden und demnach die logarithmische Reihe zu erfinden.

Hat er sie erfunden? Hat er die Gleichung

$$\log(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \cdots$$

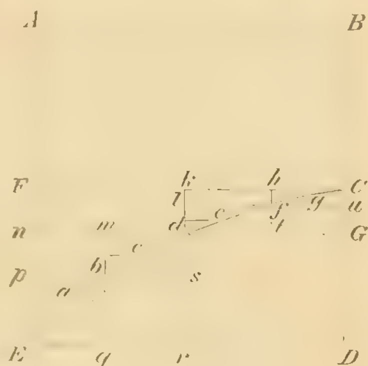
wirklich angesetzt? Sie kommt in ihrer unmittelbaren Gestalt zwar nicht in der Logarithmotechnia vor, aber auf der letzten Seite dieser Schrift ist die *Inventio summae logarithmorum*, d. h. die abermalige Integration $\int_0^a \log(1+a\,da$ vollzogen, und ihr Ergebniss

$$\int_0^a \log(1+a) da = \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2\cdot 3} + \frac{a^4}{3\cdot 4} - \cdots$$

kann doch kaum in anderer Weise gefunden worden sein, als indem

Mercator den Logarithmus durch seine Potenzreihe ersetzte, wie er es vorher mit dem Quotienten $\frac{1}{1+a}$ gemacht hatte.

Das gleiche Jahr 1668 sah noch drei andere Arbeiten in England gedruckt, welche die Reihenlehre förderten. Lord Brouncker (Bd II, S. 698) legte der Royal Society am 13. April 1668 eine Abhandlung *The Squaring of the Hyperbola by an infinite series of Rational Numbers*[1]) vor, welche die geometrische Herleitung der Reihe $\log 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots$ enthielt. Er verfuhr dabei wie folgt. Er zeichnete (Figur 9) das Quadrat $ABDE$ von der Seitenlänge 1. AB soll ein Stück der einen Asymptote der gleichseitigen Hyperbel EC sein, AE und BD sind der anderen Asymptote parallel. Ueberdies dient zur genauen Bestimmung der Hyperbel, dass sie durch den Eckpunkt E des gegebenen Quadrates und durch die Mitte C der Quadratseite BD hindurchgehen soll. Die in der Figur auftretenden Rechtecke sind so gebildet, dass ihre Grundlinien durch fortgesetzte Halbirung der Quadratseite entstehen. So ist


Fig. 9.

$$Er = ps = dG = \frac{1}{2},$$

$Eq = bs = dt = fu = \frac{1}{4}$; die Grundlinien der Rechtecke ap, cm, el sind $\frac{1}{8}$ u. s. w. Brouncker behauptet nun, die in der Figur zu erkennenden Rechtecke besässen folgende Flächeninhalte:

$$dD = \frac{1}{2 \cdot 3},\ br = \frac{1}{4 \cdot 5},\ fG = \frac{1}{6 \cdot 7},\ aq = \frac{1}{8 \cdot 9},$$

$$cs = \frac{1}{10 \cdot 11},\ et = \frac{1}{12 \cdot 13},\ gu = \frac{1}{14 \cdot 15}$$

u. s. w. Andererseits sei

$$CA = \frac{1}{1 \cdot 2},\ dF = \frac{1}{3 \cdot 4},\ bn = \frac{1}{5 \cdot 6},\ fk = \frac{1}{7 \cdot 8},$$

$$ap = \frac{1}{9 \cdot 10},\ cm = \frac{1}{11 \cdot 12},\ el = \frac{1}{13 \cdot 14},\ gh = \frac{1}{15 \cdot 16}$$

u. s. w. Einen Beweis hinzuzufügen erspart sich Brouncker. Er verweist nur auf Satz 87—95 der Arithmetica Infinitorum von Wallis und auf die Eigenschaft der Hyperbel, dass die um gleiche Abscissen-

[1]) P. T. II, 645—649.

unterschiede von einander abstehenden Ordinaten, sofern sie von der Hyperbel bis zum Durchschnitt mit der AB gemessen werden, eine harmonische Reihe bilden, *are in an Harmonic series.* Sehen wir zu, ob Brounckers Behauptungen richtig sind.

Ist $xy = 1$ die Gleichung der auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen bezogenen Hyperbel, und ist E mit der Ordinate 1, C mit der Ordinate $\frac{1}{2}$ auf der Hyperbel gelegen, so muss E die Abscisse 1, C die Abscisse 2 besitzen, d. h. der auf der Figur nicht sichtbare Coordinatenanfangspunkt O muss auf der Verlängerung von BA über A hinaus liegen und von A um $OA = 1$ entfernt sein. Die Abscisse von b z. B. ist alsdann $1 + \frac{1}{4}$ weil $Eq = \frac{1}{4}$, und die Ordinate von b muss $\frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$ sein. Nun ergänzt bq die Ordinate von b zur Längeneinheit, ist also $\frac{1}{5}$, und das Rechteck br von den Seiten $qr = \frac{1}{4}$, $bq = \frac{1}{5}$ besitzt den Flächenraum $\frac{1}{4 \cdot 5}$. Auf ganz ähnliche Weise lassen Brounckers übrige Flächenangaben sich bestätigen. So ist z. B. $dr = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, $rD = \frac{1}{2}$, Rechteck $dD = \frac{1}{2 \cdot 3}$ u. s. w.

Aber aus $dr = \frac{1}{3}$ folgt auch $dk = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}$, und dieses Stück bildet mit $dn = \frac{1}{2}$ das Rechteck $dF = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3 \cdot 4}$. So erhält man die Summe der beiden Rechtecke

$$dD + dF = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ Rechteck } CA,$$

was auch geometrisch mittels

$$dD = rn, \quad rn + dF = rF = \frac{1}{2} DF = \frac{1}{2} CA$$

einleuchtet. Auch hier finden ganz ähnliche Gleichungen mehrfach statt. Es ist $\frac{1}{2} dD = br + bn$, $\frac{1}{2} dF = fG + fk$, $\frac{1}{2} br = aq + ap$ u. s. w. Dabei ist aber beispielsweise $bn > fG$, mithin

$$\frac{1}{2} dD > br + fG \quad \text{oder } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} > \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7}.$$

Allgemeiner wäre der arithmetische Beweis, welcher freilich nicht im Geiste der damaligen Zeit lag: die als richtig vorausgesetzte Ungleichung $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{2n(2n+1)} + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$ geht durch

Wegmultipliciren mit den Nennern in $4n^2 + 8n + 3 > 4n^2 + 6n + 3$ oder in $n > 0$ über, gilt also für jedes positive n.

Damit ist aber die Wahrheit von Sätzen bewiesen, welche Brouncker abermals ohne jede Begründung ausspricht. Wie die Hälfte des Anfangsgliedes $\frac{1}{2 \cdot 3}$ grösser als die Summe der beiden folgenden Glieder $\frac{1}{4 \cdot 5}$ und $\frac{1}{6 \cdot 7}$ ist, so sei, behauptet Brouncker, die Hälfte jener beiden Glieder oder $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7}\right)$ grösser als die Summe der vier folgenden Glieder oder

$$\frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{14 \cdot 15} \text{ u. s. w.}$$

Die nicht ausdrücklich hervorgehobene grosse Bedeutung dieser Sätze liegt darin, dass in ihnen der Beweis der Convergenz der unendlichen Reihe $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots$ enthalten ist. Addirt man die sämmtlichen Ungleichungen:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} > 2\left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7}\right),$$

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} > 2\left(\frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{14 \cdot 15}\right),$$

$$\frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{14 \cdot 15} > 2\left(\frac{1}{16 \cdot 17} + \frac{1}{18 \cdot 19} + \cdots + \frac{1}{30 \cdot 31}\right)$$

. . . .

und lässt auf beiden Seiten die übereinstimmenden Glieder weg, so folgt $\frac{1}{2 \cdot 3} > \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \cdots$, und daraus wieder

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \cdots.$$

Brouncker, wir wiederholen es, hebt diese Folgerung aus seinen Ungleichungen nicht besonders hervor, aber weshalb könnte er sie selbst abgeleitet und betont haben, wenn ihm ihre Verwerthung in dem von uns angedeuteten Sinne nicht mehr oder minder klar vorschwebte?

Brouncker vereinigte ferner die beiden Reihen

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots \quad \text{und} \quad \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots$$

unter Verschränkung der Glieder zu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots = 1.$$

Er fügt hinzu, die Summe bis zu dem Gliede $\frac{1}{a(a+1)}$ einschliesslich sei $\frac{a}{a+1}$, und $\frac{1}{a+1}$ sei die Summe der dann noch folgenden unendlich vielen Glieder.

Wie er dieses fand, sagt er wieder nicht. Vermuthlich hat er jedes Glied der Reihe in eine Differenz verwandelt, d. h. $\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\ldots\ \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ gesetzt und so $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{a(a+1)}$ $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1} = \frac{a}{a+1}$ erhalten. Damit ergab sich zugleich $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots$ in infinitum $= 1$. Die Convergenz der Reihe $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \cdots$ sowie die der Reihe $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$ zieht dann auch die Convergenz der Reihe $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$ nach sich, und die Kenntniss aller dieser Thatsachen wird man Brouncker kaum absprechen können.

Allerdings legte er ihnen zuverlässig nicht die Bedeutung bei, welche man heute mit ihnen verbindet. Dass eine Reihe vor der Benutzung auf ihre Convergenz zu prüfen sei, ist erst im XIX. Jahrh. Gemeingut der Wissenschaft geworden. Noch das XVIII. und um so mehr das XVII. Jahrh. mochten ab und zu Convergenzuntersuchungen ausführen, aber von ihrer Nothwendigkeit hatte man, eine einzige Ausnahme, auf die wir gleich zurückkommen, vorbehalten, keine Ahnung. Es waren eben Untersuchungen über Reihen wie andere auch, interessant, wenn sie etwa den Werth einer Reihe näherungsweise kennen lehrten, aber ohne die Eigenschaft der Convergenz war nach dem stillschweigenden Einverständnisse sämmtlicher Mathematiker eine Reihe nicht minder beachtenswerth. Die einzige von uns berührte Ausnahme trat dann ein, wenn eine praktische Anwendung einer Reihe zur Auswerthung der ihr gleichen Funktion gemacht werden wollte. In diesem Falle drängte sich der Missstand, dass die Rechnung mittels divergenter Reihen das erwünschte Ergebniss verweigerte, von selbst auf und verlangte Abhilfe.

Als Beleg dafür können wir auf die zweite Arbeit aus dem Jahre 1668 verweisen, an welche (S. 55) gedacht wurde, auf einen Bericht von John Wallis[1]) über Mercators Logarithmotechnia in den P. T. vom 17. August 1668. Er ist von Mercators Reihe, welche $\log(1+A)$ von $A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \cdots$ abhängig macht, entzückt, aber man dürfe sich nicht verbergen, dass die Sache einen

[1]) P. T. II, 753—756.

Haken habe. Es sei offenbar, dass bei $A > 1$ die späteren Potenzen höher in das Gebiet der ganzen Zahlen sich erstrecken, und dass sie deshalb keineswegs vernachlässigt werden dürften[1]. Da, meint Wallis, könne man durch einen Kunstgriff sich helfen. Seine Ausdrucksweise ist nicht leicht verständlich, doch dürfte seine Meinung die folgende sein. Jede Zahl über 1 ist ein Bruch vom Zähler 1, dessen Nenner echtgebrochen ist, mithin als Unterschied von 1 und einem anderen echten Bruche dargestellt werden kann. So führt das zu logarithmirende $1 + A$ zu einem $\frac{1}{1-a}$ und der Logarithmus von $1 - a$ wird gewonnen, indem man die Divison $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \cdots$ vollzieht und letztere Reihe integrirt. Man erhält $a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + \cdots$.

In dem gleichen Bande der P. T. ist in der Nummer vom 13. Juli 1668 ein gegen Huygens gerichteter Aufsatz von James Gregory abgedruckt[2], und diesen Aufsatz erwähnt Gregory wieder in seinen *Exercitationes Geometricae* von 1668, deren Drucklegung somit später als Mitte Juli stattfand. Ging derselben auch der Bericht von Wallis vom 17. August vorher, den wir besprachen? War Gregory in der Lage ihn noch benutzen zu können? Das sind Fragen, auf welche wir keine Antwort wissen. Jedenfalls nennen wir eine *Appendicula ad veram Circuli et Hyperbolae Quadraturam* und *N. Mercatoris Quadratura Hyperboles geometrice demonstrata*, welche zusammen die 13 ersten Seiten des genannten nicht umfangreichen Buches Gregorys füllen, als die dritte englische auf unendliche Reihen sich beziehende Arbeit von 1668. In ihr ist geometrisch, und zwar so, dass die Abhängigkeit von Brounckers Aufsatze in hohem Grade wahrscheinlich gemacht ist, gelehrt, wie man die Maasszahlen gewisser Parallelogramme, welche in unendlicher Anzahl gewählt die Hyperbelfläche ausfüllen, zu finden im Stande sei. Auf diese Grundlage stützt sich alsdann folgender Satz[3]: Der Unterschied der Logarithmen der Zahlen A und B verhalte sich zum Unterschiede der Logarithmen der Zahlen D und E wie

$$\frac{N}{C} + \frac{N^3}{3C^3} + \frac{N^5}{5C^5} + \cdots \quad \text{zu} \quad \frac{O}{F} + \frac{O^3}{3F^3} + \frac{O^5}{5F^5} + \cdots,$$

wenn

$$C = \frac{A+B}{2},\ F = \frac{D+E}{2},\ N = C - A = \frac{B-A}{2},\ O = F - D = \frac{E-D}{2}.$$

Setzt man diese letzteren Werthe ein, so nimmt der Satz die Gestalt an

[1] *Cum enim jam ponenda sit $A > 1$ manifestum est, posteriores ipsius potestates altius in Integrorum sedes penetraturas adeoque minime negligendas.*
[2] P. T. II, 732. [3] J. Gregory, *Exercitationes geometricae* pag. 13.

$$\log\frac{B}{A} : \log\frac{E}{D} = \left[\frac{B-A}{B+A} + \frac{1}{3}\left(\frac{B-A}{B+A}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{B-A}{B+A}\right)^5 + \cdots\right]$$
$$:\left[\frac{E-D}{E+D} + \frac{1}{3}\left(\frac{E-D}{E+D}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{E-D}{E+D}\right)^5 + \cdots\right].$$

Werden nun für B und A zwei bekannte Zahlen, z. B. $B = 1001$, $A = 999$, $\frac{B}{A} = 1 + \frac{2}{999}$, $\frac{B-A}{B+A} = \frac{1}{1000}$ eingeführt und ist $\log\frac{B}{A}$ auf irgend eine Weise schon berechnet, so sei, sagt Gregory, der Unterschied $\log E - \log D$ zweier Logarithmen grosser Zahlen D und E mittels der angegebenen Formel leicht zu finden. Setzt man $\frac{E}{D} = z$, mithin $\frac{E-D}{E+D} = \frac{z-1}{z+1}$, so ergibt sich aus Gregorys Formel die Proportionalität von

$$\log z \text{ mit } \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots,$$

aber diese Folgerung hat Gregory nicht gezogen.

Schon mehrere Jahre vor der Veröffentlichung dieser auf Reihen bezüglichen Untersuchungen waren ähnliche Arbeiten von einem in der Mitte der Zwanziger stehenden, also noch sehr jugendlichen Gelehrten unternommen worden, von Isaac Newton[1]). Haben wir früher (S. 27—31) uns in ganz ausnahmsweise umständlicher Erzählung mit Leibnizens Lebensschicksalen bis zu dessen 1716 erfolgtem Tode bekannt gemacht, und haben wir nicht vermeiden können, dabei die Geschichte der englischen Regentenfolge zum Gegenstand von Erörterungen zu machen, so haben wir gleich damals zum voraus (S. 27) die Pflicht übernommen, ein ähnliches Verfahren für Newton einzuschlagen, und diese Pflicht wollen wir jetzt erfüllen.

Isaac Newton (1643—1727) ist in Woolsthorpe bei Grantham in England geboren. Er kam als so schwächliches Kind zur Welt, dass Niemand ihm ein mehr als 84jähriges Leben zugetraut haben würde. Von früher Jugend an legte Newton Neigung zu mechanischen Künsteleien an den Tag, zu welcher sich eine solche Liebe zu mathematischen Studien gesellte, dass die widerstrebende Mutter sich genöthigt sah, den Sohn, von dem sie gewünscht hätte, er möge als Landwirth das väterliche Erbe zur Geltung bringen, den Wissenschaften sich widmen zu lassen. Im Jahre 1660 bezog Newton das Trinity-College in Cambridge, in dem gleichen Jahre also, in welchem das Königthum in England wieder hergestellt wurde. Von 1663 an war Isaac Barrow Professor der Mathematik an der gleichen An-

[1]) Brewster, *The memoirs of Newton* (2. Auflage 1860). W. Rouse Ball, *A short account of the history of mathematics*. Chapter XVI (1888). Cantor, Sir Isaac Newton (in der Zeitschrift „Nord und Süd". Januar und Februar 1881).

stalt (S. 10), und dieser Mann übte auf die wissenschaftliche Ausbildung Newtons, übte nicht minder auf seine politische und religiöse Gesinnung einen fest bestimmenden Einfluss. Unter Barrows Einfluss beschäftigte sich Newton, was wir leider nur im Vorübergehen erwähnen dürfen, trotzdem uns dadurch die Gelegenheit entgeht, seine grossartigsten wissenschaftlichen Entdeckungen rühmen zu dürfen, mit Optik. Barrows Nachfolger wurde er 1669 in der Cambridger Professur. Gleich Barrow war Newton von strengst conservativem und kirchlichem Geiste, so dass seine felsenfeste Königstreue nur dann in Erschütterung gerathen konnte, wenn zwischen ihr und der noch festeren Treue gegen die Kirche eine Kluft sich öffnete.

Jakob II. sorgte dafür, dass auch die eingefleischtesten Tories, wie der englische Parteiname lautete, nicht ferner für ihn sich erklären konnten, und als 1689 die sogenannte Convention zusammentrat, jene parlamentarische Versammlung, welche Wilhelm III. zum Könige von England ernannte, war Newton als Vertreter der Universität Cambridge Mitglied der Versammlung.

Das Wort hat Newton allerdings nie ergriffen, weder in der Convention noch als er später einmal dem Parlamente angehörte. Oeffentliche Aeusserungen, und gar solche, welche zu öffentlicher Gegenrede führen und ihn so nöthigen konnten, selbst aus dem Stegreife zu antworten, waren niemals Newtons Sache. Ein Grundzug seines Charakters war vielmehr die Scheu vor öffentlichem Kundgeben seiner Meinung, was sich nicht allein auf die Politik bezog, sondern auch das Hervortreten mit wissenschaftlichen Entdeckungen hemmte.

Als 1690 ein regelmässig gewähltes Parlament an die Stelle der Convention trat, bewarb sich Newton nicht um Wiederwahl, er wirkte vielmehr für die Ernennung von Sir Robert Sawyer, einem eingefleischten Tory, und so wird man nicht fehlgehen, wenn man annimmt, Newton habe, insbesondere seit dem Tode von Königin Maria 1694, durch welchen auch der letzte Rest legitimistischen Anstriches, der der Regierung Wilhelm III. anhaftete, verloren ging, zu der toristischen Oppositionspartei gehört.

Sie setzte da ein, wo die Unzufriedenheit der Bevölkerung ohnedies schon rege war, bei der Münzfrage. England besass seit den Tagen der Königin Elisabeth eine Doppelwährung, Neben den Goldmünzen waren, rechtlich denselben gleichgestellt, Silbermünzen im Betrage von fünf und ein halb Millionen Pfund Sterling im Umlauf. Aber dieses Silbergeld war nachgrade so abgenutzt, abgefeilt und beschnitten, dass der Werthverlust auf ein und ein fünftel Million Pfund veranschlagt wurde. Die Thronrede von 1695 forderte das

Parlament auf, Heilmittel gegen den mehr als je unhaltbaren Zustand vorzuschlagen, da es so weit gekommen war, dass die Bank von Amsterdam, eine damals allgewaltige Geldmacht, englisches Silbergeld überhaupt nicht mehr annahm. Das Oberhaus, das zuerst mit der Angelegenheit sich beschäftigte, verlangte, von einem in Gemeinschaft mit dem Unterhause zu bestimmenden Tage an solle beschnittene Münze nicht mehr in Zahlung genommen werden. Das wäre freilich eine ebenso einfache als einschneidende Lösung der schwebenden Frage gewesen, aber damit wäre der ganze Verlust auf die Schultern der Besitzer von Silbermünzen gewälzt worden, vorwiegend auf diejenigen, welche nur Silber besassen, auf die dem Vermögen nach Schwächeren, und es entstand eine ungeheure Aufregung. Unter deren Druck entschied sich das in seiner grossen Mehrheit whigistisch zusammengesetzte Unterhaus dahin, dass die öffentlichen Kassen gehalten sein sollten, die beschnittenen Münzen einzuziehen und gegen vollwichtige umzutauschen.

Kanzler der Schatzkammer war damals Karl Montague. Er war ein Führer der Whigs, aber er war in Cambridge einer der wenigen Schüler Newtons gewesen, er soll mit einer Nichte Newtons insgeheim vermählt gewesen sein. Diese Umstände vereinigt brachten ihn wohl dazu, Newton die unter den gegebenen Verhältnissen keineswegs untergeordnete Stellung eines Aufsehers der Münze anzubieten, wenn nicht als weiterer Beweggrund der Wunsch wirksam war, einen bekannten Tory an der Ausführung jenes Münzbeschlusses in so hohem Grade zu betheiligen, dass der Opposition dadurch Stillschweigen auferlegt wurde.

Newton trat 1696 in die neue Stellung ein, und damit war er für die mathematische Wissenschaft so gut wie verloren. Er behielt zwar seine Professur in Cambridge dem Namen nach bis 1701 bei, auch nachdem er 1699 zum Münzmeister befördert worden war, aber gelehrt hat er nicht mehr, und ebenso wenig sind wichtigere neue mathematische Untersuchungen von ihm aus einer Zeit nach 1696 bekannt, wenn es auch nicht an Veröffentlichungen fehlt. Möglicherweise hängt dieses Nachlassen seiner Thätigkeit mit dem Uebermaasse von Amtsgeschäften zusammen, möglicherweise ist es die mittelbare Folge einer mit einer gewissen geistigen Störung verbundenen Krankheit von 1693.

Newtons politische Thätigkeit war dagegen nicht abgeschlossen. Er gehörte als Abgeordneter der Universität Cambridge dem Parlamente an, welches am 30. December 1701 zusammentrat, und während dessen Dauer Wilhelm III. starb, Königin Anna den Thron bestieg. Sie entliess das whigistische Ministerium und bildete ein solches aus

Tories entsprechend der Mehrheit der Mitglieder des Unterhauses. Wie diese Mehrheit wechselten unter Königin Anna auch die Ministerien in bunter Folge, und immer zählte Newton, ob siegreich bei den Wahlen, oder unterliegend, zu den Tories äusserster Richtung, deren Stellung zu einzelnen bestimmten Fragen allerdings so häufig sich änderte, dass es schwer hält, ohne eine Ausführlichkeit, die uns nicht gestattet ist, sich zurecht zu finden. Die *Succession-Act* von 1701 (S. 30) war hauptsächlich toristischen Ursprunges. Die männliche Erbfolge schien in der kräftigen hannoverischen Linie auf lange gesichert, und ein gesichertes Königthum entsprach den Gesinnungen der Tories. Später änderte sich das Verhältniss. Unter Königin Annas Regierung wüthete ein langdauernder Krieg zwischen England und Frankreich. Die Whigs bestanden auf Fortsetzung des Krieges, die Tories wünschten Herstellung des Friedens. Kurfürst Georg Ludwig von Hannover aber hatte 1707 ein Commando am Rhein geführt, hatte in dieser Stellung selbst am Kriege theilgenommen, hatte laut und bestimmt gegen die von den Tories für annehmbar erklärten Friedensbedingungen sich ausgesprochen. Diese Handlungen machten den Kurfürsten den Whigs eben so genehm, als sie ihm die Tories entfremdeten. Man sagte sogar, und es wurde geglaubt, die Tories im Ministerium, gestützt auf ihre Gesinnungsgenossen im Parlamente, beabsichtigten die Succession-Act wieder aufzuheben und Jakob III. zum Thronfolger zu erklären.

Die Whigs verlangten nunmehr 1713 die Einberufung des Kurfürsten zum Parlamente, in dessen Oberhaus ihm als Herzog von Cambridge ein Sitz eingeräumt worden war, und die Tories widerstrebten diesem Verlangen, während Leibniz den Kurfürsten zu bestimmen suchte, nach London sich zu begeben, wo man die Armee bereits für die Zwecke des Prätendenten zu desorganisiren beginne.

Man begreift jetzt, wie unter solchen Verhältnissen ein aus der Politik ganz fremden Gründen entstandener Streit zwischen Newton, dem fanatischen Tory, und Leibniz, dem Berather des Thronkandidaten der Whigs, sich persönlich zuspitzen konnte, wenn nicht musste. Man begreift jetzt die Worte von Johann Bernoulli in einem unter dem 29. Juli 1713 an Leibniz gerichteten Briefe[1]): „Sie theilen das Loos Ihres Fürsten, welchen unbillig denkende Engländer in gleicher Weise von der Thronfolge ausschliessen möchten, wie Sie selbst von dem Besitze der Differentialrechnung.“ Man begreift Leibnizens Antwort[2]) vom 19. August, es sei in der That so; ein befreundeter Engländer habe ihm geschrieben, in diesem Falle seien nicht etwa Mathe-

[1]) Leibniz III, 915 lin. 27—30. [2]) Ebenda 919 lin. 29—33.

matiker und Mitglieder der Royal Society gegen ein anderes Mitglied aufgetreten, sonden Tories gegen Whigs. Man begreift, dass solche Misshelligkeiten um so weniger ausgeglichen werden konnten, als es (S. 31) Leibniz verwehrt war, sich 1714 persönlich nach London zu begeben.

Kehren wir zu Newtons Privatleben zurück. Am 30. November 1703 traf ihn die Wahl zum Vorsitzenden der Royal Society, eine Wahl, welche sich dann alljährlich wiederholte. Im April 1705 wurde er von der Königin Anna in den Ritterstand erhoben und Sir Isaac Newton war von nun an sein Name. Sein Tod erfolgte erst 1727.

Wir haben die Lebensgeschichte Newtons hiermit so genau angegeben, als es für unsere späteren Zwecke erforderlich ist. Die mathematischen Leistungen des grossen Mannes müssen sich je nach ihrem Inhalte da und dort einreihen. Gegenwärtig haben wir es mit Untersuchungen über Reihen zu thun, welche zugleich der Entstehungszeit nach die ältesten mathematischen Ergebnisse sind, zu welchen Newton gelangte. In einem Briefe an Oldenburg[1]) vom 24. October 1676 sagt wenigstens Newton, er habe sich mit jenen Dingen beschäftigt, als die Pest in Cambridge ausbrach und ihn nöthigte von dort die Flucht zu ergreifen, *eo tempore pestis ingruens coegit me hinc fugere*, und ein späterer Zusatz bestimmt jene Zeit auf die Jahre 1665 und 1666. Jedenfalls wurde die Abhandlung *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* schon 1669 Barrow vorgelegt und von diesem im Juli desselben Jahres 1669 an Collins zur Mittheilung an Lord Brouncker geschickt[2]). Dieser Abhandlung war mithin damals eine nicht grade vertrauliche Verbreitung zu Theil geworden, und soweit sie Erfinderrechte begründet, muss sie als 1669 bekannt gemacht gelten, wenn der Druck auch erst im XVIII. Jahrh. erfolgte. Collins nahm 1669 eine Abschrift[3]), welche, wie spätere Vergleichung mit dem Originale gezeigt hat, eine durchaus sorgfältige und genaue war. Aber eine andere Massregel ergriff weder Collins noch Brouncker, so leicht sie ihnen gefallen wäre. Keiner von beiden vermittelte einen Abdruck der Newtonschen Abhandlung in den P. T., keiner von beiden liess den

[1]) *Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota etc. ou Correspondance de J. Collins et d'autres savants célèbres du XVII. Siècle relative à l'analyse supérieure* publiée par J. B. Biot et F. Lefort (Paris, 1856) pag. 125 lin. 8—11. Diese neueste und zuverlässigste Ausgabe citiren wir einfach als *Commerc. epistol.* [2]) *Commerc. epistol.* pag. 53—54. [3]) Ebenda pag. 54—75. Ein Abdruck des Originals wurde 1744 durch Castillion in den *Opuscula Newtonis* I, 3—28 veranstaltet.

Hauptinhalt wenigstens in die geschriebenen Protokolle der Royal Society aufnehmen. Aber dachte man damals überhaupt an derartige Sicherung eines geistigen Eigenthums? Allerdings. Als im Jahr 1664 Huygens mit R. Moray gemeinschaftlich sich um die Belohnung ihres Verfahrens, die geographische Länge mit Hilfe von Pendeluhren zu bestimmen, bewerben wollten und Huygens ängstlich war, irgend ein Unberechtigter möchte ihnen zuvorkommen, beruhigte ihn Moray, indem er ihm am 5. December von London aus schrieb[1], er habe Sorge dafür getragen, dass von ihrem Verfahren in den Protokollen der Royal Society gesprochen sei; ein solcher Eintrag habe seinesgleichen nicht, um Erfinderrechte zu sichern. Man war also in den Kreisen der Mitglieder der Royal Society durchaus mit der Wichtigkeit von Protokolleinträgen bekannt, welche das Datum einer Erfindung feststellten, ohne doch die Erfindung selbst der Oeffentlichkeit preiszugeben, sofern man dieses aus einem oder dem anderen Grunde nicht wünschte, und wenn Collins, wenn Brouncker es unterliessen, für Newton einen derartigen Schritt zu thun, so gibt es doch wohl keinen anderen Erklärungsgrund dafür als den, dass beide damals, als sie 1669 die Abhandlung erhielten, nicht erkannten, dass deren Inhalt verdiene, besonders gesichert zu werden. Wir beabsichtigen hiermit keinen besonderen Vorwurf gegen beide zu erheben, sondern nur festzustellen, wie Mathematiker, die man keinenfalls als Feinde Newtons bezeichnen kann, seine Erstlingsarbeit betrachteten.

Und doch bildete einen wesentlichen Bestandtheil der *Analysis per aequationes*, wie wir den Titel der Abhandlung künftig abkürzen, die Binomialreihe, welcher man 1727 bei Newtons Tode unter freilich veränderten Umständen eine solche Wichtigkeit beilegte, dass man sie aus allen anderen Leistungen des Verstorbenen auswählte, um als Inschrift auf seinen Grabstein in der Westminsterabtei eingemeisselt zu werden.

Es ist richtig, die Binomialreihe war 1669 nicht von befremdender Neuheit. Für den Fall eines positiven ganzzahligen Exponenten, der die Binomialreihe zu einer endlichen macht, welche nach einer den Exponenten um die Einheit übersteigenden Gliederzahl von selbst abbricht, war die Entwicklung seit mehr als einem Jahrhundert bekannt. Newtons Leistung bestand in der Ausdehnung der Reihe auf den Fall solcher Exponenten, welche die Eigenschaft positiver Ganzzahligkeit nicht besassen, und er vollzog sie durch ein Wallis nachgebildetes Interpolationsverfahren (Bd. II, S. 824).

[1] *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences* V, 157.

Newton hat dasselbe in dem (S. 64) erwähnten an Oldenburgs Adresse gerichteten, eigentlich aber zur Vorzeigung an Leibniz bestimmten Briefe vom 24. October 1676 auseinandergesetzt[1]). Wallis war, wie wir in Erinnerung bringen, die Quadratur von Curven von der Gleichung $y = (1 - x^2)^m$ gelungen, wenn m die Werthe 0, 1, 2, 3 u. s. w. besass. Jene Quadraturen waren alsdann der Reihe nach:

$$x,\; x - \frac{x^3}{3},\; x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,\; x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \text{ u. s. w.}$$

Newton suchte nach dem Gesetze dieser Entwicklung. Als erstes Glied erschien immer x, als zweites $-\frac{x^3}{3}$ vervielfacht mit der Zahl m, also $-\frac{0}{3}x^3, -\frac{1}{3}x^3, -\frac{2}{3}x^3, -\frac{3}{3}x^3$ u. s. w. Die ferneren Glieder ergaben sich nicht ganz so einfach. Die Exponenten der Potenzen von x und die ihnen gleichen Nenner der Zahlencoefficienten dieser Potenzen wuchsen zwar in arithmetischer Reihe der ungraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. Die Zähler der Coefficienten ergaben sich als die aufeinander folgenden Potenzen der Zahl 11, nämlich

$$11^1 = 11,\quad 11^2 = 121,\quad 11^3 = 1331,\quad 11^4 = 14641 \text{ u. s. w.},$$

sofern die einzelnen Ziffern jener Zahlen getrennt als Zähler betrachtet werden, also 1, 1, dann 1, 2, 1, ferner 1, 3, 3, 1, ebenso 1, 4, 6, 4, 1 u. s. w. Aber das war noch kein Bildungsgesetz. Als solches erkannte Newton, dass wenn 1 und m die beiden ersten Zähler waren, die folgenden sich aus ihnen durch fortgesetzte Multiplikation mit $\frac{m-1}{2}$, mit $\frac{m-2}{3}$, mit $\frac{m-3}{4}$ u. s. w. ergeben, wodurch das Abbrechen der Reihe, sobald durch ganzzahlig positive Wahl von m ein Faktor 0 auftrat, sich von selbst erklärte. Diese Bemerkung war ebenso neu wie das multiplikative Entstehen der Binomialcoefficienten, welche man bisher seit Michael Stifel (Bd. II, S. 397) stets additiv nach dem Gesetze $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ erhalten hatte. Newton ging nun den oben als Interpolation bezeichneten kühnen Schritt weiter; er meinte das von ihm gefundene Gesetz auch dann festhalten zu dürfen, wenn m keine positive ganze Zahl sei.

Bei $m = \frac{1}{2}$ entstanden ihm so die Coefficienten

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6},\quad \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{2}}{5} = -\frac{1}{40},\quad \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-2}{3}}{7} = \frac{1}{112} \text{ u. s. w.},$$

und da die Vorzeichen ausserdem wechseln mussten, so entstand ihm

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 122 flgg.

für die Fläche des Kreisabschnittes

$$x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 + \cdots.$$

Newton kam weiter auf den Gedanken, auch andere Reihen in ähnlicher Weise zu interpoliren. Die Entwicklungen von $(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$, von $(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$, von $(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$ u. s. w. gaben Reihen, deren Coefficienten jene vorerwähnten Zähler waren: 1, dann 1, 1, ferner 1, 2, 1 u. s. w. Die Interpolation führte zu

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots.$$

Aber jetzt erhob sich der Zweifel, ob die eigentlich ganz willkürliche Interpolation sich rechtfertigen lasse? Newton vervielfachte die Reihe $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots$ mit sich selbst und sah als Ergebniss $1 - x^2$ erscheinen. Er zog als weitere Sicherung des Ergebnisses aus $1 - x^2$ die Quadratwurzel nach ähnlichem Verfahren, wie es gehandhabt wird, wenn man eine angenäherte Quadratwurzel mit Hilfe von Decimalbrüchen berechnen will, und er fand wieder

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots.$$

Als ich diesen Einblick gewonnen, schreibt Newton[1], liess ich von Reiheninterpolationen ab und bediente mich jener Operationen als einer naturgemässeren Grundlage. Auch die Reihenentwicklung durch Division blieb mir nicht verborgen, eine weit leichtere Sache.

An einer etwas späteren Stelle des Briefes setzt Newton dann hinzu, er habe, während er die genannten Untersuchungen führte, durch Barrow Kenntniss von Mercators eben erschienener Logarithmotechnia erhalten. Da habe er um die begonnene Arbeit sich wenig mehr gekümmert, denn er habe vermuthet, Mercator werde die Wurzelausziehung grade so gut kennen wie die Division, oder es werden wenigstens, nachdem das Divisionsverfahren einmal enthüllt sei, Andere das Uebrige auffinden, bevor er ein zu schriftstellerischer Thätigkeit reifes Alter erreicht haben werde[2]).

So der Brief vom 24. October 1676. Newton hat in demselben den Vorhang weggezogen, hat einen vollen Einblick in seine geistige Werkstätte eröffnet, wie er nicht lehrreicher, nicht fesselnder geboten

[1]) *His perspectis neglexi penitus interpolationem serierum, et has operationes tanquam fundamenta magis genuina solummodo adhibui. Nec latuit Reductio per Divisionem, res utique facilior.* [2]) *prius quam ego aetatis essem maturae ad scribendum.*

werden kann. Hätte er in der Analysis per aequationes gleiche Offenheit walten lassen, so ist kaum zu zweifeln, dass Collins und Brouncker sie anders gewürdigt haben würden, als es der Fall war, aber Newton liess sich vielleicht aus schriftstellerischer Ungewandtheit den Vortheil einer spannenden Darstellung entgehen. Er schrieb zwar die Abhandlung und liess nicht, wie in dem Briefe vom October 1676 steht, die ganze Arbeit mehr oder weniger liegen, aber er bediente sich in ihr sofort derjenigen Mittel zur Reihenentwicklung, auf welche er erst zuletzt verfallen war, der Division und der Wurzelausziehung. Bei der Division machte er die Bemerkung, man könne mit gleichem Rechte

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \text{ und } \frac{1}{x^2+1} = x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - \cdots$$

setzen. Die erstere Entwicklung sei vorzunehmen, wenn x hinlänglich klein, die zweite, wenn x hinlänglich gross vorausgesetzt werde[1]). Als Beispiele der Wurzelausziehung dienen

$$\sqrt{a^2+x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \cdots$$

und

$$\sqrt{a^2-x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \cdots.$$

Auch eine Berechnung von $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}$ wird vorgenommen, und zwar so, dass jede der beiden Quadratwurzeln für sich als eine unendliche Reihe entwickelt und dann der Quotient beider Reihen wieder als Reihe gesucht wird. Das allgemeine Abhängigkeitsgesetz eines Binomialcoefficienten von dem unmittelbar vorhergehenden fehlt in der Abhandlung, wiewohl Newton dem Briefe zufolge es seit 1666 kannte.

Im weiteren Verlaufe der Analysis per aequationes, den vollständig zu schildern hier noch nicht der richtige Ort ist, ist auch von der Umkehrung der Reihen die Rede, d. h. von der Aufgabe aus $z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ die Darstellung von x durch eine nach Potenzen von z fortlaufende Reihe zu ermitteln[2]). Zunächst soll $\frac{1}{5}x^5$ das letzte in Rechnung gezogene Reihenglied sein, also die Gleichung

$$\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$$

stattfinden, aus welcher, wenn die höheren Potenzen von x ausser

---

[1]) *Priori modo procede cum x est satis parva, posteriori cum satis magna supponitur.* [2]) *Opuscula Newtoni* I, 20—21.

Acht bleiben, wegen $x - z = 0$, der Werth $x = z$ folgt. Newton ergänzt ihn zu $x = z + p$ und setzt diesen Werth in die einzelnen Glieder der angegebenen Gleichung, die er allerdings nicht mit für alle Glieder gleicher Genauigkeit sich verschafft. Er setzt nämlich

$$\frac{1}{5}x^5 = \frac{1}{5}z^5,\quad -\frac{1}{4}x^4 = -\frac{1}{4}z^4 - z^3p,\quad \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2,$$
$$-\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2,\ x = z + p,\ -z = -z$$

und durch Zusammenfassung

$$0 = \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 - p[z^3 - z^2 + z - 1] + p^2\left(z - \frac{1}{2}\right).$$

Wie er vorher schon manche Glieder bei Seite liess, so entfernt er jetzt abermals alle Glieder, welche in Bezug auf z den zweiten, in Bezug auf p den ersten Grad überschreiten oder p und z enthalten. Er behält also nur $0 = -\frac{1}{2}z^2 + p$, woraus $p = \frac{1}{2}z^2$ folgt und unter Benutzung einer zweiten Ergänzung $p = \frac{1}{2}z^2 + q$. Um q zu finden, setzt Newton den angenommenen Werth von p in die zwischen z und p gegebene Gleichung, welche ihm die Gestalt annimmt:

$$0 = \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^5 + \frac{1}{2}z^4 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^2$$
$$- q(z^3 - z^2 + z - 1) + \left(\frac{1}{4}z^4 + z^2q + q^2\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)$$

oder auch:

$$0 = -\frac{1}{20}z^5 + \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{6}z^3 + q\left(\frac{1}{2}z^2 - z + 1\right) + q^2\left(z - \frac{1}{2}\right).$$

Nunmehr wird das Glied mit q^2 vernachlässigt und aus der übrig bleibenden Gleichung die Folgerung gezogen

$$q = \frac{\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5}{1 - z + \frac{1}{2}z^2} = \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5.$$

Somit gewinnt er schliesslich

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots$$

und dabei beruhigt er sich. So ungründlich Newtons Verfahren ist und das Ergebniss, man möchte sagen, durch einen glücklichen Instinkt ermittelt, so überraschend richtig ist die gewonnene Reihe. Die Annahme $z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ entspricht ja $z = \log(1 + x)$, und daraus folgt

$e^z = 1 + x,\ x = -1 + e^z = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots$

Newton hat also hier im Vorbeigehen die Exponentialreihe entdeckt.

Wenn wir sagten, Newton habe sich bei der Entwicklung beruhigt, nachdem als letztes Reihenglied $\frac{1}{120}z^5$ aufgefunden war, so kam er doch nur ganz wenig später unter der Ueberschrift *De Serie progressionum continuanda*[1]), d. h. über die Fortsetzung der Reihen, auf das eigentliche Bildungsgesetz zurück. Hier sei, sagte er, im Vorbeigehen angemerkt, dass wenn 5 bis 6 Glieder jener Entwicklungen bekannt sind[2]), man dieselben meistens beliebig weiterführen kann. Als Gesetz von $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots$ nennt er dann die fortwährende Division des jedesmal vorhergehenden Zahlencoefficienten durch 4, 5, 6 u. s. w.

Um $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \cdots$ fortzusetzen, müsse man die Zahlencoefficienten durch 6×7, durch 8×9 u. s. w. dividiren. Bei $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \cdots$ seien die Divisoren 5×6, 7×8 u. s. w. Die Reihe

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

bilde die folgenden Zahlencoefficienten durch Vervielfachung mit $\frac{7 \times 7}{8 \times 9}$, mit $\frac{9 \times 9}{10 \times 11}$ u. s. w. Ein Beweis dieser Bildungsgesetze ist nicht gegeben, die einfache Induction muss als solcher dienen. Dagegen weiss Newton, dass der Werth der drei letztgenannten Reihen $\sin z$, $\cos z$, $\arcsin z$ ist.

Auch über Reihenconvergenz äussert sich Newton[3]). Es entgeht ihm nicht, dass bei der Umkehrung von Reihen es nothwendig sei zu zeigen, wie die Ergänzungsgrössen $p, q, r \ldots$, unter deren fortgesetzter Annahme die Entwicklung vor sich geht, schliesslich kleiner als jede gegebene Grösse werden[4]). Er bedient sich zu diesem Zwecke der Reihe $x + x^2 + x^3 + \cdots$, welche die Eigenschaft besitzt, dass bei $x = \frac{1}{2}$ jedes Glied derselben den gleichen Werth besitzt wie die Summe aller ihm nachfolgenden Glieder. Bei $x < \frac{1}{2}$ ist jedes Glied mehr als die Summe der folgenden Glieder. Allerdings heisst bei Newton

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 22—23. [2]) *quinque vel sex terminis istarum radicum cognitis.* [3]) *Opuscula Newtoni* I, 27—28: *Demonstratio resolutionis aequationum affectarum.* [4]) *Tandem evadet minor quavis data quantitate.*

die Voraussetzung umgekehrt $x > \frac{1}{2}$ [1]), aber das ist ein Schreibfehler. Setzt man nämlich $x^{k+1} + x^{k+2} + \cdots = R = \frac{x^{k+1}}{1-x}$, so ist ersichtlich $x^k > R$ wenn $x^k + R > 2R$ oder, wegen

$$x^k + R = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \cdots = \frac{x^k}{1-x},$$

wenn $\frac{x^k}{1-x} > \frac{2x^{k+1}}{1-x}$, d. h. wenn $x < \frac{1}{2}$. Die bei anderen Reihen zu den einzelnen Gliedern hinzutretenden Zahlencoefficienten, sagt Newton weiter[2]), nehmen meistens unaufhörlich ab, und nehmen sie ja einmal zu, so ist nur erforderlich, dass x noch kleiner gewählt werde. In diesem Ausdrucke noch kleiner, *adhuc minor*, finden wir den Beleg dafür, dass das vorhin bemängelte $x > \frac{1}{2}$ nur Schreibfehler, nicht Denkfehler war.

86. Kapitel.

Reihen. Leibniz. Halley. De Moivre. Jakob Bernoulli. Kettenbrüche.

Die Newtonsche Analysis per aequationes gelangte, wie wir uns erinnern (S. 64), 1669 in die Hände von Collins, welcher durch Barrow gradezu aufgefordert war, die Weiterverbreitung zu befördern. Waren wir daher in der Lage, Collins und ausser ihm Brouncker dafür verantwortlich zu machen, dass sie die Abhandlung nicht so ihrem Werthe nach würdigten, dass sie einen Abdruck in den P. T. oder eine Inhaltsangabe in den Protokollen der Royal Society vermittelten, so wurde doch wenigstens Gregory durch Collins mit den Reihen jener Abhandlung bekannt gemacht. Ein Brief von Collins an Gregory[3]) vom 24. December 1670 theilte diesem die Reihen für den Sinus, den Cosinus, den Arcussinus als Erfindungen Newtons mit. Gregorys Antwort[4]) ist vom 15. Februar 1671. Er meine, so schreibt Gregory, Newtons Methode einigermassen[5]) zu kennen, und weil Collins ihm einige Reihen gegeben habe, für welche er ihm dankbar sei, so wolle er Aehnliches zurückgeben.

Wenn r den Halbmesser eines Kreises, a einen Bogen, t dessen

[1]) *si x superet* $\frac{1}{2}$. [2]) *Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decrescunt perpetuo, vel si quando increscant, tantum opus est ut x aliquoties adhuc minor supponatur.* [3]) *Commerc. epistol.* pag. 78—79. [4]) Ebenda pag. 79—80. [5]) *aliqua ex parte.*

Tangente, s dessen Sekante bedeute, so sei

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \cdots,$$

$$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \cdots,$$

$$s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7} + \cdots.$$

Eine Ableitung der Reihen ist auch andeutungsweise nicht vorhanden. Wird die Tangente dem Halbmesser gleich, $t = r$, was bei dem Bogen eintritt, der den Centriwinkel von 45^0 bespannt, wo also $a = \frac{r\pi}{4}$ ist, so geht die erste Reihe von Gregory über in

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Eben diese Entwicklung für $\frac{\pi}{4}$ fand einige Jahre nachher auch Leibniz und theilte sie Freunden mit. Da man in späterer Zeit Leibniz wegen dieser Reihe des geistigen Diebstahls an Gregory beschuldigt hat, so ist, um Grund oder Ungrund jener Anklage zu erkennen, die Sache gleich hier genau zu untersuchen.

Zu seinem ersten Londoner Aufenthalte von Januar bis März 1673 brachte Leibniz an gedruckten mathematischen Arbeiten nur die *Dissertatio de arte combinatoria* mit. Der Ausführung nahe waren seine Gedanken über eine allgemeine Charakteristik, über eine anzufertigende Rechenmaschine. Andere Pläne mögen nur als Geistesblitze in Gesprächen aufgetaucht sein, aber das Vorhandene, das nur im Keime sich Zeigende genügte doch, wie wir wissen (S. 28), Leibnizens einstimmige Aufnahme in die Royal Society zu bewirken. Mit Collins traf Leibniz, wie wir gleichfalls wissen, nicht zusammen. Dagegen führte er am 2. Februar 1673 ein Gespräch mit Pell, welches mittelbar auf Reihen sich bezog, und von welchem deshalb hier die Rede sein muss. Man kennt dessen Inhalt aus einem am 3. Februar, also gleich am folgenden Tage, von Leibniz an Oldenburg gerichteten Brief[1]). Leibniz hatte zu Pell von dem gesprochen, was er erzeugende Differenzen nannte, und Pell hatte erwidert, ganz Aehnliches sei in dem Buche *Observationes diametrorum solis et lunae apparentium* vorhanden, welches 1670 im Drucke erschienen war. Der Verfasser jenes Buches, Gabriel Mouton[2]) (1618—1694) aus Lyon, war eigentlich Theologe und als Vikar an der Paulskirche seiner Vaterstadt angestellt. Leibniz wusste, dass ein Werk des von

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 86—91 und Leibniz I, 27—31. [2]) Poggendorff II, 219.

Pell ihm genannten Titels in Vorbereitung war: das hatte er offenbar in Paris gehört. Dass das Werk wirklich erschienen war, war ihm unbekannt. Er ging zu Oldenburg, in dessen Bibliothek er es vorfand und entlieh. Bei aufgeregt raschem Durchlesen fand sich, dass Pell die volle Wahrheit gesagt hatte[1]. Die Ausdrucksweise eines „bei Herrn Oldenburg, Sekretär der Royal Society leihweise entnommenen Buches" in einem an Oldenburg selbst gerichteten Briefe lässt vermuthen, dass es ein sehr officieller, vielleicht auf Oldenburgs eigene Veranlassung geschriebener Brief war, in welchem Leibniz für alle Fälle seine von Mouton unabhängige Gedankenfolge darlegen sollte.

Mouton war es auf den *praktischen* Kunstgriff angekommen, durch Bildung wiederholter Differenzen von in Tafeln geordneten Zahlen diese Tafeln selbst leicht zu ergänzen, was, wie Pell in jenem Gespräche vom 2. Februar bemerkte, auch Briggs bei Berechnung seiner Logarithmentafel schon theilweise ins Auge gefasst hatte. Leibniz war von der *theoretischen* Frage ausgegangen, ob nicht bei den höheren Potenzen der in der natürlichen Zahlenreihe aufeinander folgenden Zahlen ein Bildungsgesetz sich erkennen lasse dem ähnlich, welches bei den Quadratzahlen obwalte, die bekanntlich je um eine ungrade Zahl von einander abstehen, und zwar n^2 von $(n+1)^2$ um $2n+1$. Er fand, dass bei den Kubikzahlen die aufeinander folgenden Unterschiede in fünf Reihen sich ordnen lassen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} &&&&&& 0 && 0 && 0 && \\ &&&&& 6 && 6 && 6 && 6 & \\ &&&& 6 && 12 && 18 && 24 && 30 \\ && 1 && 7 && 19 && 37 && 61 && 91 \\ 0 && 1 && 8 && 27 && 64 && 125 && 216 \end{array}$$

und er nannte die in den vier unteren Reihen zu äusserst links stehenden Zahlen 0, 1, 6, 6 die Erzeugenden, *generatrices*, weil aus ihnen die anderen Kubikzahlen sich bilden. Es ergab sich nämlich

$$0^3 = 0 \cdot (1)$$
$$1^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (1)$$
$$2^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (2) + 6 \cdot (1)$$
$$3^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (3) + 6 \cdot (3) + 6 (1)$$

u. s. w.

Die eingeringelten Zahlen sind die aufeinander folgenden Binomial-

[1] *Quae apud Dominum Oldenburgium Soc. Reg. Secretarium sumtum mutuo tumultuarie percurri, et inveni verissima dixisse Pellium.*

coefficienten derjenigen Potenz, deren Exponent die jeweils zu kubirende Zahl ist: die nicht eingeringelten Faktoren sind die Erzeugenden. Somit würde weiter gefunden werden:

$$4^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (4) + 6 \cdot (6) + 6 \cdot (4)$$

$$5^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (5) + 6 \cdot (10) + 6 \cdot (10)$$

und allgemein: $n^3 = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (n) + 6 \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + 6\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}\right)$.

Leibniz führt zwar die allgemeine Bildung von n^3 nicht aus, sagt aber, seine Analyse habe ihm die Allgemeinheit der Behauptung dargethan[1]). So geistreich Leibnizens Gedanke ist, so kann man ihn doch kaum eine Beschäftigung mit unendlichen Reihen nennen. Die Anregung dürfte ihm in Deutschland geworden sein, wo Faulhaber (Bd. II, S. 684) den Grundstein zu der Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung gelegt hatte.

Jetzt lernte Leibniz Mercators Logarithmotechnia kennen und vermuthlich leitete sie ihn zu wirklichen Untersuchungen unendlicher Reihen. Jetzt begann er auch andere Werke zu studiren. Er verdankte dieses wesentlich dem persönlichen Umgange mit dem gleich ihm in Paris verweilenden Huygens.

Christian Huygens[2]) war 1666 durch Colbert in die Akademie der Wissenschaften nach Paris berufen worden und verblieb dort, abgesehen von zwei Reisen, welche er 1670 und 1675 nach Holland machte, bis 1681. In diesem Jahre zog er nach Aufhebung des Ediktes von Nantes in seine Heimath nach dem Haag sich zurück. Dort starb er 1695. Wir werden von Huygens mathematischem Hauptwerke, dem *Horologium oscillatorium* von 1673, mehrfach zu reden haben. Gegenwärtig nennen wir es nur, um die Bemerkung daran zu knüpfen, dass Huygens dasselbe beim Erscheinen Leibniz schenkte, der kurz vorher von dem ersten Londoner Aufenthalte nach Paris zurückgekehrt war.

Beim Lesen des Horologium oscillatorium sah Leibniz deutlich ein, wie unwissend er sei, und wie er mit dem mathematisch Vorhandenen sich bekannt machen müsse[3]). Er studirte die Schriften von Descartes, von Pascal, von Gregorius von St. Vincentius, auch die 1659 gedruckte *Synopsis Geometrica* von Honoratus Fabri[4]) (1607—1688), einem französischen Jesuiten, welcher erst im Ordenscollegium in Lyon Philosophie lehrte, später nach Rom versetzt

[1]) *Idque Analysis mihi universale esse comprobarit.* [2]) Allgemeine deutsche Biographie XIII, 480—486. [3]) Leibniz III, 72—73 Anmerkung. Gerhardt, Math. Deutschl. S. 142. [4]) Poggendorff I, 711.

wurde und in dem Gerichtshofe der Inquisition eine angesehene Stellung einnahm.

Leibniz studirte als genialer Denker. Mit der Aufnahme fremder Forschungsergebnisse ging die Entwerfung und Ausarbeitung eigener Untersuchungen Hand in Hand. Hatte er gelernt, wie Flächen durch Zerlegung in Rechtecke quadrirt werden konnten, so nahm er selbst Zerlegungen in Dreiecke vor, und er nannte dieses **Transmutation**.

Eine Mittheilung der durch Transmutation erhaltenen Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

erfolgte an Huygens, der unter dem 6. November 1674 die Schrift, welche den Titel *Quadrature arithmétique* geführt zu haben scheint, mit grossen Lobeserhebungen zurückschickte. Es ist nichts geringes nach meiner Ansicht, schreibt er[1], bei einer Aufgabe, die so viele Geister in Bewegung gesetzt hat, einen neuen Weg gefunden zu haben, welcher einige Hoffnung zu geben scheint, zu der wahren Auflösung zu gelangen. Das Datum der sicherlich vor dem 6. November 1674 an Huygens gelangten Mittheilung genau zu kennen wäre von einiger Wichtigkeit, weil es allem Anscheine nach dem der Entdeckung durch Leibniz entsprach, welcher kaum gesäumt haben dürfte, den am gleichen Orte mit ihm lebenden Gönner von seinem Funde in Kenntniss zu setzen.

Gegen April 1675 schickte alsdann Leibniz seine Reihe auch an Oldenburg, welcher am 12. dieses Monates den Empfang bestätigte[2]) und dabei Gregorys Arcustangensreihe angab. Ende Juli 1676 hat dann Oldenburg weitere Reihen des seit October 1675 verstorbenen Gregory brieflich an Leibniz mitgetheilt[3]), und am gleichen Datum schickte er ihm die Abschrift eines für Leibniz bestimmten Briefes Newtons[4]), in welchem die Binomialreihe, die Sinusreihe und die Cosinusreihe enthalten war. An den Rand dieses Briefes schrieb Leibniz nach seiner Gewohnheit mancherlei Notizen, die sicherlich nur für den eigenen Gebrauch bestimmt waren. An einer Stelle heisst es[5]): „Das ist schön: das gibt eine höchst elegante Abkürzung meiner durch Transformation erhaltenen Kreismessung“. Er war also in unbefangenster Sicherheit über sein Anrecht an die oft erwähnte Reihe. Nun kommt der Zeitfolge nach ein Brief Leibnizens[6]) an

[1]) Leibniz II, 16. [2]) Ebenda I, 60—69. [3]) Ebenda I, 88—99. [4]) Ebenda I, 100—113. [5]) Ebenda I, 104 Anmerkung: *Hoc pulchrum et hinc etiam elegantissimum compendium pro mea circuli dimensione ope transformationis facta.* [6]) Ebenda I, 114—122.

Oldenburg vom 27. August 1676, in welchem die Transmutation als Quelle der Reihe für $\frac{\pi}{4}$ angegeben ist, in welchem auch eigene Ableitungen der Sinusreihe und der Cosinusreihe sich vorfinden.

Aber auch an die Veröffentlichung seiner arithmetischen Quadratur durch den Druck dachte Leibniz ernstlich, und, bevor er im Herbste 1676 Paris verliess, war eine Abhandlung druckfertig[1]). Ihr Titel war *De quadratura arithmetica circuli, ellipseos et hyperbolae, cuius corollarium est trigonometria sine tabulis. Autore G. G. L.* Leibniz übergab sie bei der Abreise einem Agenten, der den Druck überwachen sollte, aber als Verzögerungen eintraten und Leibniz überdies immer mehr und mehr hinzu entdeckte, unterblieb der Druck. Erst 1682, 1684, 1691 kamen einander ergänzende Veröffentlichungen in den A. E. zu Stande.

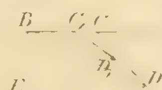
Unter allen Umständen ist eine Verschiedenheit zwischen dem, was Gregory und was Leibniz fand, bemerkenswerth. Wenn Gregory ausschliesslich die Kreisbogenfläche aus der trigonometrischen Tangente t mittels der Reihe $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots$ berechnete, so hatte Leibniz die Quadratur eines Ausschnittes sich als Aufgabe gestellt, der durch einen Bogen irgend eines Mittelpunktkegelschnittes begrenzt war. Die Hyperbel nicht minder als die Ellipse oder der Kreis konnte jenen die Figur abschliessenden Bogen liefern, und die Reihe änderte sich nur insofern, als bei der Hyperbel alle Glieder positiv zu nehmen waren, die Zusammenfassung aller Fälle folglich durch die Reihe $\frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7} + \cdots$ dargestellt war[2]). Als Einheit ist beim Kreise der Halbmesser angenommen, und die Tangente t darf nicht grösser als der Halbmesser gewählt werden[3]). Der deutlichste Nachweis der Reihe für den Kreis, bei welchem das Leibniz eigenthümliche Verfahren der Transmutation, d. h. die Bildung eines Sectors recht klar hervortritt, kann dem *Compendium quadraturae arithmeticae* entnommen werden, welches sich handschriftlich erhalten hat. Es besteht aus 51 Sätzen, deren Beweise allerdings kaum mehr als angedeutet genannt zu werden verdienen. Der Gang für den hier in Rede kommenden Satz beim Kreise ist folgender[4]).

[1]) Leibniz I, 84. [2]) Diese Zusammenfassung findet sich in dem Briefe vom 27 August 1676. Leibniz I, 117. [3]) Leibniz V, 97: *Regula huc redit ut Tangente, quae radio non major sit, posita b, radio Unitate, arcus ipse scil. quadrante non major sit* $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. Dann ferner ebenda V, 107 lin. 4: *Oportet autem AB non esse minorem quam BC.* [4]) Ebenda V, 106—107. Vergl. dazu Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen S. 46—47

Ist (Figur 10) $AC \perp BD$ und ebenso $HD \perp BD$, so ist ersichtlich $\triangle CBA \sim BDH$, also $\frac{CB}{CA} = \frac{BD}{BH}$. Daraus folgt

$$\frac{CB^2}{CA^2} = \frac{BD^2}{BH^2} = \frac{BH \cdot BE}{BH^2} = \frac{BE}{BH}.$$

Man kann aber auch schreiben $\frac{BE}{BH} = \frac{CB^2}{CA^2} = \frac{CB^2}{AB^2 + CB^2} = \frac{t^2}{r^2 + t^2}$ und $BE = \frac{2rt^2}{r^2+t^2} = 2\left[\frac{t^2}{r} - \frac{t^4}{r^3} + \frac{t^6}{r^5} - \frac{t^8}{r^7} + \cdots\right]$, indem von der Division Gebrauch gemacht wird, deren Anwendung zur Reihenentwicklung Leibniz bei Mercator kennen gelernt hatte. Hier war DC Berührungslinie an den Kreis in D. Wird auch an den benachbarten Kreispunkt D_1 eine Berührungslinie D_1C_1 gezogen, welche als gradlinige Fortsetzung von DD_1 betrachtet werden darf, so erkennt man, dass





$$\triangle CDC_1 = \frac{CC_1 \cdot BE}{2}$$

$$= CC_1\left[\frac{t^2}{r} - \frac{t^4}{r^3} + \frac{t^6}{r^5} - \frac{t^8}{r^7} + \cdots\right].$$

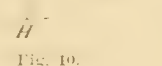


Fig. 10.

Das Dreieckchen war dadurch in eine unendliche Summe von Gliedern wechselnden Vorzeichens verwandelt — Transmutation — deren jedes als Rechteckchen von der Höhe $\frac{t^{2k}}{r^{2k-1}}$ und von der Basis CC_1 sich darstellt, CC_1 als sehr kleines Stückchen der $BC = t$ gedacht. Solche Rechteckchen zu summiren verstand man. Das Glied $\frac{t^{2k}}{r^{2k-1}} \cdot CC_1$ gibt über die ganze BC summirt $\frac{t^{2k+1}}{2k+1\; r^{2k-1}}$. Das ganze gemischtlinige Dreieck aus dem Bogen BD und den Berührungslinien BC und DC ist demnach

$$\frac{t^3}{3r} - \frac{t^5}{5r^3} + \frac{t^7}{7r^5} - \frac{t^9}{9r^7} + \cdots.$$

Aber das Viereck $ABCD$ ist das Doppelte des Dreiecks ABC oder $2 \cdot \frac{rt}{2} = rt$, und zieht man von ihm das vorher ermittelte gemischtlinige Dreieck BCD ab, so bleibt der Kreissektor

$$ABD = tr - \frac{t^3}{3r} + \frac{t^5}{5r^3} - \frac{t^7}{7r^5} + \cdots.$$

Jetzt gewinnt die oben erwähnte Bedingung[1]), dass AB nicht

[1]) Leibniz V. 107 lin. 4.

kleiner als EC sein dürfe, ihre richtige Bedeutung. Leibniz erkannte offenbar, dass nur unter dieser Bedingung, die man auch in der Form $r = 1$ und $t < 1$ anschreiben kann, die einzelnen Glieder von

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots$$

immer kleiner und kleiner werden und daraus ein Satz folgt, den er als 49. Satz des Compendium quadraturae arithmeticae so ausspricht[1]): **Wenn eine Grösse a einer unendlichen Reihe**

$$b - c + d - e + f - g \text{ etc.}$$

gleich ist, so ist b, $b - c + d, \cdots$ grösser als a, und der Ueberschuss beträgt weniger als c, als $e \ldots$; dagegen ist $b - c$, $b - c + d - e, \cdots$ kleiner als a, und der Mangel beträgt weniger als d, als $f \ldots$. Jene Zusammenstellung von 51 Sätzen war offenbar nicht selbst zum Druck bestimmt. Sie bildete für Leibniz nur die Gedankenfolge zu einer genauer auszuarbeitenden Abhandlung, und da brauchte nicht alles und jedes breit erörtert zu werden, was ihm selbst schon in knappster Andeutung verständlich war.

Um so deutlicher sprach er den wichtigen Satz, dass eine Reihe, deren Glieder beständig abnehmen[2]) und alternirend positiv und negativ sind[3]), einen endlichen Werth besitze in einem allerdings sehr viel späteren Briefe vom 10. Januar 1714 gegen Johann Bernoulli aus[4]). Wegen des engen Zusammenhanges mit dem Satze im Compendium quadraturae arithmeticae greifen wir bis zu jenem Briefe vor und entnehmen ihm den strengen Beweis. Die Reihe

$$\overbrace{a - b + c}^{L} - d + e - f + g - h + i - k \text{ etc.}$$

(with M marking $a - b + c - d + e - f$ by an underbrace)

$$\underbrace{a - b + c - d + e - f}_{M} + g - h + i - k \text{ etc.}$$

sei von der vorgeschriebenen Art. Die Glieder sollen ins Unendliche abnehmen, so dass jedes kleiner als das nächstvorhergehende ist[5]). Leibniz nennt nun die ganze Reihe S, während L, M die Zusammenfassung der Glieder bis zu e, f einschliesslich bedeutet, dann sei $L > S > M$. Es ist erstens $L > S$, weil L in S übergeht, indem mehr subtrahirt wird (nämlich f, h, ...) als addirt (nämlich g, i, ...) Es ist zweitens $M < S$, weil M in S übergeht, indem mehr addirt wird (nämlich g, i, ...) als subtrahirt (nämlich h, k ...). Der Unterschied $L - M = f$ muss grösser sein als $L - S$ oder als $S - M$.

---

[1]) Leibniz V, 112. [2]) *continuo decrescentes.* [3]) *alternationis affirmativae et negativae.* [4]) Leibniz III, 926. [5]) *Termini decrescant in infinitum, ita ut quivis sit minor proxime antecedente.*

Geht man beliebig weit, so wird f kleiner als jede gegebene Grösse[1]). Das ist genau der Beweis des Convergenzsatzes für Reihen mit alternirendem Vorzeichen und unendlich abnehmenden Gliedern, wie er in den neuesten Lehrbüchern noch immer vorgetragen wird, denn ob man sagt $f-g$, $h-i, \ldots$ und $g-h$, $i-k, \ldots$ seien positiv und deshalb $L > S > M$, oder ob man der Leibnizischen Ausdrucksweise sich bedient, kann doch nur als Unterschied älteren und neueren mathematischen Sprachgebrauches erachtet werden.

Wir haben die Aufsätze in den A. E. genannt, durch welche die Reihe $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ in die Oeffentlichkeit drang, während bis dahin weder Gregory noch Leibniz mehr als halbvertrauliche briefliche Mittheilungen von sich gegeben hatten. Die erste gedruckte Erörterung des Gegenstandes in den A. E. von 1682 führt den Titel: *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa*[2]). Wir bringen sie aus zwei Gründen zur besonderen Erwähnung. Erstens sind in ihr zunächst beweislos die Summen einiger anderen numerischen Reihen angegeben, auf die wir noch zurückkommen werden, zweitens kommt dort ein Ausdruck und ein Begriff zuerst vor, denen nicht früher als in unserer Zeit eine genauere Beachtung zu Theil wurde: die Partialreihe, *series partialis*.

Die Reihe der Zahlen $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots$, sagt Leibniz, sei eine harmonische, und harmonisch seien auch die Reihen, deren Glieder durch einen Sprung[3]) aus den genannten Zahlen hervorgehen $\frac{1}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9} \cdots$ ebenso wie $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11} \cdots$. Die Kreisreihe entstehe, indem man die zweite Partialreihe von der ersten abziehe[4]). Leibniz bleibt dann noch einen Augenblick bei sprungweise gebildeten Reihen stehen. Fasse man in der Kreisreihe je ein positives und ein ihm unmittelbar nachfolgendes negatives Glied zusammen, so entstehe

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195} + \frac{1}{323} + \cdots.$$

Die Nenner der Glieder dieser Reihe sind aber auch wieder durch Sprünge ausgelesen[5]), und zwar aus der Reihe der um eine Einheit verminderten Quadratzahlen, d. h. aus der Reihe 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99 .... Wählt man unter ihnen die erste und dann jeweils

[1]) *Continuando quantum lubet f est minor data.* [2]) Leibniz V, 118—122. [3]) *per saltum.* [4]) *posteriorum seriem partialem a priori subtrahendo.* [5]) *excerpti per saltum.*

die vierte Zahl, so hat man unsere Zahlen[1]). Partialreihen sind demnach für Leibniz solche, deren Glieder aus einer anderen gesetzmässigen Reihe von einem Anfangsgliede aus durch Sprünge von gleichbleibender Weite hervorgeholt werden.

Zwischen Leibnizens Brief an Oldenburg vom 27. August 1676 und dem Aufsatze von 1682 liegt Leibnizens zweiter Londoner Aufenthalt im October 1676. Damals lernte er Collins persönlich kennen. Damals entstand wahrscheinlich ein von Leibnizens Hand geschriebener in seinem Nachlasse gefundener Auszug aus Newtons Analysis per aequationes. In dem dritten Aufsatze über die Kreisreihe, in der *Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum, quae centrum habent* (A. E. von 1691) hat Leibniz auch seine englischen Wettbewerber in der Reihenlehre genannt. Er gibt dort[2]) die verschiedenen Reihenentwicklungen, von denen wir gesprochen haben, an und sagt, sie rührten theils von ihm her, theils von anderen wie Mercator, Newton, Gregory.

So weit können wir fürs erste die Arbeiten verfolgen, durch welche Newton und Leibniz sich um die Reihenlehre verdient machten, ohne die Zeitgrenze 1700 zu überschreiten, ohne Kenntnisse vorauszusetzen, welche einem anderen Gebiete angehören, und welche uns nöthigen, den Bericht über ihre Anwendung mit der Geschichte jenes Wissenszweiges selbst zu verbinden. Dagegen schliessen sich hier noch einige Arbeiten anderer Mathematiker an, welche ungezwungen als Fortsetzer der Newtonschen und Leibnizischen Gedanken bezeichnet werden können.

Wir nennen in erster Linie Edmund Halley mit einer Abhandlung von 1695 über Logarithmenberechnung[3]). Wir haben gesehen, dass bei Mercator, bei Gregory die Proportionalität von Logarithmen gegebener Zahlen mit gewissen Reihen auftrat, aber der Proportionalitätsfaktor, der Modulus des Logarithmensystems, wenn ein später Ausdruck gebraucht werden darf, kam nicht zu deutlicher Kenntniss. Auf diese Erweiterung des Wissens legte Halley ein grosses Gewicht, sowie auch auf die Gewinnung logarithmischer Reihenentwicklung ohne Einmischung der Quadratur der Hyperbel, vielmehr durch rein analytische Betrachtungen, welche von Newtons Binomialtheorem ausgehen. Wir schicken ferner voraus, dass in Halleys recht schwer verständlichem Aufsatze von Neperschen Logarithmen im Gegensatze zu Briggischen Logarithmen die

---

[1]) *ex cujus serici numeris quartus quisque post primum noster est.* [2]) Leibniz V, 129. [3]) P. T. XIX, 58—67. Vergl. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen S. 38—40.

Rede ist. Unter letzteren versteht Halley diejenigen von der Grundzahl 10. Erstere sind für ihn diejenigen, welche mit 0,434 294 48 vervielfacht oder durch 2,302 585 dividirt werden müssen, um in Briggische überzugehen. Das sind also natürliche Logarithmen und keineswegs die zuerst von Neper erhaltenen (Bd. II, S. 672).

Halley will das Verhältniss, die Ratio, zweier Zahlen dadurch genauer darstellen, dass er Theile desselben, kleine Verhältnisse, Ratiunculae, ins Auge fasst. Man schiebe z. B. zwischen die Zahlen 1 und 10 mittlere Proportionale ein 100 000 an der Zahl, so werden zwischen 1 und 2 sich 30 102, zwischen 1 und 3 sich 47 712 solcher eingeschobenen Zahlen finden, welche, als Potenzen der Grundzahl aufgefasst, Exponenten besitzen, welche um je $\frac{1}{100\,000}$ von einander abstehen und dieses $\frac{1}{100\,000}$ ist die Ratiuncula. Allgemeiner ist sie $\frac{1}{n}$, sofern n die sehr gross gewählte Zahl 100 000 oder auch eine andere grosse Zahl darstellt. Ist etwa a die Basis und $1+q$ eine Zahl, so wird $a^{\frac{m}{n}} = 1 + q$ und $a^{\frac{1}{n}} = (1+q)^{\frac{1}{m}}$,

$$a^{\frac{1}{n}} - a^0 = (1+q)^{\frac{1}{m}} - 1.$$

Aber die kleine Differenz $a^{\frac{1}{n}} - a^0$ lässt sich, wenn a und n gegeben sind, als Vielfaches von $\frac{1}{n}$, etwa als $\frac{k}{n}$ berechnen, wodurch k selbst bekannt wird. Nachdem $\frac{k}{n}$ als Werth von $(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1$ erkannt ist, wird auf die Potenzgrösse $(1+q)^{\frac{1}{m}}$ der binomische Lehrsatz angewandt. Halley findet:

$$(1+q)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}\cdot q + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1\cdot 2}q^2 + \cdots.$$

Ist m sehr gross, so dürfen in den Binomialcoefficienten, für welche Halley sich des bei Oughtred schon vorkommenden Namens der Unciae, Klammergrössen, bedient, höhere Potenzen von $\frac{1}{m}$ weggelassen werden. Man darf also schreiben

$$\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2m},\quad \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{3m} \text{ u. s. w.}$$

So entsteht

$$(1+q)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}q - \frac{1}{2m}q^2 + \frac{1}{3m}q^3 - \cdots$$

und

$$\frac{k}{n} = (1+q)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m}\left(q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \cdots\right).$$

Mithin

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{k}\left(q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \cdots\right),$$

als der für die Basis a sich ergebende Logarithmus von $1 + q$. Nimmt man umgekehrt als Ausgangspunkt

$$\log(1+q) = \frac{1}{k}\left(q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \cdots\right) = \frac{m}{k}\left[(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1\right],$$

so ist auch

$$(1+q)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{k}{m}\log(1+q) \quad \text{und} \quad 1 + q = \left[1 + \frac{k}{m}\log(1+q)\right]^m.$$

Wird hier rechter Hand die Binominalentwicklung vorgenommen und $k \cdot \log(1+q) = L$ gesetzt, so entsteht bei wiederum als sehr gross angenommenem m die Reihe $1 + q = 1 + L + \frac{L^2}{1 \cdot 2} + \cdots$.

Sollen Briggische Logarithmen gefunden werden, so ist $k = 2{,}302\,585$, wie wir (S. 81) angekündigt haben. Diese Zahl kann aber auch viel genauer ausgerechnet werden. Halley gibt sie auf 60 Decimalstellen. Auf ebenso viele Decimalstellen gibt er das reciproke $\frac{1}{k} = 0{,}434\,299\,48 \cdots$, auf ebenso viele die Briggischen Logarithmen der Primzahlen unter 20, also von 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Halley selbst hat die umfangreichen, ermüdenden Rechnungen, deren Ergebnisse er mittheilt, nicht ausgeführt. Sie rühren vielmehr von Abraham Sharp[1]) (1651—1742) her. Dieser ebenso zuversichtliche als zuverlässige Rechner begann als Handelslehrling, war dann Schulmeister, Steuerbeamter, Buchhalter, Gehilfe an der Sternwarte zu Greenwich, zuletzt Privatmann in seiner Vaterstadt Little Horton nicht weit von Bradford und errichtete sich daselbst aus eigenen Mitteln eine kleine Sternwarte, um seinen astronomischen Neigungen sich hingeben zu können.

Der Newtonschen Richtung gehörte auch Abraham de Moivre[2]) (1667—1754) an, der aus protestantischer Familie in Vitry in der Champagne geboren, noch in jungen Jahren nach der Aufhebung des Ediktes von Nantes Frankreich verliess. Er lebte dann in London und ernährte sich hauptsächlich durch Ertheilung mathematischen Unterrichtes. Seit 1697 gehörte er der Londoner Royal Society als

[1]) Poggendorff II, 917. [2]) *Histoire de l'Académie des sciences pour* 1754 (Histoire pag. 175—184).

Mitglied an, aber schon etwas früher legte er ihr eine Arbeit[1]) vor, welche der Potenzerhebung unendlicher Multinomien, d. h. also dem polynomischen Lehrsatze gewidmet war. Leibniz hatte zwar schon mit derselben Aufgabe sich beschäftigt und in einem Briefe an Johann Bernoulli vom Mai 1695 davon gesprochen[2]), aber De Moivre war jedenfalls der erste Veröffentlicher einschlagender Untersuchungen. Die angeführte De Moivresche Abhandlung betrifft, wiewohl der Titel auch Wurzelausziehung einzubegreifen scheint, ausschliesslich den Fall von Potenzen mit ganzzahlig positivem Exponenten m und gibt ausführlich die Glieder mit z^m, z^{m+1} bis einschliesslich z^{m+6}, welche in der Entwicklung von

$$(az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + fz^6 + gz^7 + \cdots)^m$$

zu Tage treten. Im nächsten Bande der P. T. gab der inzwischen zum Mitgliede der Royal Society Ernannte eine Fortsetzung[3]) der früheren Abhandlung. Er geht aus von der Gleichung zwischen zwei unendlichen Reihen

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \cdots = gy + hy^2 + iy^3 + ky^4 + \cdots,$$

aus welcher er eine nach Potenzen von y fortschreitende Entwicklung für z folgert. Die dabei angewandte Methode ist die der unbestimmten Coefficienten (Bd. II, S. 684), welche nachgrade zu allgemeiner Benutzung gelangt war. De Moivre setzt also

$$z = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \cdots$$

und gewinnt durch Einsetzung dieses Werthes

$$\begin{aligned} az + bz^2 + cz^3 + \cdots = aAy + aBy^2 &+ aCy^3 + \cdots \\ + bA^2y^2 &+ 2bABy^3 + \cdots \\ &+ cA^3y^3 + \cdots \\ &+ \cdots, \end{aligned}$$

welches mit $gy + hy^2 + iy^3 + \cdots$ übereinstimmen muss. Folglich ist $aA = g$, d. h. $A = \frac{g}{a}$; dann $aB + bA^2 = h$, d. h. $B = \frac{h - bA^2}{a}$; weiter $aC + 2bAB + cA^3 = i$, d. h. $C = \frac{i - 2bAB - cA^3}{a}$ u. s. w. Die Nenner der entstehenden Werthe von $A, B, C \ldots$ sind sämmtlich a. Eine Einsetzung der einmal gefundenen Coefficienten $A, B \ldots$ in die nachfolgenden $C, D \ldots$ wird nicht vorgenommen.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten dient De Moivre

---

[1]) *A Method of raising an infinite Multinomial to any given Power, or extracting any given Root of the same.* P. T. XIX, 619—625 [2]) Leibniz III, 175. [3]) *A method of extracting the Root of an infinite equation.* P. T. XX, 190—193.

auch dazu, die logarithmische Reihe abzuleiten. Er nimmt an

$$1 + z = (1 + y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \cdots$$
$$\text{oder } z = ny + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \cdots.$$

Ferner nimmt er an

$$\log (1 + z) = az + bz^2 + cz^3 + \cdots.$$

Dann muss aber auch

$$\log (1 + y) = ay + by^2 + cy^3 + \cdots$$

sein neben

$$\log (1 + z) = n \log (1 + y) = nay + nby^2 + ncy^3 + \cdots.$$

Setzt man den Werth $z = ny + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^2 + \cdots$ in die Reihe $az + bz^2 + cz^3 + \cdots$ ein, so müssen zwei übereinstimmende Entwicklungen von $\log (1 + z)$ nach Potenzen von y erscheinen, aus deren gliedweiser Vergleichung die Coefficienten $a, b, c \ldots$ erhalten werden.

Eine Wurzelausziehung aus einem mehrgliedrigen Ausdrucke hat De Moivre auch in dem zweiten Aufsatze nicht gelehrt, aber man sieht doch, wie die Methode der unbestimmten Coefficienten die Aufgabe zu lösen im Stande ist, wie man unter Annahme von

$$\sqrt[n]{(a + by + cy^2 + \cdots)} = A + By + Cy^2 + \cdots$$
$$\text{zu } a + by + cy^2 + \cdots = (A + By + Cy^2 + \cdots)^n$$

gelangt, wie man den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen nach den Regeln des ersten Aufsatzes in

$$A^n + nA^{n-1}By + \left(nA^{n-1}C + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^{n-2}B\right)y^2 + \cdots$$

entwickeln und mittels

$$a = A^n,\ b = nA^{n-1}B,\ c = nA^{n-1}C + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^{n-2}B \text{ etc.}$$

die $A, B, C \ldots$ allmälig berechnen kann.

Gehen wir nach dem europäischen Festlande über, wo eine Leibnizische Richtung deutlich zu verfolgen ist, so müssen wir mit den Leistungen eines Mannes uns bekannt machen, dessen ganze Familie eine so einzig dastehende Bedeutung für die Geschichte der Mathematik gewonnen hat, dass wir abermals von unserer sonstigen Uebung abweichend, in ähnlicher Weise wie wir bei Leibnizens und Newtons Lebensskizzen uns nicht an die Regel banden, persönliche Angaben über alle Familienmitglieder, die überhaupt in diesem Bande vorkommen, hier vereinigen.

Es handelt sich um die Familie Bernoulli[1]). Ein gewisser Jakob Bernoulli verlegte in der zweiten Hälfte des XVI. Jahrh. seinen Wohnsitz von Antwerpen nach Frankfurt am Main, um den religiösen Verfolgungen der spanischen Gewalthaber in den Niederlanden zu entgehen. Ein zweiter Jakob Bernoulli, Enkel des ersten, siedelte im XVII. Jahrh. nach Basel über, wo sein Sohn Niclaus Bernoulli (1623—1708) als Rathsherr eine angesehene Stellung einnahm. Mit drei von dessen Söhnen Jakob, Niclaus, Johann und deren Nachkommen haben wir es zu thun.

Jakob Bernoulli (1654—1705) studirte dem Willen des Vaters gehorchend Theologie, daneben in fast geheimer Selbstthätigkeit Mathematik und Astronomie. Als er nach vollendetem Studium und mehrjährigen Reisen 1682 nach Basel zurückkehrte, wurde ihm eine Predigerstelle in Strassburg angeboten. Er schlug sie aus und blieb in Basel, wo er dem physikalischen und mathematischen Lehrberufe sich widmete. Zu seinen Schülern zählte als der weitaus hervorragendste der jüngere Bruder Johann Bernoulli (1667—1748). Auch ihn hatte der Vater zu einem ihm nicht zusagenden Berufe, zum Kaufmannsstande bestimmt, auch ihn zog unwiderstehliche Neigung zur Mathematik. Neben der Mathematik studirte Johann Medizin. Als er 1690 das Licentiat der Arzneiwissenschaft errungen hatte, ging er auf Reisen nach Genf, Lyon, Paris und überall trat er als mathematischer Schriftsteller, als mathematischer Lehrer mit Glück auf. In der Heimath erwarb er sich 1694 den medizinischen Doktorgrad, dann folgte er 1695 einem Rufe nach Groeningen, wo er als Professor der Mathematik und Physik zehn Jahre hindurch wirkte. Das Jahr 1705 brachte ihn nach Basel zurück, wo er dem Namen nach in die Professur der griechischen Sprache einrücken, d. h. deren Besoldung beziehen sollte. Während der Uebersiedelung starb der ältere Bruder Jakob, und nun erhielt Johann dessen freigewordene Professur der Mathematik, welcher er seinerseits bis zu seinem Tode, also noch 42 Jahre lang, vorstand, ohne durch eine der an ihn ergangenen Berufungen nach Leiden, Padua, Groeningen (zum zweiten Male), Berlin sich zum Weggehen versuchen zu lassen. Ein mittlerer Bruder zwischen Jakob und Johann war Niclaus, geboren 1662. Dieser trat als Rathsherr in die väterlichen Fusstapfen, aber in seinem Sohne Niclaus Bernoulli (1687—1759) offenbarte sich der mathematische Familiengeist. Er war zunächst Schüler seines Onkels Jakob in Basel, dann seines Onkels Johann in Groeningen. Mit Johann

---

[1]) Merian, Die Mathematiker Bernoulli (Basel, 1860). Allgemeine Deutsche Biographie II, 470—480.

kehrte Niclaus 1705 nach Basel zurück. Seine Arbeiten theilen sich zwischen Mathematik und Jurisprudenz. Er trat 1716 in die mathematische Professur in Padua ein, kehrte aber 1719 nach Basel zurück, wo er 1722 zur Professur der Logik, 1731 zu der des Codex und des Lehensrechtes ernannt wurde. Wir haben nun noch zwei Söhne von Johann Bernoulli zu nennen: Niclaus Bernoulli II. (1695—1726) und Daniel Bernoulli (1700—1782). Jener, in Basel geboren, war ein frühreifer Jüngling von den bedeutendsten Geistesgaben. Er trieb nebeneinander Jurisprudenz und Mathematik. In jener erwarb er sich 1715 das Licentiat, in dieser unterrichtete er seit 1711 den jüngeren Bruder Daniel. Nach 1716 begab sich Niclaus auf Reisen, 1723 berief man ihn als Professor der Rechtswissenschaft nach Bern. Der in Groeningen geborene Daniel wurde, wie wir sagten, durch Niclaus in die Mathematik eingeführt. Später (1721—1723) genoss er den Unterricht des Vaters, der aber die Fortschritte des Sohnes unterschätzte und ihn dem Kaufmannsstande zuwenden wollte, später ihm das Studium der Medizin gestattete. Während Daniel auf Reisen in Italien verweilte, kam an ihn und Niclaus gemeinsam ein Ruf an die nach einem Plane Peter des Grossen soeben ins Leben gerufene Petersburger Akademie. Beide Brüder folgten 1725 mit Freuden diesem Rufe, der ihnen ein Zusammenleben und Zusammenwirken in Aussicht stellte, welches leider nicht von langer Dauer sein sollte. Niclaus starb nach noch nicht einjährigem Aufenthalte in Petersburg. Daniel liess sich nur mit Mühe nach Ablauf der fünf Jahre, auf die er sich verpflichtet hatte, auf weitere drei Jahre gewinnen, dann kehrte er nach Basel zurück, wo er nunmehr 1733—1782 verblieb. Seine Stellung war die eines Professors der Anatomie und Botanik, seit 1750 auch noch der Experimentalphysik.

Wir haben hier nur die rohesten Umrisse des Lebens der fünf Männer gegeben, welche dem Namen der Bernoulli zur Unsterblichkeit verhalfen. Nicht erwähnt wurden die theilweise sehr hässlichen Streitigkeiten, deren Geschichte gleichfalls mit dem Namen der Bernoulli untrennbar verbunden ist, nicht erwähnt die wissenschaftlichen Leistungen, um derenwillen die Bernoulli so berühmt sind. Für beides wird bald da, bald dort in diesem Bande der nöthige Raum geschafft werden müssen.

Veranlassung dazu, wenigstens eine Art von Stammbaum der Mathematiker Bernoulli an dieser Stelle einzuschalten, gaben uns die Arbeiten von Jakob Bernoulli über Reihen, fünf Abhandlungen, welche unter dem gemeinsamen Titel *Propositiones Arithmeticae de Seriebus infinitis eorumque summa finita* erschienen, ein Titel dem von

der zweiten an die Ordnungszahlen *pars altera*, *tertia*, *quarta*, *quinta* beigefügt wurden. Es sind Dissertationen, über welche unter Jakob Bernoullis Vorsitze disputirt wurde, und zwar sind die Vertheidiger und die Jahrgänge, in welchen jeweil die Disputationen stattgefunden haben: Fritz 1689, Beck 1692, Hermann 1698, Harscher 1695, Niclaus Bernoulli 1704. Von den fünf Vertheidigern ist der zuletzt genannte Niclaus I. der Sohn des Rathsherrn Niclaus Bernoulli. Hermann, genauer Jakob Hermann[1]) (1678—1733), ist ein besonders in der Geschichte der Mechanik rühmlichst bekannter Schriftsteller. Die drei anderen Persönlichkeiten haben sich keine solchen Verdienste erworben, dass ihr Name besonders erhalten zu werden beanspruchen könnte. Jedenfalls rühren die Abhandlungen über Reihen auch nicht zum Theil von den fünf Vertheidigern her. Diese sind einzig Eigenthum von Jakob Bernoulli und mit Recht in dessen Werke aufgenommen[2]), welche in zwei mit durchgehenden Seitenzahlen versehenen Bänden in Genf gedruckt wurden. Dass die Abhandlungen über Reihen dort durch weite Zwischenräume von einander getrennt sind, liegt an der die Zeitfolge streng wahrenden Anordnung der Ausgabe. Jakob Bernoulli selbst hielt ihre Zusammengehörigkeit nicht bloss dadurch aufrecht, dass die Abhandlungen als *pars altera*, *tertia*, *quarta*, *quinta* benannt wurden sondern noch deutlicher durch die Bezifferung der Kapitel, welche von I bis LX durch die fünf Abhandlungen sich fortsetzt, und welche so die fortwährenden Rückbeziehungen erleichtert. Niclaus Bernoulli I hat darum auch, als er 1713 eine nachgelassene Schrift seines Lehrers und Onkels über Wahrscheinlichkeitsrechnung herausgab[3]) und die Reihenuntersuchungen, deren Tragweite er voll erkannte, als Anhang drucken liess, jede Trennung vermieden und die sechzig Kapitel ohne Sonderung in Abschnitte als fortlaufende Kapitel einer einheitlichen Abhandlung behandelt.

Der erste 1689 veröffentlichte Theil bietet die grösste Ausbeute. Jakob Bernoulli geht von dem an sich nicht uneleganten Satze aus, dass eine geometrische Progression $A, B, C, D, E \ldots$ und eine arithmetische Progression $A, B, F, G, H \ldots$ welche in den beiden Anfangsgliedern A, B übereinstimmen, so fortschreiten, dass von den Folgegliedern jedes Glied der geometrischen Progression grösser sein muss, als das Glied der arithmetischen Progression von gleicher Rangordnung. Daraus folgert er, dass erstens die Glieder einer

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie XII, 181—182. [2]) Jacobi Bernoulli Basileensis Opera I, 373—402; I, 517—542; II, 745—764; II, 849—867; II, 955—975. Wir citiren diese 1744 erschienene Ausgabe als Jac. Bernoulli Opera. [3]) Von ihr wird im XVII. Abschnitte erst die Rede sein, weil ihre Ergebnisse nicht vor 1713 in die Oeffentlichkeit drangen.

steigenden geometrischen Progression grösser als jede beliebig gegebene Zahl und zweitens die Glieder einer fallenden geometrischen Progression kleiner als jede beliebig gegebene Zahl, erstere also unendlich gross, letztere schliesslich Null werden. Bernoulli wendet sich sodann zur Reihe $\frac{a}{b} + \frac{a+c}{b+d} + \frac{a+2c}{b+2d} + \cdots$, um nach dem Werthe t des unendlich fernen Gliedes zu fragen. Der dabei eingeschlagene Gedankengang ist höchst eigenartig. Als $n$tes Glied betrachtet ist $t = \frac{a+(n-1)c}{b+(n-1)d}$, woraus $n = 1 + \frac{bt-a}{c-dt}$. Damit aber $n = \infty$ werde, kann nicht $bt - a = \infty$ sein. Das würde nämlich $t = \infty$, $c - dt = -\infty$, $\frac{bt-a}{c-dt}$ negativ bedingen, wodurch n Null oder negativ würde, was ein Unsinn ist. Also muss $n = \infty$ aus $c - dt = 0$ hervorgehen und $t = \frac{c}{d}$ sein. Nun ist entweder

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{d} > \frac{a}{b} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

jedenfalls sind daher die unendlich vielen Glieder, vom ersten an bis zu t, alle grösser als $\frac{c}{d}$ oder als $\frac{a}{b}$, oder gleich beiden Brüchen, und ihre Summe ist mehr als das Unendlichfache eines gegebenen Ausdruckes, beziehungsweise ihm gleich, d. h. unendlich gross. Damit hängt der weitere Satz zusammen, dass bei zu summirenden unendlichen Reihen die Glieder schliesslich verschwinden müssen, weil die Reihe andernfalls keine unendliche Summe besitzen könne[1]).

Nun geht es an wirkliche Summirungen. Sei unter N die Reihe $\frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \cdots$ verstanden, unter P die Reihe $\frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \cdots$, welche die um das Anfangsglied $\frac{a}{c}$ verkürzte Reihe N oder $N - \frac{a}{c}$ ist. Ziehe man beide Reihen gliedweise von einander ab, so entstehe eine neue Reihe Q, welche $N - \left(N - \frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c}$ sein müsse. Also

$$\frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \cdots = N$$

$$\frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \cdots = N - \frac{a}{c} = P$$

$$\frac{a}{1 \cdot 2 \cdot c} + \frac{a}{2 \cdot 3 \cdot c} + \frac{a}{3 \cdot 4 \cdot c} + \cdots = \frac{a}{c} = Q.$$

Jakob Bernoulli empfand selbst das höchst Bedenkliche dieses Verfahrens, wir würden heute sagen die Unzulässigkeit des Rechnens mit divergenten Reihen, denn er bemerkte sofort, ohne besondere

[1]) *cum alias illarum summae finitae esse non possent.*

Vorsicht dürfe man sich dieser Methode nicht bedienen[1]). Sei nämlich: $\frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \cdots = S$, $\frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \cdots = T = S - \frac{2a}{c}$ und man zöge die ähnliche Folgerung wie vorher, so entstände diesmal $\frac{a}{1 \cdot 2 \cdot c} + \frac{a}{2 \cdot 3 \cdot c} + \frac{a}{3 \cdot 4 \cdot c} + \cdots = \frac{2a}{c} = Q$, während doch unmöglich eine und dieselbe Reihe Q einmal $\frac{a}{c}$ und einmal $\frac{a}{2c}$ zur Summe haben könne. Der Fehler liege daran, dass das Grössenverhältniss der Endglieder der Reihen im zweiten Falle keine Beachtung gefunden habe. In den Reihen N und P verschwinden die Endglieder, deshalb komme es bei der gliedweisen Subtraktion $N - P$ nicht darauf an, dass die Reihe P um ein Glied weiter reiche als N. Ganz anders liege die Sache bei den Reihen S und T. Es sei

$$S = \frac{2a}{c} + \frac{2a+a}{c+c} + \frac{2a+2a}{c+2c} + \cdots.$$

Das unendlich ferne Glied dieser Reihe sei daher nach dem Früheren $\frac{a}{c}$. Um dieses Glied sei also T länger als S, und deshalb sei $S - T$ nicht $\frac{2a}{c}$, sondern $\frac{2a}{c} - \frac{a}{c} = \frac{a}{c}$, d. h. Q habe genau denselben Werth wie vorher.

Jakob Bernoulli betrachtet alsdann die harmonische Reihe, welche eine unendlich grosse Summe besitze[2]). Man könne den Beweis nach zwei Methoden führen, deren erste von Johann Bernoulli herrühre, welcher die Sache auch zuerst bemerkt habe. Setze man in die wiederholt beigezogene Reihe Q statt a und c jedesmal die Zahl 1, so entstehe

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots = 1.$$

Augenscheinlich sei

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{4}{4 \cdot 5} + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots\right) + \cdots$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

[1]) *Observandum tamen, non sine cautela hac utendum esse methodo.* [2]) *Summa seriei infinitae harmonice progressionalium* $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ *est infinita.*

oder, wenn man $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=A$ setze, gelange man zu $A=1+A$. Hätte also A einen endlichen Werth, so wäre das Ganze $(1+A)$ seinem Theile (A) gleich, was nicht möglich sei. Nachdem Jakob Bernoulli die überraschende Bemerkung des jüngeren Bruders kennen gelernt hatte, zog er selbst die harmonische Reihe in Erwägung und fand folgenden unmittelbaren Beweis ihrer unendlich grossen Summe. Die Glieder $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a^2}$ besitzen eine Summe, welche grösser ist, als wenn sämmtliche a^2-a Glieder den niedrigsten Werth $\frac{1}{a^2}$ besässen, d. h. sie betragen zusammen mehr als $\frac{a^2-a}{a^2}=1-\frac{1}{a}$. Dann folgt weiter

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a^2}>1.$$

Man kann also innerhalb der harmonischen Reihe von einem beliebigen Gliede an eine endliche Gruppe von Gliedern angeben, deren Summe grösser als Eins ist. Ist nun N eine beliebig grosse ganze Zahl, so zieht man N solche Gliedergruppen in Betracht, die sich unmittelbar an einander schliessen, und deren Summe $>N$ ist. Alle Folgeglieder bleiben alsdann noch übrig, die Summe der unendlichen harmonischen Reihe ist also erst recht grösser als jedes N, grösser als jede noch so grosse angebbare Zahl, d. h. unendlich gross. Damit ist sogleich festgestellt, dass die Summe einer unendlichen Reihe, deren Endglied verschwindet, bald endlich, bald unendlich ist[1]).

Gleichwohl fühlt Jakob Bernoulli sich durch die Gewissheit, dass die Endglieder der Reihe verschwinden, hinlänglich beruhigt, um mit Hilfe der harmonischen Reihe und anderer ähnlich gestalteten Reihen die Leibnizischen Summen von 1682 (S. 79) abzuleiten. Aus $A=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ und

$$A-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

folgert er mittels gliedweiser Subtraktion

$$\frac{3}{2}=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{4\cdot 6}+\cdots,$$

also auch

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots=\frac{3}{4}.$$

Aus $E=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$ und

[1]) *Summa seriei infinitae, cujus postremus terminus evanescit, quandoque finita est, quandoque infinita.*

$$E - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

folgert er ähnlicherweise

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \cdots = \frac{1}{2} \text{ u. s. w.}$$

Man kann nicht verkennen, dass Jakob Bernoulli sich bei diesen Schlüssen von einem richtigen Gefühle leiten liess. Nennt man A_n die Summe der n ersten Glieder der harmonischen Reihe, und zieht von A_n die Glieder $A_n - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ ab, so ist genau richtig

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)},$$

und dieser Ausdruck geht in der That, weil die späten Glieder der harmonischen Reihe verschwinden, bei $n = \infty$ in $\frac{3}{4}$ über u. s. w. Freilich drückte Jakob Bernoulli sich noch nicht so modern aus, wie wir (S. 79) auch einem Leibnizischen an sich durchaus berechtigten Schlusse gegenüber zu bemerken in der Lage waren.

Den folgenden vier Abhandlungen über Reihen haben wir weitaus nicht so viele hervorragende Ergebnisse zu entnehmen, es sei denn, dass wir entschieden falsche Dinge hervorheben wollten, so falsch, dass man kaum begreifen kann, dass man den gleichen Verfasser vor sich hat, wie in der Abhandlung von 1689. Wenn z. B. 1691 behauptet wird[1]), es sei

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{2}{1}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots = \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots = \frac{2}{5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

folglich sei durch Addition die ganze harmonische Reihe

$$= \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \cdots,$$

mithin sei weiter $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ die halbe harmonische Reihe, und die fehlenden graden Glieder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$ müssten die andere Hälfte bilden. Wenn daraus weiter geschlossen wird, es sei

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$$

[1]) Jac. Bernoulli Opera I, 530.

trotzdem jedes Glied links einen höheren Werth besitze, als das ihm der Ordnungszahl nach entsprechende Glied rechts, so können wir Jakob Bernoulli, den tiefen Denker, höchstens aus der Zusatzbemerkung erkennen, solches rühre daher, dass beide Reihen, die links ebenso wie rechts, unendlich grosse Summen haben, deren Gleichheit durch den zwischen den einzelnen Gliederpaaren vorhandenen Unterschied nicht beeinträchtigt werde. In dieser zweiten Abhandlung ist auch erstmalig die Reihe der reciproken Quadratzahlen allerdings erfolglos in Angriff genommen. Nicht ohne Interesse sind ferner einige unendliche Operationsfolgen anderer Art als der einfachen Addition[1]). So sagt Jakob Bernoulli, aus $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\cdots}}}} = x$ folge $x^2 = a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\cdots}}} = ax$ und $x = a$; aus

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}} = x \text{ folge } x^2 = a + \sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}$$
$$= a + x \text{ und } x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a} \text{ u. s. w.}$$

In der dritten Abhandlung von 1696 ist die Division $\frac{l}{m+n}$ in Mercatorscher Weise vollzogen. So entsteht

$$\frac{l}{m+n} = \frac{l}{m} - \frac{ln}{m^2} + \frac{ln^2}{m^3} - \cdots,$$

und bei $n = m$ werde daraus

$$\frac{l}{2m} = \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \cdots,$$

ein nicht unelegantes Paradoxon[2]). Dessen Ursprung sei, dass bei fortgesetzter Division der jedesmalige Rest nicht geringer werde, sondern unverändert $+l$ bleibe; es trete also noch $\pm\frac{l}{2m}$ zur Reihe hinzu, und zwar gelte das untere Zeichen, wenn die Reihe bei einem ungraden positiven Gliede abbreche, das obere, wenn die Reihe bis zu einem geraden negativen Gliede fortgesetzt werde. Was sonst in der dritten und den ihr folgenden Abhandlungen bemerkenswerth erscheint, muss an späterer Stelle erst Erwähnung finden.

Wir haben einige unendliche Ausdrücke, welche nicht durch blosse Addition zusammenhängen, früher bei Vieta (Bd. II, S. 548), bei Wallis und Brouncker (Bd. II, S. 698), zuletzt bei Jakob Bernoulli auftreten sehen. Brouncker hatte den unendlichen Kettenbruch gebildet und mit Kettenbrüchen hat sich auch Huygens

[1]) Jac. Bernoulli Opera I, 536—539. [2]) Ebenda II, 751: *unde paradoxum fluit non inelegans.*

beschäftigt[1]. Es war in einer nachgelassenen Schrift *Descriptio automati planetarii*, deren Datirung mit keinerlei Sicherheit zu wagen ist. Veröffentlicht wurde sie 1698 gemeinsam mit anderen Schriften aus Huygens Nachlasse.

Huygens verfolgte bei den Untersuchungen über Kettenbrüche durchaus praktische Zwecke. Er wollte, wie schon die Ueberschrift der Abhandlung zu erkennen gibt, ein Planetarium anfertigen, d. h. ein Modell des ganzen Sonnensystems mit allen Planeten, deren Umläufe durch ein Räderwerk mit in einander greifenden Zähnen geregelt waren. Die Hauptaufgabe bestand daher darin, die Anzahl der Zähne jedes Rades derart zu bestimmen, dass ihr Verhältniss die Umlaufzeiten der einzelnen Planeten den in der Natur gegebenen Zeiten so nahe als möglich entsprechen liess, und zwar diese Absicht durch kleinstmögliche Verhältnisszahlen zu erreichen, weil die praktische Mechanik ihre Grenzen hat und nicht gestattet, beliebig viele einander genau gleiche Zähne in einen Radumfang von mässiger Grösse einzuschneiden. Einmal liegen beispielsweise die Verhältnisszahlen 2 640 858 und 77 708 431 vor, und mit solchen Zahlen an die wirkliche Herstellung von ihnen entsprechenden Vorrichtungen nur von fern herantreten zu wollen ist unmöglich. Huygens erkannte als Mittel zur Beschaffung anderer Verhältnisszahlen die Umwandlung des gegebenen Verhältnisses in das der Einheit zu einer mit einem Kettenbruche versehenen Zahl, d. h.

$$1 : 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{etc.}}}}}}}$$

Dann werde, sagt Huygens, bei der fortgesetzten Umwandlung durch immer erneute Divisionen es endlich einmal dahin kommen, dass als Rest bei einer Division die Einheit erscheine[2], und dann sei naturgemäss die Umwandlung vollendet. Aber mit dieser Umwandlung ist nur der erste Schritt gethan, und der zweite führt dahin, die einzelnen Näherungswerthe des ermittelten Kettenbruches zu finden:

$$29 = 29, \quad 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2},$$

[1]) Eine Zusammenstellung der hierher gehörenden Arbeiten bei S. Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. Programm der Lateinschule zu Weissenburg. 1872. [2]) *Eo devenitur, ut a divisione tandem unitas supersit.*

$$29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{147}{5}, \qquad 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{206}{7} \text{ u. s. w.}$$

Nun zieht Huygens den Satz V, 1 der euklidischen Elemente in Betracht. Wenn bei zwei ungleichen Zahlen das Kleinere immerfort von dem Grösseren weggenommen wird, und der Rest nicht eher, als bis er die Einheit geworden, die nächste Zahl vor ihm genau misst, so sind erstgedachte Zahlen zu einander theilerfremd. Daraus folgert er sofort, dass Zähler und Nenner der Näherungswerthe theilerfremd, die Näherungswerthe also reduzirte Brüche sein müssen. Einen zweiten Satz spricht er dahin aus, dass kein Bruch mit kleineren Zahlen in Zähler und Nenner dem ursprünglich gegebenen Bruche näher liegen könne als ein Näherungswerth. Der dritte Satz beweist, dass die Näherungswerthe abwechselnd bald kleiner, bald grösser als der ursprünglich gegebene Bruch seien. So weit hat also Huygens die Lehre von den Kettenbrüchen gefördert. Bei seinen Beweisführungen bedient er sich nicht allgemeiner Buchstaben, sondern der Zahlen des bestimmten Beispiels, es dem Leser überlassend, die Allgemeingiltigkeit der Auseinandersetzung einzusehen.

87. Kapitel.

Zahlentheorie. Algebra.

Die Sätze, welche Huygens der Lehre von den Kettenbrüchen abgewann, sind weniger rechnerischer als zahlentheoretischer Natur. Sie bilden dadurch einen willkommenen Uebergang zur Darstellung dessen, was die Mathematiker des letzten Drittels des XVII. Jahrh. auf diesem Gebiete geleistet haben. Keineswegs Unerhebliches, könnte man uns hier vorwerfen, haben wir bereits im II. Bande vorweggenommen. Wir haben Fermats zahlentheoretische Leistungen dort insgesammt zur Sprache gebracht, und doch sind dessen Anmerkungen zu Diophant erst 1670, seine *Opera Varia* erst 1679, Briefe zahlentheoretischen Inhaltes von Fermat, von Brouncker, von Frénicle, von Wallis erst 1693 in der Ausgabe von Wallis' Werken gedruckt worden. Man könnte uns vorwerfen, wir seien in unserer Erzählung der Geschichte vorausgeeilt, wir hätten gegen das geschichtliche Gesetz uns verfehlt, dass Erfindungen und Erfinderrechte kein früheres Datum tragen als das der Veröffentlichung. So bereitwillig wir diesen Vorwürfen Berechtigung zugestehen, so können wir doch zwei wesent-

liche Entschuldigungsgründe für unser Verfahren in Anspruch nehmen. Erstlich blieben Fermats zahlentheoretische Leistungen durchaus nicht ganz geheim. Durch Briefe und Gespräche wurden viele seiner Sätze bekannt, lange bevor sie gedruckt waren. Zweitens aber hat eine Bestreitung von Fermats Anrecht an seine zahlentheoretischen Erfindungen niemals stattgefunden und konnte auch nicht stattfinden. Vor der Veröffentlichung wie nach der Veröffentlichung blieben die Fermatschen Sätze sein ausschliessliches Eigenthum, da niemand im Stande war, sie zu beweisen, wenn es auch nicht an Versuchen dazu gefehlt hat. Deshalb durften wir Fermat als Zahlentheoretiker im II. Bande behandeln. Andrerseits freilich müssen wir gegenwärtig auf die erwähnten Drucklegungen von 1670, von 1679, von 1693 hinweisen. Sie haben für uns neben dem, was sie enthalten, eine geschichtliche Bedeutung. Sie liefern den Beweis, dass damals Mathematiker von Fach durch Veröffentlichungen, denen vermöge des Namens ihres Verfassers ein weiter Leserkreis gesichert war, auf die Zahlentheorie hingewiesen wurden und lassen es dem gegenüber nur um so auffallender erscheinen, dass der reichlich ausgestreute Samen kaum an wenigen Stellen zum Keimen kam.

Einzelne Aufgaben zahlentheoretischer Natur wurden allerdings noch immer gestellt. In den Zeitschriften war z. B. von einer Aufgabe Renaldinis die Rede (S. 21), die darin bestand, drei Zahlen x, y, z von der Beschaffenheit zu finden, dass

$$x^2 - y^2,\ x^2 - z^2,\ y^2 - z^2,\ x - y,\ x - z,\ y - z$$

insgesammt Quadratzahlen seien[1]).

Leibniz hat 1678 es für mittheilungswürdig gehalten, dass Primzahlen stets einer der Formen $6n - 1$ oder $6n - 5$ angehören[2]), nicht einmal dahin sich erhebend, die beiden Formen als $6n \pm 1$ zu vereinigen. Derselbe Schriftsteller hat aus der Formel

$$\frac{y(y-1)\cdots(y-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

für die Combinationen zu je k von y unter einander verschiedenen Elementen und aus der Ganzzahligkeit, welche dem Ausdrucke vermöge seines Sinnes anhaften muss, Schlüsse auf die Theilbarkeit eines Produktes auf einander folgender Zahlen durch ein ähnlich gebautes Produkt gezogen[3]). Er hat auch mit der Gleichung $y^2 = x + \frac{a}{x}$ sich beschäftigt[4]), sowie mit dem Satze, dass die Fläche eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks kein Quadrat sein könne[5]). Das sind

[1]) A. E. 1685 pag. 176. [2]) Leibniz VII, 119—120. [3]) Ebenda VII, 101—113. [4]) Ebenda VII, 114—119. [5]) Ebenda VII, 120—125.

sehr geringfügige Leistungen, doppelt geringfügig als solche eines Leibniz, der die Pflicht gehabt hätte, wo er Hand anlegte, Hervorragendes zu schaffen.

In Frankreich können wir als einen Gelehrten, welcher der Zahlentheorie einiges Nachdenken widmete, Claude Jaquemet[1]) (1651—1729) nennen. Er gehörte der Congregation der Priester vom Oratorium Jesu an, einer 1614 in Frankreich entstandenen nicht klösterlichen Brüderschaft, welche sich ziemlich rasch verbreitete. Zu ihren Mitgliedern zählte sich auch Nicolas Malebranche (1638—1715), dessen Thätigkeit zwar der Hauptsache nach eine philosophische war, der aber auch der Mathematik Interesse entgegenbrachte. Man hatte deshalb handschriftlich in der Pariser Bibliothek erhaltene zahlentheoretische Bruchstücke zuerst Malebranche zugeschrieben und sie unter seinen Namen veröffentlicht[2]), bis nachträglich erkannt wurde, dass Jaquemet der Verfasser war. Die Bruchstücke beziehen sich auf drei Fragen. Erstlich ist der Versuch gemacht, den Fermatschen Unmöglichkeitssatz ($x^n + y^n = z^n$ bei ganzzahligen Werthen von x, y, z, n unmöglich, sofern $n > 2$) zu beweisen. Der Beweis ist nicht richtiger als alle späteren, die von elementarer Grundlage ausgingen und nicht mit besonderen Zahlenwerthen von n sich begnügten, aber es ist immerhin ein erster Versuch, die Sache allgemein anzufassen. Dabei ist gelegentlich ein Satz ausgesprochen, welcher vielleicht selbst, namentlich aber wegen des Beweisganges Erwähnung verdient. Er lautet folgendermassen: Ist z eine positive ungerade Zahl, so ist bekanntlich

$$x^z + y^z = (x + y)(x^{z-1} - x^{z-2}y + \cdots + y^{z-1});$$

sind nun die gleichfalls positiven ganzen Zahlen x, y theilerfremd, so haben die beiden Faktoren $x + y$ und $x^{z-1} - x^{z-2}y + \cdots + y^{z-1}$ nur entweder z oder irgend einen Faktor von z als Gemeintheiler. Sei d dieser Gemeintheiler, so wird er, weil in $x + y$, auch in

$$(x + y)x^{z-2} = x^{z-1} + x^{z-2}y$$

und ebenso in

$$x^{z-1} - x^{z-2}y + \cdots + y^{z-1} - [x^{z-1} + x^{z-2}y]$$
$$= -2x^{z-2}y + x^{z-3}y^2 - \cdots + y^{z-1}$$

enthalten sein. Ein ähnlicher Schluss führt dazu, dass d in

$$3x^{z-3}y^2 - \cdots + y^{z-1}$$

enthalten sein muss, schliesslich in $zx^{z-z}y^{z-1} = zy^{z-1}$. Bei der Theilerfremdheit von x und y kann d, der Theiler von $x + y$, nicht

[1]) Aristide Marre, *Deux mathématiciens de l'Oratoire* (im *Bulletino Boncompagni* XII, 886—894. [2]) Ch. Henry im *Bulletino Boncompagni* XII, 565—568.

Theiler von y sein, also auch nicht von y^{z-1}, daher muss d in z enthalten sein, den Fall $d = 1$ mit eingeschlossen. Zweitens hat Jaquemet in jenen Bruchstücken bewiesen, dass eine ganze Zahl, die nicht die Summe zweier ganzzahliger Quadrate ist, auch nicht Summe zweier gebrochener Quadrate sein kann, und an diesen Satz knüpft sich die dritte Untersuchung an, in welcher er mit der Gleichung $Ax^2 + 1 = y^2$ sich beschäftigt[1]. Jaquemet zeigt hier unter Anderem, dass aus einem Werthepaare $x = \alpha$, $y = \beta$ ein zweites $x = 2\alpha\beta$, $y = 2A\alpha^2 + 1$ sich ableitet und durch Fortsetzung dieses Verfahrens beliebig viele Werthepaare.

Ein anderer französischer Zahlentheoretiker war Jean Prestet († 1690). Wenigstens hat er in seinen *Elemens des Mathematiques*[2], welche erstmalig 1675 und dann in wiederholten Auflagen erschienen, in jenes Gebiet einschlagende Aufgaben behandelt. Prestets Lehrbuch war sehr geschätzt. Aus ihm hat De Moivre (S. 82), dem nur ein sehr mangelhafter Unterricht in der Mathematik zu Theil wurde, die Kenntnisse sich angeeignet, welche ihn hernach zu eigenen Entdeckungen befähigten. Wallis hat in seiner englischen Algebra von 1685 das Werk als eine nahezu vollständige Zusammenstellung alles dessen geschildert, was auf algebraischem Gebiete vorhanden sei, Eigenes finde man dagegen wenig oder gar nicht; auch die wirklichen Erfinder nenne der Verfasser nicht, es sei denn, dass es seine Landsleute Vieta und Descartes seien. Für den Verfasser des anonym erschienenen Werkes[3] hielt Wallis den oben von uns genannten Nicolas Malebranche. Prestet verwahrte sich in der mit Namensunterschrift versehenen Vorrede der zweiten Auflage von 1689 gegen die ihm gemachten Vorwürfe. Auch andere Schriftsteller als Vieta und Descartes werde der aufmerksame Leser erwähnt und gerühmt finden. Seine Eigenschaft als Verfasser hielt Prestet in der bescheiden klingenden Form aufrecht, Wallis habe das Werk einer geschickteren Persönlichkeit zugeschrieben als er selbst sei[4]. Der Vorwurf, von welchem Prestet nichts sagt, dass in dem Lehrbuche Eigenes nur in geringem Maasse oder gar nicht zu finden sei, scheint mindestens übertrieben. Prestet hat z. B. mit vollkommenen Zahlen sich beschäftigt[5] und die acht ersten derselben, die achte als 19ziffrige Zahl, ausgerechnet. Die neunte vollkommene Zahl sei $2^{513} - 2^{256}$. Ausserdem hat Prestet muthmasslich zuerst eine Recursionsformel aufgestellt[6], welche die Summe der $m$ten Potenzen von in arith-

[1]) *Bulletino Boncompagni* XII, 646—648 und ebenda 893. [2]) Ebenda XII, 562. [3]) Nur die Vorrede ist in wenig deutlicher Weise mit J. P. gezeichnet. [4]) *mes premiers Elemens de Mathématiques qu'il attribue à une personne plus habile que moy.* [5]) *Bulletino Boncompagni* XI, 784. [6]) Ebenda X, 300.

metischer Progression gegebenen Zahlen

$$S_m = a^m + (a + r)^m + \cdots + (a + (n - 1)r)^m,$$

mittels der Summen S_{m-1}, S_{m-2}, ... der niedrigeren Potenzen derselben Zahlen darstellt.

Auch Jacques Ozanam[1]) (1640—1717) ist hier zu nennen wegen eines Aufsatzes im Journal des sçavans von 1680, der den Fermatschen Unmöglichkeitssatz in dem besonderen Falle $n = 4$ behandelt. Weitaus bekannter ist Ozanam durch seine *Récréations mathématiques*, eine Aufgabensammlung von der Art wie Bachet de Meziriac, Leurechon, Schwenter (Bd. II, S. 699—702) sie verfasst hatten, und welche in Frankreich wenigstens ihre Vorgänger bald verdrängte, wofür die zahlreichen Auflagen des Buches den Beweis liefern.

Von den soeben erwähnten älteren Schriftstellern hat Bachet de Meziriac deutlicher, als es je vor ihm geschehen war, die Aufgabe betont, unbestimmte Gleichungen durch ganzzahlige Wurzelwerthe zu befriedigen. Er trat auch selbst an die Lösung der Aufgabe heran, wenngleich sein Verfahren kaum mehr als eine versuchsweise Annahme aufeinander folgender Zahlen für die eine der beiden Unbekannten der Gleichung war (Bd. II, S. 702—704). Ein anderer französischer Schriftsteller, Michel Rolle[2]) (1652—1719), seit 1685 besoldetes Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften, *géomètre pensionnaire*, ging wesentlich darüber hinaus. Er veröffentlichte 1690 einen *Traité d'Algèbre*[3]), mit dem wir es im weiteren Verlaufe dieses Kapitels noch einmal zu thun bekommen. Das VII. Kapitel des I. Buches führt die Ueberschrift *Eviter les fractions*[4]) und handelt von der ganzzahligen Auflösung unbestimmter Gleichungen. Rolle hat die Regel, welche er benutzt wissen will, in allgemeinen Worten ausgesprochen, aber da er nichts weniger als leicht zu schreiben wusste, so ziehen wir es vor, das Verfahren an dem ersten dort behandelten Beispiele $12z - 221h = 512$ kennen zu lernen. Wir bedienen uns dabei der von Rolle benutzten Buchstaben. Als Gleichheitszeichen gebrauchen wir das gewöhnliche, während Rolle nur das von Descartes eingeführte ∞ (Bd. II, S. 724) anwendet. Man soll die Gleichung so umordnen, dass die Unbekannte, welche den niedrigsten Zahlencoefficienten besitzt, allein links vom Gleichheitszeichen stehen bleibt, also $12z = 221h + 512$. Nun dividirt man den grösseren Zahlencoefficienten 221 durch den kleineren 12 und findet 18 als

[1]) *Mémoires de l'Académie des Sciences.* Paris, 1717. [2]) Ebenda. Paris, 1719. [3]) Die Jahreszahl des Erscheinens ist durch einen Druckfehler als M.DC.LXC. angegeben. [4]) Rolle, *Traité d'Algèbre* pag. 69—78.

Quotienten und 9 als Rest. Mithin ist, abgesehen von der unberücksichtigt bleibenden Constanten 512, die $z > 18h$ und man setzt $z = 18h + p$. Dieser Substitutionswerth macht aus der ersten Gleichung $216h + 12p = 221h + 512$ oder $5h = 12p - 512$, indem wieder die Umordnung vorgenommen ist, welche die Unbekannte mit dem niedrigsten Zahlencoefficienten allein auf die linke Seite bringt. Indem $5h$ mit $12p$ allein verglichen wird, erscheint $h > 2p$, und man setzt $h = 2p + s$ in $5h = 12p - 512$. So erhält man

$$10p + 5s = 12p - 512, \text{ beziehungsweise } 2p = 5s + 512.$$

Man sieht sofort, dass nun $2p$ mit $5s$ in Zusammenhang gebracht $p = 2s + m$ liefert, und dass alsdann $4s + 2m = 5s + 512$ beziehungsweise $s = 2m - 512$ folgt, womit die Aufsuchung neuer Substitutionswerthe abgeschlossen ist, weil s den Zahlencoefficienten 1 besitzt. Die gefundenen Gleichungen schreiben wir in umgekehrter Reihenfolge an:

$$\begin{aligned} s &= 2m - 512 \\ p &= 2s + m \\ h &= 2p + s \\ z &= 18h + p. \end{aligned}$$

Rolle nennt diese Zusammenstellung die Rückkehrsäule, *colonne de retour*. Jede Gleichung wird zur Umformung der ihr nachfolgenden benutzt, und so entsteht der Reihe nach:

$$\begin{aligned} s &= 2m - 512, \\ p &= 5m - 1024, \\ h &= 12m - 2560, \\ z &= 221m - 47104. \end{aligned}$$

Jedes ganzzahlige m liefert in die Schlussgleichungen eingesetzt ganzzahlige h und z. Will man diese kleinstmöglich positiv haben, so muss $12m > 2560$ d. h. $m > 213$ und $221m > 47104$ d. h. $m > 213$ sein. Beiden Bedingungen genügt $m = 214$, und man hat $h = 8$, $z = 190$, welche in der That $12z - 221h = 512$ erfüllen. Das unmittelbar sich anschliessende VIII. Kapitel[1]) geht unter der Ueberschrift *Eviter les nombres negatifs* noch näher auf die Auswahl einer Zahl ein, welche gegebene Ausdrücke positiv werden lässt. Sollen z. B. $-14 + 7z$, $-30 + 10z$, $32 - 8z$, $45 - 9z$, $66 - 11z$ positiv sein, so muss gleichzeitig hervorgebracht werden $7z > 14$, $10z > 30$ und $8z < 32$, $9z < 45$, $11z < 66$ oder $z > 2$, $z > 3$ und $z < 4$, $z < 5$, $z < 6$. Von den beiden ersten Ungleichungen schliesst

[1]) Rolle, *Traité d'Algèbre* pag. 78—86.

die zweite die erste, von den drei letzten die erste die übrigen ein. Sämmtliche Bedingungen vereinigen sich also zu $3 < z < 4$, und jedes z innerhalb dieses Zwischenraumes macht die fünf gegebenen Ausdrücke positiv, bei der so gestellten Aufgabe allerdings nicht zugleich auch ganzzahlig. Im Jahre 1699 liess Rolle noch ein besonderes Bändchen von 68 Quartseiten erscheinen: *Méthodes pour resoudre les questions indéterminées de l'Algèbre*, in welchem unbestimmte Gleichungen höherer Grade behandelt sind.

Der Titel von Rolles Buch von 1690 *Traité d'Algèbre* führt uns leicht hinüber zum zweiten Gegenstande, der in der Ueberschrift dieses Kapitels neben der Zahlentheorie genannt ist, zur Geschichte der Algebra. An ihrer Spitze erscheint wieder die uns schon bekannte Abhandlung Newtons von 1669, seine *Analysis per aequationes* (S. 65).

Nach der Reihenentwicklung durch Wurzelausziehung (S. 67) kommt der Verfasser auf die Auflösung von Zahlengleichungen, welche durch fortgesetzte Annäherung an den Wurzelwerth in Gestalt einer Reihe von mehr und mehr in Betracht zu ziehenden Gliedern erreicht wird, mithin vollständig in das Bereich derjenigen Untersuchungen fällt, denen die Analysis per aequationes gewidmet ist. Allerdings setzt Newtons Methode[1]) voraus, dass eine gewisse Annäherung schon vollzogen sei. Er nimmt nämlich als gegeben an, dass die Voraussetzung $y = 2$ als Wurzelwerth der Gleichung

$$y^3 - 2y - 5 = 0,$$

welche als Beispiel dient, um weniger als den zehnten Theil vom genauen Wurzelwerthe sich unterscheide. Hierauf wird $y = 2 + p$ in die Gleichung eingesetzt, welche dadurch in

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

übergeht. Weil nun p nur einen in Zehnteln darstellbaren Werth besitzt, so ist unter vorläufiger Vernachlässigung der höheren Potenzen von p zunächst $10p - 1 = 0$, $p = 0{,}1$ und genau $p = 0{,}1 + q$. Die Einsetzung dieses Werthes in die für p gefundene Gleichung liefert $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, in welcher neuen Gleichung die Unbekannte q nur aus Hunderteln besteht. Um so berechtigter ist die vorläufige Vernachlässigung der höheren Potenzen von q. Aus $11{,}23q + 0{,}061$ entsteht aber $q = -0{,}0054$ und genau

$$q = -0{,}0054 + r.$$

Die Fortsetzung des gleichen Verfahrens führt zu

---

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 10—12.

$$r = \frac{-0{,}000\,541\,708}{11{,}161\,96} = -0{,}000\,048\,53.$$

Mithin ist

$$y = 2 + 0{,}1 - 0{,}0054 - 0{,}000\,048\,53 = 2{,}094\,551\,47.$$

Newton benutzt weiter ein dieser Methode nachgebildetes Verfahren, um aus einer zwei Unbekannte x und y enthaltenden Gleichung die eine, etwa y, in eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln, und zwar in eine steigende [1]), wenn man weiss, dass x sehr klein, in eine fallende [2]), wenn man weiss, dass x sehr gross ist. Sei z. B. bei kleinem x die Gleichung

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

vorgelegt. Wäre x so klein als irgend möglich, d. h. Null, so wäre einfacher $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ und $y = a$. Dieses erste Reihenglied ergänzt man zu $y = a + p$, und die Einsetzung des vervollständigten Werthes von y in die ursprüngliche Gleichung liefert

$$4a^2p + 3ap^2 + p^3 + a^2x + apx - x^3 = 0,$$

von welcher nur die Glieder zunächst benutzt werden, welche nach x und nach p vom ersten Grade sind, also

$$4a^2p + a^2x = 0, \quad p = -\frac{x}{4}.$$

Der rohe Werth von p ergänzt sich zu $p = -\frac{x}{4} + q$, welches dann in die zwischen a, p und x gegebene Gleichung eingeführt wird. Man sieht, wie die Rechnung weiter verläuft, wie $q = \frac{x^2}{64a} + r$ gefunden wird u. s. w. Zuletzt ist

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} + \text{etc.}$$

Ist dagegen bei grossem x die Gleichung

$$y^3 + x^2y - 2x^3 + axy - a^3 = 0$$

vorgelegt, welche aus der Gleichung des vorher behandelten Falles durch Vertauschung von a mit x entsteht, so berücksichtigt man zunächst nur diejenigen Glieder, in welchen y und x zusammen vom dritten Grade sind: $y^3 + x^2y - 2x^3 = 0$. Daraus folgt roh $y = x$, genau $y = x + p$. Einsetzung dieses Werthes in die gegebene Gleichung verwandelt sie in

$$(4p + a)x^2 + (3p^2 + ap)x + p^3 = 0$$

mit überwiegendem Anfangsgliede. Mithin ist $(4p + a)x^2 = 0$ zu setzen, roh $p = -\frac{a}{4}$ und genau $p = -\frac{a}{4} + q$, wo q bereits klein

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 12—15. [2]) Ebenda I, 15—18.

gegenüber von a ist. Substitution des Werthes von p lässt

$$4qx^2 - \frac{1}{16}a^2x - \frac{1}{2}aqx - \frac{a^3}{64} + 3q^2x + \frac{3}{16}aq^2 + q^3 = 0$$

entstehen. Hier sind $4qx^2 - \frac{1}{16}a^2x$ die höchstwerthigen Glieder, deren Nullsetzung roh $q = \frac{a^2}{64x}$ und genau $q = \frac{a^2}{64x} + r$ liefert u. s. w. Mithin wird $y = x - \frac{a}{4} + \frac{a^2}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3} +$ etc., ein Ergebniss, welches naturgemäss aus dem des vorhergehenden Falles gleichfalls durch Vertauschung von x mit a entsteht. Die eigentliche Ausrechnung gibt Newton nur für die Glieder $x - \frac{a}{4}$.

Man erkennt leicht, dass Newton sich um die Convergenz der entstehenden Reihen wenigstens so weit kümmerte, als er, je nach dem Werthe von x, ein anderes Fortschreitungsgesetz der Glieder zur Geltung kommen liess. Man erkennt ferner, dass die Umkehrung der Reihen, von der (S. 68—69) die Rede war, nur ein Fall der *Literalis aequationum affectarum resolutio*, d. h. der Auflösung einer mit Zusatzgliedern behafteten Gleichung in Buchstaben, ist, wie Newton die soeben von uns besprochene Aufgabe nannte.

Newtons Gleichungsauflösungen fanden ihre erste Veröffentlichung im Drucke in der Algebra von Wallis, und zwar ebenso in deren englischer Ausgabe von 1685 als in der lateinischen von 1693. Ebenda wurde auch ein Abschnitt des (S. 66—67) von uns erwähnten Newtonschen Briefes vom 24. October 1676 abgedruckt, welcher das sogenannte Newtonsche Parallelogramm[1]) erläuterte.

Newton gab nämlich in diesem mittelbar für Leibniz bestimmten Briefe folgende Methode zur Auflösung der Gleichung

$$y^6 + 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0,$$

beziehungsweise zur Auffindung des Anfangsgliedes der Reihe, in welche y entwickelt werden soll, weil nach seiner Feststellung die Ergänzungen $p, q, r \ldots$ wesentlich leichter zu ermitteln sind. In der vorgelegten Gleichung ist y^6 das höchste Vorkommen von y, x^4 das höchste Vorkommen von x. Man bildet (Figur 11) ein aus $(6+1)(4+1) = 35$ kleinen Rechteckchen bestehendes Rechteck und bezeichnet die sieben Rechteckchen an der Basis von links nach rechts mit $0, y, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6$, die fünf linken Randrechteckchen

[1]) Kästner, Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen. III. Auflage Göttingen, 1794), S. 419—476. — S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (Leipzig, 1876), S. 136—187. — Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen, S. 35—37.

von unten nach oben mit 0, x, x^2, x^3, x^4. Sämmtliche übrige Rechteckchen werden gleichfalls bezeichnet, und zwar jedes mit dem Produkte der senkrecht darunter beziehungsweise zu äusserst links stehenden Randrechteckchen, so dass also die sämmtlichen Glieder der Gleichung, freilich ohne Zahlencoefficienten, als Bezeichnungen einzelner Rechteckchen vorkommen. In einer zweiten durchaus ähnlich gebildeten Zeichnung (Figur 12) werden die Felder der in der Gleichung vorkommenden Glieder durch Sternchen bemerkbar gemacht. Nun nimmt Newton ein Lineal und legt dasselbe an die linke untere Ecke des tiefstliegenden mit einem Sternchen versehenen linken Randfeldes. Um diesen Punkt als Drehungspunkt dreht er das Lineal von links nach rechts, bis es wieder an die linke untere Ecke eines durch ein Sternchen ausgezeichneten Feldes gelangt. Dann werden aus der vorgelegten Gleichung die zwei oder auch mehrere Glieder, deren Felder das Lineal an der linken unteren Ecke berührt, ausgesucht und aus ihnen sammt ihren Zahlencoefficienten eine Gleichung gebildet, welche das Anfangsglied der Entwicklung für y liefert. In dem gegebenen Beispiele sind die mit Sternchen versehenen dem Lineale anliegenden Felder die mit den Bezeichnungen x^3, x^2y^2, y^6. Die neue Gleichung enthält somit nur die Glieder $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0$. Ihr genügen die vier Wurzeln

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6
0	y	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6

Fig. 11.

Fig. 12.

$$y = \sqrt{ax}, \quad y = -\sqrt{ax}, \quad y = \sqrt{2ax}, \quad y = -\sqrt{2ax},$$

und jeden dieser vier Werthe darf man als Anfang einer Entwicklung von y benutzen, je nachdem man sich entschlossen hat, den einen oder den anderen Wurzelwerth zu ermitteln[1]). Die beiden noch übrigen Wurzeln der Hilfsgleichung: $y = \pm\sqrt{-3ax}$ lässt Newton unberücksichtigt, da er zwar positive und negative Gleichungswurzeln anerkennt, imaginäre aber noch nicht.

[1]) *quorum quemlibet pro primo termino quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est.*

Ausser in dem Briefe vom 24. October 1676 hat Newton sein Parallelogramm auch in der Abhandlung *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*[1]) auseinandergesetzt. Die Abhandlung war gegen Ende 1671 druckfertig und sollte, wie Collins in an Borelli und an einen damals in Paris verweilenden Engländer Francis Vernon gerichteten Briefen vom December 1671 mittheilte[2]), als Anhang zu einer von Newton vorbereiteten neuen Ausgabe der Algebra oder *Stel-konst* eines holländischen Mathematikers Gerhard Kinckhuysen erscheinen, deren erste Auflage von 1661 stammt. Als diese unterblieb, war Newtons nächste Absicht, welche gleichfalls etwa 1671 gefasst wurde, die mathematische Abhandlung einem optischen Werke beizugeben[3]). Auch daraus wurde nichts. Vielmehr erschien die Methodus fluxionum erst 1736, also 10 Jahre nach Newtons Tode in englischer von John Colson herrührender Uebersetzung mit fortlaufenden Erläuterungen. Ob, beziehungsweise welche Veränderungen Newton nach 1671 an seiner Abhandlung vorgenommen hatte, wird in anderem Zusammenhange im 89. Kapitel besprochen werden müssen. Auch in der Methodus fluxionum ist das Parallelogramm nur beschrieben, nicht bewiesen, und von den durch Andere nachträglich gelieferten Beweisen wird erst innerhalb der Zeit, zu welcher dieselben entstanden, zu reden sein.

Newton hatte mit seinen Regeln zur näherungsweisen Auflösung der Gleichungen einen ziemlich grossen Schritt über das von Stevin, von Vieta, von Harriot Erreichte hinaus vollzogen, aber — wir müssen stets darauf zurückkommen — es dauerte in England geraume Zeit, bis man die Analysis per aequationes, die seit 1669 bei Collins in keineswegs geheimer Verwahrung lag, richtig würdigte (S. 65). In den Jahren 1673 und 1674 erschien dort eine zweibändige Algebra von John Kersey[4]) (1616—1690?) unter dem Titel *The elements of mathematical art commonley called algebra*, welche alsbald nach ihrem Erscheinen als ein klassisches Werk betrachtet wurde. Leibniz hat in einem nachgelassenen Aufsatze über die Entwicklungsgeschichte der Algebra[5]) das Kerseysche Werk als eine wohlausgestattete und reiche Vorrathskammer der Algebra bezeichnet. Schon vor dem Erscheinen kamen 1672 in dem VIII. Bande der P. T. lobpreisende Ankündigungen. Wallis und Collins selbst waren deren Verfasser, aber Collins macht hier auch nicht die leiseste Anspielung auf Newtons Untersuchungen, es ist, als wenn sie für ihn nicht vorhanden gewesen wären.

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 31—199, besonders pag. 41 sqq. [2]) *Commerc. epistol.* pag. 81. [3]) Ebenda pag. 126—127. [4]) *National Biography* (edited by Sidney Lee), XXI, 69. [5]) Leibniz VII, 215—216.

Auch Leibniz hat zu verschiedenen Zeiten mit der Lehre von den Gleichungen sich beschäftigt, vor wie nach dem ersten Londoner Aufenthalte von 1676, aber seine Arbeiten beziehen sich nicht auf die Auffindung von Näherungswerthen der Wurzeln numerischer Gleichungen. Die ersten Arbeiten schlossen sich während seines Pariser Aufenthaltes an das Studium der Bombellischen Algebra an, zu welchem Leibniz die Anregung von Huygens erhalten hatte, und ihre Ergebnisse finden sich in dem zwischen Leibniz und Huygens damals geführten Briefwechsel[1]) und in einem vielleicht damals entstehenden Abhandlungsentwurfe[2]) über kubische Gleichungen und deren in imaginärer Form auftretenden reellen Wurzeln. Namentlich die von Leibniz aufgestellte Identität

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$$

machte auf Huygens einen überraschenden Eindruck. Zur wirklichen Einsicht in diese räthselhaften Formen war aber die Zeit noch nicht gekommen, und Leibnizens Formel war zwar ein auffallendes Beispiel, brachte aber die Frage nach dessen eigentlicher Bedeutung um keinen Schritt weiter, hätte vielleicht diesen Erfolg kaum haben können, wenn es der Oeffentlichkeit übergeben worden wäre.

Von viel grösserer Tragweite ist ein Gegenstand, dessen Keim schon 1676 nachweisbar ist, den Leibniz dann wieder in einem Briefwechsel, welchen er 1693 mit dem Marquis de l'Hospital führte, und in nachgelassenen Aufsätzen behandelte, und bei welchem die Glanzseite Leibnizischen Denkens, seine formale Erfindungsgabe, wie wir sagen möchten, in das hellste Licht trat. Guillaume François Marquis de l'Hospital[3]) (1661—1704) gehörte den höchsten französischen Adelskreisen an. Einige Jahre lang war er Rittmeister in der Armee seines Vaterlandes, dann zog er sich in ein wissenschaftlich erfülltes Privatleben zurück. Er stand in Briefverkehr mit Huygens, in persönlichen Beziehungen zu Johann Bernoulli, während dieser in Paris verweilte; seit Ende 1692 war auch ein Briefwechsel mit Leibniz im Gange. Wir haben im vorigen Kapitel (S. 76) von dem Aufsatze *Compendium quadraturae arithmeticae* gesprochen, welcher muthmasslich 1676, wenn nicht schon 1675 vollendet war. In diesem Aufsatze dürfte Leibniz zum ersten Male Stellenzeiger oder Indices (Bd. II, S. 686) angewandt haben, um Punkte derselben Gattung mit dem gleichen Buchstaben benennen zu können, ohne doch befürchten zu müssen, durch diese Gleichnamigkeit Verwechslungen hervorzurufen. Die einer und derselben Curve angehörenden Punkte

[1]) Leibniz II, 11—15. [2]) Ebenda VII, 138—154. [3]) *Mémoires de l'Académie des sciences.* Paris, 1704

nannte er[1]) insgesammt C, fügte aber links unten die Stellenzeiger 1, 2, 3, 4, 5 hinzu, so dass von Punkten ${}_1C$, ${}_2C$, ${}_3C$, ${}_4C$, ${}_5C$ die Rede ist. Eine ähnliche Benutzung von Stellenzeigern liegt gedruckt in der *Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum* in den A. E. von 1691 vor. Dort sind[2]) Punkte H, d, l, q durch links angebrachte Stellenzeiger unterschieden. In einem Briefe an den Marquis de l'Hospital vom 28. April 1693 ging Leibniz über diese frühere nicht hoch genug zu schätzende Neuerung abermals einen gewaltigen Schritt hinaus[3]): er erfand, wie wir heute sagen, die Anwendung mehrfacher Stellenzeiger, er benutzte sie zur Auflösung des Eliminationsproblems. Seien drei Gleichungen (1), (2), (3) vorgelegt, in welchen eine erste Unbekannte x, eine zweite Unbekannte y vorkommen, deren Entfernung beabsichtigt ist, so könne man, sagt Leibniz, die neun vorkommenden Coefficienten je zweiziffrig schreiben, so dass die erste Ziffer erkennen lasse, ob der Coefficient der (1), (2), (3) Gleichung angehöre, die zweite, ob er in Verbindung mit keiner, der 1. oder der 2. Unbekannten auftrete. Die drei Gleichungen heissen dementsprechend:

$$\begin{aligned} &(1)\quad 10 + 11x + 12y = 0 \\ &(2)\quad 20 + 21x + 22y = 0 \\ &(3)\quad 30 + 31x + 32y = 0. \end{aligned}$$

Die Wegschaffung von y zwischen (1) und (2), beziehungsweise zwischen (1) und (3) liefert zwei neue Gleichungen, denen Leibniz die Namen (4) und (5) beilegt. Sie heissen, sagt er,

$$\begin{aligned} &(4)\quad 10 \cdot 22 - 12 \cdot 20 + 11 \cdot 22x - 12 \cdot 21x = 0 \\ &(5)\quad 10 \cdot 32 - 12 \cdot 30 + 11 \cdot 32x - 12 \cdot 31x = 0 \end{aligned}$$

und wir bemerken dabei auch den Punkt als Multiplikationszeichen, den Leibniz hier gebrauchte, ohne besonders darauf aufmerksam zu machen. Nun sei, fährt Leibniz fort, zwischen (4) und (5) die Unbekannte x wegzuschaffen und das führe zu

$$\begin{matrix} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 & & 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 & = & 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 & & 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0. \end{matrix}$$

Man könne, wenn man die Rechnung fortsetze, zu einem allgemeinen Lehrsatze gelangen. Es handle sich schliesslich immer um die Gleichsetzung gewisser Produkte, in deren jedem je ein Coefficient aus jeder Gleichung vorkomme. Wir haben kaum nöthig darauf aufmerksam zu machen, dass bei Leibnizens Schlussgleichung die zweiten Ziffern

[1]) Leibniz V, 100. [2]) Ebenda V, 130—131. [3]) Ebenda II, 209—211.

der vorher zweiziffrig auf gleicher Zeile geschriebenen Coefficienten herunterrückend als rechts stehende Indices auftreten, dass ferner sowohl die links als die rechts vom Gleichheitszeichen unvermittelt unter einander stehenden Produkte additiv vereinigt gedacht sind, dass endlich die Eliminationsgleichung genau diejenige ist, welche man später als zu Null werdende Determinante zu schreiben gelernt hat. Der Schlusssatz des Briefes lässt erkennen, dass Leibniz ein volles Bewusstsein von der Bedeutsamkeit dieser Untersuchung besass. Man sieht hier, sagt er, auf was ich schon gelegentlich hingewiesen habe, dass die Vervollkommnung der Algebra von der Combinatorik abhängt[1]). Um so auffallender erscheint, dass Leibniz auch in dem handschriftlichen Nachlasse nichts hinterliess, was das Eliminationsproblem noch weiter gefördert hätte, wenn er auch von symbolisch zwei- und dreiziffrig geschriebenen Coefficienten häufig genug Gebrauch machte, und dass er sogar von dieser Bezeichnungsweise einmal in der Oeffentlichkeit in einer in den A. E. von 1700 gedruckten Abhandlung sprach[2]).

Von Versuchen Leibnizens, Gleichungen fünften Grades aufzulösen, reden wir weiter unten. Dagegen berühren wir hier noch im Vorbeigehen einen algebraischen Gegenstand, der Leibniz einmal beschäftigt hat. Die Gleichung $x^x + x = 30$ sagt er[3]), werde durch $x = 3$ erfüllt, aber meistens seien solche Gleichungen ausser mit Hilfe von Transcendenten unlösbar.

Ein weiterer Schriftsteller, der algebraische Untersuchungen anstellte, war Ehrenfried Walther von Tschirnhaus auf Kiesslingswalde[4]) (1651—1708). Er gehörte einem alten, früher böhmischen oder mährischen, aber schon durch vier Jahrhunderte Lausitzer Adelsgeschlechte an. Nach geringer, den damaligen deutschen Verhältnissen entsprechender Vorbildung in der Mathematik, zu welcher Tschirnhaus durch innere Neigung sich hingezogen fühlte, begab er sich 1668 zum Studium nach Leiden. Bald Krankheit, bald kriegerische Ereignisse, an welchen sich Tschirnhaus als Freiwilliger betheiligte, unterbrachen seine wissenschaftlichen Bestrebungen, ohne ihnen ein Ende zu machen. Er kehrte vielmehr immer wieder zur Mathematik und zu der ihr nahe verwandten Physik und Philosophie zurück. Nachdem er 1675 einen kurzen Besuch in der

[1]) *On voit aussi par la une chose que j'ai indiquée déja dans les occasions, c'est que la perfection de l'Algèbre depend de l'art des Combinaisons.* [2]) Leibniz V, 348. [3]) Ebenda VII, 215: *Sed plerumque valor nisi in transcendentibus impossibilis est.* [4]) Herm. Weissenborn, Lebensbeschreibung des Ehrenfr. Walther v. Tschirnhaus auf Kiesslingswalde und Würdigung seiner Verdienste. Eisenach, 1866.

Heimath gemacht hatte, ging er über Holland nach England, von da im September des gleichen Jahres nach Paris, wo er (S. 28) mit Leibniz bekannt wurde, an welchen Oldenburg ihn mit einem Empfehlungsschreiben versehen hatte. Länger als ein Jahr blieben die beiden jungen, im Alter nur um fünf Jahre von einander abstehenden, in der Geistesrichtung nahe verwandten deutschen Gelehrten auf fremdem Boden in engsten Beziehungen, bis Leibniz im October 1676 Paris verliess. Nicht viel später ging auch Tschirnhaus wieder von dannen. Briefe vom April 1677 bis zum April 1678 aus Rom lassen den damaligen Aufenthaltsort erkennen. Ein abermaliger Besuch der Heimath fällt in das Jahr 1679. Ebendort verweilte er im April 1681. Dann war Tschirnhaus wiederholt in Paris, wo er am 22. Juli 1682 als Mitglied der Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde. Aber die meisten Briefe Tschirnhausens seit 1681 sind doch aus Sachsen datirt, wo er seinen endgiltigen Aufenthalt nahm, wo er mit kurfürstlicher Unterstützung drei Glashütten ins Leben rief, und wo er bald am Hofe, bald in der unmittelbaren Nähe jener Fabriken verweilte. Sein Vermögen scheint dabei in bedenklicher Weise abgebröckelt zu sein, auch seine Gesundheit litt, und somit waren seine letzten Lebensjahre eigentlich recht traurig.

Die Arbeit über Gleichungen, welche Veranlassung bot, diese Angaben über Tschirnhausens Lebensgeschichte hier einzuschalten, ist in den A. E. von 1683 abgedruckt[1]) und führt die Ueberschrift *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione per D. T.*, wo die Bedeutung der beiden Buchstaben D. T., welche *Dominum Tschirnhausen* als den Verfasser bezeichneten, jedem damaligen Leser verständlich gewesen sein wird, nachdem seit 1682 schon wiederholt Aufsätze aus seiner Feder in den A. E. veröffentlicht worden waren. Wenn Tschirnhaus wirklich zu leisten im Stande war, was der Titel versprach, d. h. wenn er jede Gleichung durch Wegschaffung aller zwischen dem ersten und dem letzten Gliede befindlichen Zwischenglieder in eine binomische Gleichung von der Form

$$x^n - k^n = 0$$

zu verwandeln vermochte, dann war das allgemeinste Problem der Algebra gelöst.

Tschirnhausens Methode bestand in Folgendem, wenn wir einen Augenblick seine Bezeichnung und Darstellungsweise zu Gunsten einer allgemeineren Erörterung verlassen. Sei die Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

gegeben. Man bildet eine hinzutretende Hilfsgleichung, *aequatio*

[1]) A. E. 1683, 204—207 (Maiheft).

assumta, von der Form

$$x^{n-1} = b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \cdots + b_{n-2} x + b_{n-1} + y$$

und eliminirt x zwischen der ursprünglichen und der angenommenen Gleichung. Dabei entsteht eine neue Gleichung mit der Unbekannten y, welche gleichfalls n ten Grades ist[1]), mithin

$$y^n + c_1 y^{n-1} + \cdots + c_{n-1} y + c_n = 0$$

heisst. In $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ kommen aber die willkürlichen Grössen $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ vor, welche man so bestimmen wird, dass

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0,$$

dass mithin nur noch $y^n + c_n = 0$ als neue Gleichung übrig bleibt, womit die Aufgabe gelöst ist. Wir wissen heute, dass diese Schlussfolgerung eine übereilte ist. Allerdings entsteht mit Hilfe der angenommenen Gleichung das Eliminationsergebniss

$$y^n + c_1 y^{n-1} + \cdots + c_{n-1} y + c_n = 0.$$

Allerdings enthalten die $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ die willkürlichen Grössen $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$. Aber die Bestimmung der letzteren aus

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$$

ist meistens mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verknüpft.

Von diesen Schwierigkeiten sagt Tschirnhaus kein Wort, während er sehr gut erkennt, dass die erforderte Elimination wesentlich einfacher von statten geht, wenn man die Gleichung in x als von ihrem zweithöchsten Gliede schon befreit, also in der Form

$$x^n + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

in Rechnung zieht[2]). Wie Tschirnhaus die Elimination vollzogen wissen wollte, mit deren Hilfe jene neue Gleichung entsteht, deren mittlere Coefficienten nach seiner Behauptung zum Verschwinden gebracht werden können, sagt er nicht. Wir möchten vermuthen, er habe sich der Subtraktion der bald mit der Unbekannten, bald mit Bekanntem vervielfachten angenommenen Gleichung von der ursprünglich gegebenen Gleichung in mehrfacher Wiederholung bedient.

Tschirnhausens Beispiel der kubischen Gleichung heisst, nachdem das quadratische Glied schon entfernt ist, $y^3 = qy + r$, die angenommene Gleichung ist $y^2 = by + z + a$. Wir wollen jene die Gleichung I, diese die Gleichung II nennen. Wird II mit y vervielfacht von I abgezogen, so entsteht $by^2 = (q - a - z)y + r$. Davon die mit b verviefachte II abgezogen bringt

[1]) *quae aeque altas dimensiones obtinet.* [2]) Vergl. Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig, 1878. S. 119—126. Ueber das zuletzt Erwähnte vergl. S. 121, Z. 24—28.

$$(z + a + b^2 - q)\, y = - bz - ab + r$$

hervor, beziehungsweise $y = \frac{-bz - ab + r}{z + a + b^2 - q}$. Setzt man aber diesen Werth von y in II ein und schafft die Brüche durch Multiplikation der Gleichung mit $(z + a + b^2 - q)^2$ weg, so erhält man

$$z^3 + (3a - 2q)z^2 + (3a^2 - 4qa + q^2 - qb^2 + 3rb)z$$
$$+ (a^3 - 2qa^2 + q^2a - qb^2a + 3rba - r^2 - qrb + rb^3) = 0,$$

und das ist ganz genau die Gleichungsform, von welcher Tschirnhaus sagt, man gelange zu ihr.

Das Verschwinden der Mittelglieder fordert erstlich $3a - 2q = 0$ also $a = \frac{2}{3} q$ und zweitens $3a^2 - 4qa + q^2 - qb^2 + 3rb = 0$ oder

$$qb^2 - 3rb = 3a^2 - 4qa + q^2 = - \frac{1}{3} q^2$$

$$\text{also } b = \frac{3}{q} \left[\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} \right]$$

wie Tschirnhaus schreibt. Diese Werthe von a und b braucht man nur in die angenommene Gleichung einzusetzen, so wird aus

$$y^3 = qy + r \text{ und } y^2 = \frac{3}{q} \left[\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} \right] y + z + \frac{2q}{3}$$

unter Wegfall von y eine Gleichung in z entstehen, welche z^3 einer aus lauter Bekanntem zusammengesetzten Grösse gleichsetzt.

Tschirnhaus gibt dann weiter die Werthe von a und b an, welche diejenige angenommene Gleichungen hervorbringen, welche sich eignen, aus den schon vom zweithöchsten Gliede befreiten Gleichungen 4., 5., 6. Grades neue Gleichungen gleichen Grades hervorzubringen, welche auch vom dritthöchsten Gliede befreit sein werden. Aber warum diese Genügsamkeit? Warum gibt Tschirnhaus nicht lieber diejenige angenommene Gleichung 4. Grades an, welche die Gleichung 5. Grades von ihren vier Mittelgliedern befreien lässt? Sollte er an der Unfehlbarkeit seiner Methode irre geworden sein, als er sie zur Auflösung der Gleichung 5. Grades benutzen wollte, oder sollte er diesen Versuch gar nicht gemacht haben? Wir halten letztere Annahme für gradezu ausgeschlossen.

Wir haben Leibnizens Beschäftigung mit der Gleichung fünften Grades (S. 107) erwähnt. Sie ist durch einen Brief sicher gestellt, welchen Huygens an Leibniz während ihres gemeinschaftlichen Aufenthaltes in Paris schrieb[1]. Nun kam Tschirnhaus im

[1]) Leibniz II, 14: *Vous vous estes mis a chercher une chose qui doit estre bien difficile a trouver puisqu'elle ne l'a pas esté encore, qui est de donner des formules de racines pour les Equations du 5e degré et au delà.*

September 1675 nach Paris. Er stand mit Leibniz im engsten wissenschaftlichen Verkehr, und wenn man daraus an und für sich folgern könnte, Leibniz werde auch von seinen algebraischen Forschungen dem Freunde kein Hehl gemacht haben, so können wir die Thatsache auch anderwärts bestätigen. Als Tschirnhaus im Spätherbst 1679 nach Deutschland zurückkehrte, besuchte er Leibniz auf einige Tage in Hannover[1]. Leibniz rief ihm damals die Pariser Tage ins Gedächtniss zurück und frischte nachmals die Erinnerung auch in einem Briefe wieder auf, aus welchem wir eine Stelle übersetzen[2]: „Sie werden zugeben, dass ich nicht unbedachtsam über Ihre Methoden zur Auffindung von Gleichungswurzeln geurtheilt habe, und Sie werden glauben, dass ich nicht aus Eitelkeit sagte, dass ich Aehnliches schon früher gesucht habe, sondern von der Erwägung ausgehend, dass Sie nicht später einmal mich in Verdacht haben möchten, etwas von Ihnen abgeschrieben zu haben; und dass, wenn ich Ihnen ins Gedächtniss zurückrief, was ich Ihnen in Paris gezeigt hatte, ich es nicht that, als wenn ich glaubte, Sie hätten sich meine Gedanken angeeignet — weiss ich doch, was Sie für sich allein können — sondern um Ihnen leichter zu beweisen, dass ich kein Neuling in jenen Untersuchungen war.“ Aus dieser Stelle geht überdies hervor, dass Leibniz damals mit Tschirnhausens Untersuchungen über Gleichungen bekannt gewesen sein muss, und so war es auch.

Schon am 10. April 1678 hatte Tschirnhaus von Rom aus ausführliche Mittheilung an Leibniz gemacht[3], und wenn auch der Brief leider nicht im Wortlaute durch den Druck bekannt gegeben worden ist, so weiss man doch so viel, dass das Wesentliche des Inhaltes der Abhandlung von 1683 dort entwickelt war. Man weiss überdies aus Leibnizens Antwort und aus einem späteren Briefe Tschirnhausens, dass Tschirnhaus damals auch andere Methoden für die Gleichungsauflösung in Vorschlag brachte, bei welchen vermuthlich die Unbekannte einer Gleichung $n$ten Grades der Summe von $n-1$ Grössen gleichgesetzt wurde[4] und jene Summanden selbst auch als $n$te Wurzeln gewählt werden konnten[5].

Leibniz unterliess es nicht, dem Freunde Einwürfe zu machen, welche Tschirnhaus noch auf der Reise zukamen. Auch aus diesem Briefe übersetzen wir eine Stelle[6] mit der Bemerkung, dass Leibniz sich regelmässig des Zeichens   als Gleichheitszeichen zu bedienen pflegte (S. 33), dass wir aber vorzogen, das gewöhnliche Zeichen dafür eintreten zu lassen. „Was Ihre dritte Methode zur Auffindung

[1] Leibniz IV, 423. [2] Ebenda IV, 482. [3] Ebenda IV, 450. [4] Weissenborn, Tschirnhaus S. 182—185. [5] Leibniz IV, 469. [6] Ebenda IV, 478–479.

von Gleichungswurzeln betrifft, die darin besteht, zur Auflösung von

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

die Annahme

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = y$$

zu machen, dann x mittels y zu eliminiren und mit Hilfe der willkürlichen Grössen b, c, d u. s. w. die Mittelglieder in der entstehenden Gleichung $y^5 + \cdots = 0$ zu entfernen[1]), so glaube ich nicht, dass sie bei Gleichungen höherer Grade von Erfolg sein kann, es sei denn in besonderen Fällen. Ich glaube dafür einen Beweis zu besitzen." Wir machen besonders auf den letzten Ausspruch aufmerksam, den wir durch den Druck hervorheben liessen. Erst anderthalb Jahrhunderte später im Jahre 1824 gab Abel den unanfechtbaren Beweis der algebraischen Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung von höherem als dem vierten Grade. Die Benutzung von Tschirnhausens Methode, um die Gleichung 5. Grades auf die Form

$$x^5 + Ax + B = 0$$

zu bringen, ist noch einige dreissig Jahre jünger. Leibnizens briefliche Warnung verhallte ungehört. Nun kam jene Unterredung in Hannover. Kann es zweifelhaft sein, dass damals von der Anwendung der Tschirnhausenschen Methode auf Gleichungen 5. Grades die Rede gewesen sein muss? Tschirnhaus hat zuverlässig Versuche nach dieser Richtung angestellt, hat sich von ihrer Vergeblichkeit überzeugt, und er ist dadurch von der Werthschätzung seiner Methode zurückgekommen.

Auch für diese Behauptung besitzen wir einen Beleg. Im Jahre 1682 war Tschirnhaus in Paris. Er hatte, um in die Pariser Akademie der Wissenschaften aufgenommen zu werden — ein Wunsch, der, wie wir wissen (S. 108), am 22. Juli jenes Jahres in Erfüllung ging — derselben ein Verzeichniss seiner wissenschaftlichen Leistungen eingereicht. Von jenem Verzeichnisse machte er am 27. Mai Mittheilung an Leibniz[2]), und in ihm ist von der allgemeinen Auflösung jeder Gleichung $n$ten Grades keine Rede.

Und dennoch erfolgte die Veröffentlichung von 1683? Sie erfolgte, und als Leibniz alsdann fragte[3]): „Ich möchte doch wissen, ob Sie mit Hilfe Ihrer Methode zur Auffindung der Wurzeln aller Gleichungen endlich die so lange erhofften Wurzeln der Gleichung 5. Grades aufweisen können, denn die der Gleichungen niedrigeren

[1]) In dem Abdrucke des Leibnizischen Briefes finden sich einige Fehler, entweder Druck- oder Schreibfehler. In der Hilfsgleichung heisst das Glied rechts vom Gleichheitszeichen q statt y, und das erste Glied der Schlussgleichung heisst y^4 statt y^5. [2]) Leibniz IV, 488. [3]) Ebenda IV, 501.

Grades kennen wir schon lange nach anderen Methoden", da blieb Tschirnhaus die Antwort schuldig.

Aber auch der Beweggrund ist bekannt, der Tschirnhaus zur Veröffentlichung von 1683 veranlasste. Am 25. August 1683 schreibt Tschirnhaus buchstäblich[1]: *Dass sonsten bieshero in den Actis eines und das andere inseriren lassen, ist geschehen, dass sie zu Paris sehen, wie das in meinen studiis fortgehe, und das zugleich andern innotescire.* Es genügte Tschirnhaus nicht, Mitglied der Pariser Akademie zu sein; er wollte gleich vielen anderen Gelehrten von Ludwig XIV mit einem Jahresgehalte bedacht werden, und deshalb sollte man insbesondere in Paris sehen, *wie das in seinen studiis fortgehe.* Deshalb warf er in dem gedruckten Aufsatze mit allgemeinen Möglichkeiten um sich, an die er — so ist wenigstens unsere Ueberzeugung — selbst nicht mehr glaubte, wenn er auch in dem eben erwähnten Briefe vom 25. August 1683 fortfuhr: *Was den methodum anlanget, die Radices ope ablationis intermediorum terminorum zu determiniren, ist gar leicht zu demonstriren, dass er richtig; wo es gewiesse rationes nicht verhindern, die ich habe, so wihl solches publice auch in 5to gradu darthun.* Das müssten denn doch ganz absonderliche *rationes* gewesen sein, welche ihn abhielten, nachdem der Gedanke der Methode preisgegeben war, ihre edelste Frucht auf den Markt zu bringen.

Wir sind aus doppeltem Grunde so ausführlich auf Tschirnhausens algebraische Untersuchungen eingegangen. Erstlich wegen der grossen Bedeutung, welche dieselben nachträglich gewonnen haben, nachdem sie fast schon der Vergessenheit anheimgefallen waren, zweitens weil sie uns die Gelegenheit boten, Tschirnhausens Persönlichkeit auch in den wenig lobenswerthen Charakterzügen kennen zu lernen. Tschirnhaus war unzweifelhaft ein Mann von grosser Geistesschärfe und von mathematischer Erfindungsgabe. Er durchforschte erfolgreich sämmtliche damals in Angriff genommenen Gebiete. Aber er beabsichtigte aus seinen wissenschaftlichen Erfolgen einen unmittelbaren persönlichen Vortheil sich zu verschaffen, und deshalb kam es ihm nicht darauf an, vor der Oeffentlichkeit manches noch stärker aufzubauschen, als es in seinen eigenen Augen verdiente. Wir werden uns daran zu erinnern haben.

Der Zeitfolge nach nennen wir einige englische Schriften. Ein Geistlicher, Thomas Baker[2]), gab 1684 *The geometrical key or the gate of equations unlocked* heraus[3]), dessen wesentlicher Inhalt in der geometrischen Auflösung der von ihrem zweithöchsten Gliede nicht

---

[1]) Leibniz IV, 499. [2]) *National Biography* (edited by Leslie Stephen) III, 17. [3]) Ein Bericht darüber in den P. T. XIV, 549—550.

befreiten Gleichung von höchstens viertem Grade mit Hilfe einer Parabel und eines Kreises besteht.

Die Algebra von John Wallis, englisch 1685, lateinisch 1693 erschienen, haben wir (S. 4) von der geschichtlichen Seite aus unmöglich loben können. Aber als Lehrbuch der Algebra betrachtet war es ein ganz vorzügliches Werk, wäre es ein solches gewesen, wenn es auch nur die Newtonschen Untersuchungen allein zugänglich gemacht hätte, welche, wie wir erzählt haben (S. 102), dort zum Abdruck kamen. Der Leser konnte und kann noch heute ein massenhaftes Material an Regeln zur Auflösung von Gleichungen darin angesammelt finden und hat einzig davor sich zu hüten, Wallis unbedingten Glauben bezüglich der Urheberschaft der einzelnen Sätze entgegenzubringen. Eigene Untersuchungen auf algebraischem Gebiete hat Wallis nicht angestellt. Die lateinische Algebra lässt sich als zweite vermehrte Ausgabe der ersten englischen gegenüber betrachten. Es sind Dinge hineingearbeitet, welche erst nach 1685 bekannt wurden. So findet sich in ihr[1]) ein Auszug aus der *Analysis aequationum universalis* von Joseph Raphson, welche 1690 im Drucke erschien. Raphson war ein unbedingter Bewunderer und Nachahmer Newtons. Seine Auflösung von Zahlengleichungen ähnelt ungemein der newtonischen. Der Unterschied ist einzig der, dass wenn Newton die Ergänzungen p, q, r u. s. w. jeweils aus neuen Gleichungen ermittelte, Raphson den dem Schüler vielleicht leichter verständlichen, aber jedenfalls viel mehr Rechnung mit verhältnissmässig grösseren Zahlen erfordernden Weg einschlug, dass er die um p, dann die um $p+q$, die um $p+q+r$ u. s. w. veränderte Anfangsannahme der Unbekannten immer aufs neue in die ursprünglich gegebene Gleichung einsetzte.

Bakers und Raphsons Arbeiten fanden einen Fortsetzer in Edmund Halley[2]). Er gab 1687 in zwei Aufsätzen die zeichnende Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen mittels einer einzigen, also ein für allemal hergestellten Parabel und einem von Fall zu Fall sich ändernden Kreise. Er berücksichtigte dabei insbesondere, dass jene Parabel mit dem Kreise nur in einer graden Anzahl von Punkten sich schneiden könne, den Fall gleicher Wurzeln mit eingeschlossen, welcher zwei Durchschnittspunkte in einen Berührungspunkt übergehen lasse. Er verwandelte die kubische Gleichung, deren Unbekannte z heissen mag, durch Vervielfachung mit

[1]) Wallis, Opera II, 396—397. [2]) Die drei Aufsätze Halleys, von welchen hier die Rede ist, sind in den P. T. Nr. 188 (1687), 190 (1687), 210 (1694) erschienen, aber auch vereinigt im Anhang zu der *Arithmetica universalis* von Newton (Leiden, 1732) abgedruckt.

$z - e$ in eine biquadratische Gleichung, und da nunmehr ein Durchschnittspunkt der neu hinzugetretenen Wurzel $z = e$ entstammen musste, so war durch den ihm entsprechenden zweiten Durchschnittspunkt mindestens eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung gesichert. Halley wandte sich hierauf 1694 den rechnenden Annäherungsverfahren zu. Neben Newton und Raphson berücksichtigte er auch ein Werk eines französischen Mathematikers Thomas Fantet de Lagny[1] (1660—1734). Dieser hatte 1692 *Méthodes nouvelles et abrégées pour l'extraction et l'approximation des racines* herausgegeben und darin behauptet $\sqrt[3]{a^3 + b}$ liege zwischen $a + \frac{ab}{3a^3 + b}$ und $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b}{3a}} + \frac{a}{2}$, und es sei ferner $\sqrt[5]{a^5 + b}$ annähernd gleich

$$\sqrt{\sqrt{\frac{a^4}{4} + \frac{b}{5a}} - \frac{a^2}{4}}.$$

Halley zeigte, dass unter der selbstverständlichen Voraussetzung eines im Verhältniss zu a kleinen b diese Formeln ähnlich abgeleitet werden können, wie bei der Newtonschen Gleichungsauflösung verfahren wird. Sei $a + e = \sqrt[3]{a^3 + b}$, so folge $3a^2e + 3ae^2 + e^3 = b$, und unter Weglassung der höheren Potenzen von e könne $3a^2e = b$, $e = \frac{b}{3a^2}$ gesetzt werden. Genauer sei $(3a^2 + 3ae)e = b$, also $e = \frac{b}{3a^2 + 3ae}$, beziehungsweise

$$e = \frac{b}{3a^2 + 3a \cdot \frac{b}{3a^2}} = \frac{ab}{3a^3 + b}.$$

Andrerseits könne aus dem näherungsweise richtigen $3a^2e + 3ae^2 = b$ auch gefolgert werden

$$e = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b}{3a}} \text{ u. s. w.}$$

Noch etwas früher als De Lagnys hier erwähnte Schrift, nämlich 1690, ist der *Traité d'algèbre* von Michel Rolle erschienen. Wir haben (S. 98—100) einiges aus diesem Werke angeführt, was die Lösung unbestimmter Aufgaben betraf. Es war eine wirkliche Methode, die uns dort entgegentrat, alle früheren Leistungen ähnlicher Art überholend, und nicht minder ist, was wir jetzt zu erwähnen haben, ganz anders geartet, als was wir aus anderen Schriftstellern zu entnehmen im Stande waren. Erwägt man dabei, dass, wie wir schon bei unserer ersten Begegnung äusserten, Rolle nicht leicht oder gar angenehm zu schreiben wusste, so begreift man den ver-

[1]) *Mémoires de l'Académie des Sciences.* Paris, 1734. — Montucla II, 168.

hältnissmässig geringen Einfluss, den sein Traité d'algèbre übte. Fremdartig z. B. musste es schon erscheinen, dass Rolle, um das Nichts darzustellen[1]), den griechischen Buchstaben θ verwerthete, und wir sind nicht im Stande, die etwaige Frage, warum nicht die Null in ihrem Rechte blieb, zu beantworten. Fremdartig waren die Säulen, die er benutzte. Die Rückkehrsäule, *colomne de retour*, haben wir in ihrer Anwendung auf unbestimmte Aufgaben kennen gelernt, auch bei bestimmten Aufgaben erscheint diese Art der Anordnung. Neu war ferner der Name der Hypothesen[2]), worunter Rolle zwei Annahmen für die Unbekannte versteht, die zwar beide die Gleichung nicht erfüllen, von denen aber die eine dem Gleichungspolynom einen positiven, die andere einen negativen Werth gibt, so dass ein Wurzelwerth zwischen ihnen liegen muss. Man kommt dem Wurzelwerthe näher und näher, indem man die Hypothesen durch andere ersetzt, deren gegenseitige Entfernung kleiner und kleiner wird, und somit ist die Aufgabe der Gleichungsauflösung auf die der Auffindung zweckdienlicher Hypothesen zurückgeführt. Eine Hypothese ist immer die Null, und ihre Substitution gibt dem Gleichungspolynome das Zeichen seines letzten Gliedes[3]). Aber wie findet man die zweite Hypothese? Dazu führen verschiedene Umwandlungen der vorgelegten Gleichung, welche zum Theil schon Vieta (Bd. II, S. 585) bekannt waren. Eine Umwandlung schafft alle Brüche fort, indem die ganze Gleichung mit dem kleinsten Gemeinvielfachen aller vorkommenden Nenner vervielfacht wird, so dass die Gleichung

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

erscheint mit lauter ganzzahligen theils positiven, theils negativen Coefficienten, deren hier gebrauchte Bezeichnung, wie wir kaum zu sagen nöthig haben, bei Rolle nicht vorkommt. Eine zweite Umwandlung gibt dem Wurzelwerthe das entgegengesetzte Zeichen dadurch, dass alle Glieder mit ungradem Exponenten das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Eine dritte Umwandlung schafft den Coefficienten a_0 des höchsten Gliedes fort, indem $z = \frac{y}{a_0}$ eingesetzt und die neuentstehende Gleichung mit a_0^{n-1} vervielfacht wird, was nach der Regel ausgeführt wird, man solle den Coefficienten von z^n weglassen und unter die Folgeglieder (solche mit dem Coefficienten 0 miteingeschlossen) die Zahlen $1, a_0, a_0^2 \ldots$ schreiben, mit welchen man ihre Coefficienten zu vervielfachen habe[4]).

---

[1]) Rolle, *Traité d'algèbre* pag. 11: *pour marquer le rien.* [2]) Ebenda pag. 103. [3]) Ebenda pag. 108: *Le θ donnera toujours le mesme signe que celuy du dernier terme.* [4]) Ebenda pag. 118.

Eine, wie es scheint, Rolle angehörende Umformung will den Gleichungsgliedern wechselnde Vorzeichen geben[1]). Sei a_0 positiv (was, wenn es nicht von vorn herein der Fall ist, durch Vervielfältigung der ganzen Gleichung mit -1 hervorgebracht wird) und $-g$ der grösste vorkommende negative Coefficient. Man dividirt g durch a_0 und vermehrt $\frac{g}{a_0}$ um 1 oder um 1 und einen echten Bruch α, der $\frac{g}{a_0}$ zu einer ganzen Zahl ergänzt, so dass also $\frac{g}{a_0}+1+\alpha=h$ eine positive ganze Zahl ist. Die Substitution $z=h-x$ hat alsdann den gewünschten Erfolg. Rolle beweist den Satz nicht, aber er zeigt seine Richtigkeit an Beispielen. Bei $8z^2-5z-2=0$ ist $a_0=0$, $g=5$, $h=\frac{5}{8}+1+\frac{3}{8}=2$ und $z=2-x$ führt die gegebene Gleichung in $8x^2-27x+20=0$ über. Die Regel setzt voraus, mindestens ein negatives Glied komme in der Gleichung vor, oder es fehle mindestens ein Glied, welches man dann mit dem Coefficienten -0 behaftet denken kann, d. h.

$$g=0,\quad h=0+1=1,\quad z=1-x.$$

Ist beides nicht der Fall, so genügt die Substitution $z=-x$, um den regelmässigen Zeichenwechsel hervorzubringen.

Eben die Zahl h, deren Entstehung wir kennen gelernt haben, ist auch als eine Hypothese, und zwar als sogenannte grosse Hypothese zu benutzen[2]), während der Werth 0 die kleine Hypothese heisst. Gemeinsam heissen sie äusserste Hypothesen, und zwischen ihnen liegen mittlere Hypothesen. Solche mittlere Hypothesen kann man durch ein Tastverfahren suchen, indem man das arithmetische Mittel zweier schon gefundener Hypothesen versuchsweise statt der Unbekannten setzt[3]). Man kann auch, wenn $z=c$ ein Näherungswerth der Unbekannten ist, weitergehend $z=c+x$ versuchen und dann die Ermittelung von x anstreben[4]). Ein drittes Verfahren, und damit sind wir bei Rolles wichtigster Entdeckung angelangt, ist, ist die Methode der Cascaden[5]).

Sei die mit wechselnden Vorzeichen versehene Gleichung

$$a_0v^n-a_1v^{n-1}+a_2v^{n-2}-\cdots\pm a_n=0$$

gegeben und sei $v=x+z$ eingesetzt und die neue Gleichung nach

[1]) Rolle, *Traité d'algèbre* pag. 120: *Lorsque le premier terme, le troisiéme, le cinquiéme, le septiéme et generalement tous les termes impairs sont précedez du signe +, et que tous les autres termes sont précedez du signe —, on dira que les signes de l'égalité sont alternatifs: et l'on pourra toûjours faire que les signes soient alternatifs par le moyen de la regle suivante.* [2]) Ebenda pag. 124. [3]) Ebenda pag. 103. [4]) Ebenda pag. 107. [5]) Ebenda pag. 125 flgg.

x geordnet oder in Rolles Ausdrucksweise x als Ursprung genommen[1]). Dadurch entsteht:

$$\left.\begin{array}{r} a_0x^n + na_0zx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a_0z^2x^{n-2} + \cdots + a_0z^n \\ - a_1x^{n-1} - (n-1)a_1zx^{n-2} - \cdots - a_1z^{n-1} \\ + a_2x^{n-2} + \cdots + a_2z^{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pm a_n \end{array}\right\} = 0$$

und soll diese Gleichung für jedes x erfüllt werden, so müssen die als nach z geordnete Summen auftretenden Coefficienten der Potenzen von x einzeln verschwinden, d. h. es muss sein:

$$na_0z - a_1 = \frac{n(n-1)}{2}a_0z^2 - (n-1)a_1z + a_2 = \cdots$$
$$= a_0z^n - a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} - \cdots \pm a_n = 0.$$

Diese n Gleichungen sind als Cascaden bezeichnet[2]). Aber auch eine andere Bildungsweise derselben lehrt Rolle schon etwas früher. Man soll in der ursprünglich gegebenen Gleichung z statt x schreiben, jedes ihrer Glieder mit dem Exponenten der in ihm auftretenden Potenz von z multipliziren, die Summe der so entstehenden Ausdrücke durch z dividiren und dann gleich Null setzen; man soll mit der neu erhaltenen Gleichung ebendasselbe vornehmen u. s. w.[3]). In der Sprache der Neuzeit heisst dieses: die aufeinander folgenden Cascaden sind die aufeinander folgenden Ableitungen der gegebenen Gleichung.

Rolle behauptet nun: die Wurzeln irgend einer Cascade von der letzten anfangend und aufsteigend bis zur ursprünglich gegebenen Gleichung seien stets als Hypothesen in der Cascade nächsthöheren Grades zu verwenden. In unseren Tagen spricht man den Satz so aus[4]): Zwischen zwei aufeinander folgenden Wurzeln α und β der Gleichung $f'(z) = 0$ kann nicht mehr als eine einzige Wurzel von $f(z) = 0$ liegen.

Rolle hat im Traité d'algèbre keinen Beweis seiner Cascadenmethode gegeben. Dagegen muss er noch in dem Druckjahre 1690 jenes Lehrbuches ein Duodezbändchen *Sur les effections geometriques* veröffentlicht haben, in welchem jener Beweis enthalten ist. So erzählt er selbst am Ende der dritten Seite der Vorrede der (S. 100) erwähnten *Methodes pour resoudre les questions indeterminees de l'algebre* von 1699.

---

[1]) *si on prend x pour l'origine.* [2]) Ebenda pag. 126—127. [3]) Ebenda pag. 125. [4]) J. A. Serret, Handbuch der höheren Algebra (deutsch von G. Wertheim) 2. Auflage. Leipzig, 1878. I, 224.

Der beachtenswerthen Gegenstände sind aber im Traité d'algèbre noch mehr. Wir nennen nur beiläufig den Satz[1]), dass, wenn zwei Hypothesen in eine Gleichung eingesetzt werden, die Differenz der Ergebnisse durch die Differenz der Hypothesen theilbar sein müsse, ferner ein Kapitel[2]) von der Aufsuchung des grössten Gemeintheilers zweier Gleichungspolynome, endlich den Satz[3]), dass jede $n$te Wurzel n Werthe besitze. Ist der Wurzelexponent ungrad, sagt Rolle, so sind alle Wurzeln bis auf eine imaginär, und diese eine ist positiv oder negativ; ist der Wurzelexponent grade, so sind entweder alle Wurzeln imaginär oder alle mit Ausnahme von zweien, von denen die eine positiv, die andere negativ ist.

Zum Abschluss unseres Kapitels und zur Ueberleitung in das nächstfolgende eignet sich vielleicht die Erwähnung einer 1695 in Frankfurt gedruckten neuen Ausgabe der Descartes'schen Geometrie. Jakob Bernoulli veranstaltete sie und fügte zahlreiche Anmerkungen bei, welche auch gesammelt in seinen Werken sich vereinigt finden[4]). Besonders erwähnenswerth ist die IV. Anmerkung über die niedrigstgradigen Curven, durch welche eine Gleichung construirbar wird[5]). Jakob Bernoulli hatte übrigens schon 1688 im Januarhefte der A. E. sich der gleichen algebraisch-geometrischen Frage zugewandt[6]) (vergl. Bd. II, S. 744).

88. Kapitel.

Kegelschnitte. Curvenlehre.

Was wir zuletzt berührten, war eine algebraische Frage, welche durch Curvendurchschnitte hervorgerufen wurde. Auch die Auflösungen von Gleichungen 3. und 4. Grades mit Hilfe von Kegelschnitten, welche Baker (S. 113), welche Halley (S. 114) sich zur Aufgabe stellten, sollten der Vervollkommnung der Algebra dienen. Man könnte ja einen Augenblick sich darüber wundern, dass trotz der neuerfundenen und vervollkommneten rechnenden Näherungsmethoden der alte Weg zeichnender Darstellung von Gleichungswurzeln noch immer betreten wurde. Thatsächlich war er nicht überflüssig gemacht. Wir haben gesehen, dass die rechnenden Näherungsmethoden voraussetzten, ein Wurzelwerth sei roher Weise, etwa so weit ganze Zahlen ihn kennen lehren, bereits ermittelt, und grade diesen Anfangswerth zur genaueren Annäherung konnten Curvendurchschnitte

[1]) Rolle, *Traité d'algèbre* pag. 152. [2]) Ebenda pag. 169—183. [3]) Ebenda pag. 230. [4]) Jac. Bernoulli Opera II, 665—717. [5]) Ebenda II, 677—679. [6]) Ebenda I, 343—351.

sehr leicht liefern. Die Kegelschnitte und ihr Studium traten daher auch bei solchen Schriftstellern nicht vollständig in den Hintergrund, deren wissenschaftliche Geschmacksrichtung der Algebra zugewandt war. Andere Schriftsteller beschäftigten sich mit Kegelschnitten, mit Curvenlehre um des Gegenstandes selbst willen.

Philipp De la Hire[1]) (1640—1718) sollte nach dem Wunsche seines Vaters, der königlicher Maler war, gleichfalls der Kunst sich widmen und gehorchte dieser Anweisung namentlich in Rom, wohin er 1660 zum Theil aus Gesundheitsrücksichten geschickt wurde. Er eröffnete auch bei seiner Rückkehr in seine Vaterstadt Paris daselbst eine Malerschule. Nicht minder indessen wandte er der Geometrie und Astronomie sich zu, und seit 1678 gehörte er der Akademie der Wissenschaften an. Er versah die Professur der Mathematik am Collège royal de France und wurde mit geodätischen Arbeiten betraut. Ausser zahlreichen Abhandlungen, welche in den Veröffentlichungen der Akademie der Wissenschaften gedruckt sind, machte sich De la Hire namentlich durch drei grössere Schriften über Kegelschnitte verdient. Zuerst erschien die *Nouvelle méthode en Géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques* 1673, dann kamen die *Nouveaux élémens des sections coniques, les lieux géométriques, la construction ou effection des équations* 1679, endlich *Sectiones conicae in novem libros distributae* 1685.

Gleich die erste Schrift von 1673 hätte von bahnbrechender Bedeutung werden können, wenn man ihr genügende Beachtung geschenkt hätte, aber das war nicht der Fall. Die *Nouvelle Méthode*[2]) besteht aus zwei Abschnitten, deren erstem eigentlich der Titel zukommt, welcher als der des ganzen Bandes genannt zu werden pflegt, und über diesen ersten Abschnitt wurde im Journal des sçavans unter dem 17. December 1674, sowie in den P. T. von 1676 (Nr. 129) ausführlich und günstig berichtet. Aber der zweite Abschnitt, *Planiconiques* überschrieben, wurde in beiden Berichten vernachlässigt, im ersten mit einem Worte des Lobes ohne Inhaltsangabe abgefertigt, im zweiten ganz übergangen, während die Planiconiques grade das Neue bildeten, muthmasslich das Allzuneue, als dass es Anklang gefunden hätte. Hier ist zum ersten Male eine Construction gelehrt, welche ausgehend von einem gegebenen Kreise und zwei ebenfalls

[1]) Ernst Lehmann, De la Hire und seine Sectiones conicae. Programme zu den Jahresberichten des Königl. Gymnasiums zu Leipzig für die Schuljahre Ostern 1887 bis Ostern 1888 und Ostern 1889 bis Ostern 1890. Ersteres Programm führt in der Reihenfolge deutscher Schulprogramme die Bezeichnung 1888, Nr. 510, letzteres 1890, Nr. 532. [2]) Chasles, *Aperçu hist.* 127—130 (deutsch 124—126).

gegebenen festen Geraden, der Formatrix und der Directrix, sowie einem gegebenen festen Punkte einen Kegelschnitt entstehen lässt (Figur 13). Eine Sehne $M'M$ des Kreises schneidet bei ihrer Verlängerung die Formatrix in F, die Directrix in D. Der feste Punkt P wird mit D, mit M, mit M' gradlinig verbunden. Zieht man nun $FM_1M_1' \parallel DP$, so sind die Durchschnittspunkte M_1 und M_1' dieser Geraden mit der PM und PM' die von M und M' aus gebildeten — *formés* — Punkte eines Kegelschnittes. De la Hires Beweis dafür, dass der geometrische Ort der Punkte M_1 und M_1' in der That ein Kegelschnitt sei, wird von Denjenigen, welche das ungemein selten gewordene Buch zu sehen Gelegenheit hatten, als äusserst verwickelt gekennzeichnet, aber nicht näher geschildert.

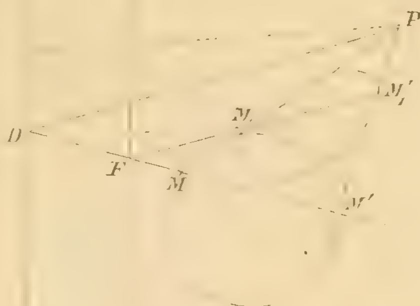


Fig. 13.

Die *Nouveaux Élémens* von 1679 sind mehr analytisch geometrisch gehalten. Die an die Spitze gestellte Definition der Kegelschnitte ist die aus den Eigenschaften der Brennstrahlen hervorgehende: ein Kegelschnitt ist der geometrische Ort der Punkte, welche entweder gleiche Entfernung von einem festen Punkte und einer festen Geraden oder eine constante Summe oder Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten besitzen. Im Verlaufe der Untersuchung ist das Normalenproblem für alle Kegelschnitte mittels des Kreises und der Geraden gelöst.

Wir erinnern uns daran (Bd. II, S. 617), dass De la Hire in dem gleichen Jahre 1679, in welchem er die Nouveaux Élémens herausgab, jene Abschrift von Desargues Hauptwerk von 1639 anfertigte, welche auf die Gegenwart gekommen ist und ihr die Kenntniss von den Leistungen jenes grossen Geometers vermittelt hat. De la Hire selbst hat offenbar damals, wenn nicht schon früher, den Desargues'schen Gedankengang sich ganz zu eigen gemacht, und eine Frucht dieser Vertiefung in die ohne analytische Hilfsmittel zu Werke gehende Geometrie sind die *Sectiones Conicae* von 1685. Das erste der neun Bücher, in welche De la Hire seine Kegelschnitte eingetheilt hat, beschäftigt sich nur mit harmonischen Punkten und Strahlen und deren Auftreten bei dem Kreise. Die harmonischen Strahlen führen bei ihm erstmalig den Namen der Harmonikalen. Der XI. Lehrsatz spricht den Satz aus, dass die von einem Punkte einer Ebene nach den Endpunkten und der Mitte einer derselben Ebene

angehörenden Strecke gezogenen Gerade nebst einer von demselben Punkte ausgehenden Parallele zu jener Strecke vier Harmonikale sind. Zu drei gegebenen Punkten einer Geraden wird der vierte harmonische Punkt unter alleiniger Anwendung des Lineals gefunden, indem von den Eigenschaften des vollständigen Vierseits Gebrauch gemacht wird. Der XXI. Lehrsatz ist der von der harmonischen Theilung einer Kreissekante durch die Kreislinie und die zum Ausgangspunkte der Sekante zugehörige Polare. Er lautet in genauer Uebersetzung folgendermassen: Sei (Figur 14) $BFDG$ ein Kreis, und seien an ihn von dem in seiner Ebene aber ausserhalb des Kreises gelegenen Punkte A die Berührenden AF, AG gezogen, sowie auch die FG als Verbindungsgerade der Berührungspunkte F und G. Zieht man alsdann von A aus eine beliebige Gerade AD, welche die Kreislinie in B und D, die FG in C trifft, so ist AD in den Punkten A, B, C, D harmonisch getheilt. De la Hires Beweis beschreibt über BD einen Halbkreis, zieht $CH \perp AD$ bis zum Durchschnitt des Halbkreises in H, dann die Gerade AH und $BI \parallel DE \parallel CH$ bis zum Durchschnitt mit AH in I und E. Ueberdies wird O, die Mitte von FG, mit A verbunden. Erstlich

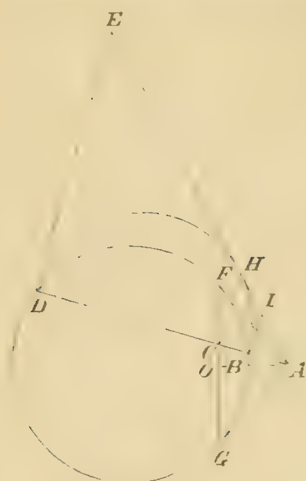


Fig. 14.

wird nun behauptet, dass AH in H jenen Halbkreis über BD berühre. Es ist $AF^2 = AO^2 + OF^2$, ferner $AC^2 = AO^2 + OC^2$. Weiter ist das Produkt

$$CF \cdot CG = (OF - OC)(OF + OC) = OF^2 - OC^2,$$

also $OF^2 = CF \cdot CG + OC^2$ und

$$OF^2 + AO^2 = CF \cdot CG + OC^2 + AO^2$$
$$\text{oder } AF^2 = CF \cdot CG + AC^2.$$

Ferner ist nach dem Satze von einander schneidenden Kreissehnen

$$CF \cdot CG = CB \cdot CD,$$

und letzteres Produkt ist ersichtlich $= CH^2$, also

$$AF^2 = CH^2 + AC^2 = AH^2,\ AF = AH.$$

Weil aber AF eine Berührungslinie, AD eine Sekante des Kreises BFD ist, muss $AF^2 = AB \cdot AD$, d. h. auch $AH^2 = AB \cdot AD$ sein, und hieraus folgt, mit Rücksicht darauf dass AD auch Sekante des Kreises BHD ist, dass AH Berührungslinie an eben diesen Kreis

sein muss. Nach der Construction sind die BI und DE senkrecht zum Durchmesser BD des Kreises BHD, also Berührungslinien an diesen Kreis ebenso wie IHE. Folglich ist $BI = IH$, $DE = EH$. Wegen Dreiecksähnlichkeit ist

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BI}, \text{ d. h. } = \frac{EH}{IH}.$$

Ferner ist

$$\frac{EH}{IH} = \frac{DC}{BC}, \text{ also } \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC} \text{ oder } AB : AD = BC : CD,$$

worin eben die harmonische Theilung von $ABCD$ besteht. Der Satz selbst war ja nicht neu. Schon Apollonius hat ihn in seinen Kegelschnitten III, 37 ausgesprochen[1], aber der von uns berichtete Beweis gehört De la Hire an, und wenn Desargues gleichfalls des alten Satzes eingedenk war (Bd. II, S. 621), so ist dessen Fassung wesentlich undeutlicher und schwerer verständlich. De la Hire zog dann, und diese Erweiterung ist wieder sein volles Eigenthum, aus jenem Satze Folgerungen. Im XXVI. bis XXIX. Satze führt er den Beweis, dass die Berührungssehnen in einem Punkte sich schneiden, wenn die Ausgangspunkte der Paare von Berührenden auf einer Geraden liegen. Die Namen Pol und Polare hat De la Hire allerdings noch nicht eingeführt. Er umschrieb jene Begriffe noch in ähnlicher Weise, wie wir es hier ihm nachgethan haben. Erst im XIX. Jahrhunderte hat Servois das Wort Pol in der hier gemeinten Bedeutung eingeführt[2], und zwei Jahre später hat Gergonne das Wort Polare dem mathematischen Wortschatze einverleibt[3]). Das zweite Buch überträgt die Eigenschaften des Kreises, welcher Basis eines Kegels ist, auf den durch eine den Kegel durchsetzende Ebene hervorgebrachten Kegelschnitt. Insbesondere wird gezeigt, wie einem Punkte, einem Winkel, einer harmonischen Theilung in der Grundebene Aehnliches in der Schnittebene entspreche, und der VI. Satz, von De la Hire selbst als Stützpunkt des ganzen Werkes bezeichnet[4]), spricht aus, dass in jedem Kegelschnitte Durchmesser auftreten, welche je ein paralleles Sehnensystem halbiren. Die Uebertragung der Sätze vom Kreise auf irgend einen Kegelschnitt findet nun statt. Der XXI. Satz z. B. wiederholt den gleichbezifferten Satz des ersten Buches, von dem vorhin die Rede war, in der verallgemeinerten Auffassung. Das dritte Buch bringt eine Anzahl von Flächensätzen, das vierte die Asymptoten. Im fünften Buche folgen Sätze über die gleichseitige Hyperbel, über die gemeinschaftlichen Ordinaten von

[1]) Apollonius Pergaeus (ed. Heiberg) I, 402. [2]) Gergonne, *Annales des mathématiques* I, 337 (1810). [3]) Ebenda III, 297 (1812). [4]) *Lectorem geometram hic admonitum esse volo totum hoc opus conicum huic inniti propositioni.*

einander schneidenden Kegelschnitten, über die Fläche eines Parabelsegmentes. Den Hauptinhalt des sechsten Buches bilden die ähnlichen Kegelschnitte. Das siebente Buch ist der Normalenaufgabe gewidmet, welche in dem gleichen Sinne behandelt wird, wie bereits bei Apollonius; auch für De la Hire ist die Normale die kürzeste oder die längste Strecke, welche von einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kegelschnitt, in dessen Ebene der Punkt liegt, gezogen werden kann. Erst im achten Buche treten die Brennpunkte der Kegelschnitte auf. In demselben Buche finden sich die Sätze über den geometrischen Ort des Scheitels eines aus Berührungslinien an den Kegelschnitt gebildeten rechten Winkels, welcher für die Ellipse und die Hyperbel in einem Kreise, für die Parabel in einer Geraden besteht. Das neunte Buch lehrt die Construction von Kegelschnitten aus gegebenen Elementen.

Neben den drei Werken über Kegelschnitte hat De la Hire auch einige geometrische Abhandlungen veröffentlicht, welche in den Druckschriften der Pariser Akademie der Wissenschaften enthalten sind. Eine derselben[1]) erschien 1694 und beschäftigt sich mit der Epicycloide. De la Hire sagt in der Vorrede, er habe beim Schlosse Beaulieu, acht Stunden von Paris, ein Zahnrad mit epicycloidisch geformten Zähnen zum Ersatz eines ähnlichen herstellen lassen, welches von Desargues herstammte. Auf diese Aussage stützt sich die Annahme (Bd. II, S. 621), Desargues habe bereits erkannt, dass epicycloidische Zähne die geringste Reibung erzeugen und deshalb am zweckmässigsten seien. Dieser Annahme widersprach Leibniz aufs bestimmteste. In Briefen an Johann Bernoulli nimmt er vielmehr die Erfindung für den dänischen Astronomen Olof Roemer (1644—1710), den Entdecker der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, in Anspruch, der in den Jahren 1671 bis 1681 in Paris lebend dort bis 1676 in persönlichem Verkehre mit Leibniz und Huygens gestanden und beiden von seiner Erfindung Mittheilung gemacht habe. Leibniz weiss sich nicht genug zu verwundern, dass Roemer, der als Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften, wenn auch in Kopenhagen lebend, deren Veröffentlichungen jedenfalls zu sehen bekam, sein geistiges Eigenthum sich ruhig entwenden liess. Uns scheint grade die Thatsache von Roemers Schweigen bei De la Hires Veröffentlichung den Beweis zu liefern, dass von einer geistigen Eigenthumsanmassung keine Rede sein kann. Wir bezweifeln keineswegs, dass Roemer die Vorzüge epicycloidischer Zähne kannte, dass

[1]) *Mémoires de l'Académie royale des sciences depuis 1666 jusqu'à 1699.* T. IX. [2]) Leibniz III, 477, 811, 816.

er in voller Unabhängigkeit zu dieser Kenntniss gekommen war, aber in ihr war Desargues eben doch sein Vorgänger. Das erfuhr Roemer aus De la Hires Vorrede, und deshalb schwieg er. Aber sei dem wie da wolle, eigentlich curventheoretische Untersuchungen über die Epicycloide waren jedenfalls im Drucke nicht vorhanden, weder von Desargues noch von Roemer, und sie gehören mithin mit allem Rechte dem einzigen Veröffentlicher De la Hire an. In seiner Abhandlung hat dieser die Quadratur der Epicycloide ermittelt, die Berührungslinie an dieselbe gezogen und gezeigt, dass die Evolute der Epicycloide eine Curve von der gleichen Art sei. Die Methode ist eine rein geometrische, den Griechen nachgebildet. Für die Lösung der Tangentenaufgabe diente offenbar die bekannte Tangentenconstruction bei der Cycloide als Vorbild, und De la Hire wurde darauf wie auf den Begriff der Evolute durch Huygens hingeleitet, der, wie wir bald sehen wollen, 1673 darüber schrieb. Spätere Abhandlungen gehören eigentlich erst dem XVIII. Jahrh. an, sollen aber hier erwähnt werden, weil De la Hire uns künftig nicht abermals beschäftigen wird. Im Jahre 1706 kam De la Hire in einem *Traité des roulettes* abermals und in allgemeinerer Weise als 1694 auf die Epicycloiden zurück, und im Jahre 1708 veröffentlichte er *Des conchoïdes en général*, worin wieder nach rein geometrischen Methoden die Berührungslinien, die Inflexionspunkte, die Fläche, die Bogenlänge der Conchoiden zur Untersuchung kamen.

Wir sind mit diesen Abhandlungen De la Hires bereits von der Kegelschnittlehre auf das Gebiet allgemeiner Curvenuntersuchungen hinübergeschritten, ein Gebiet, welches gleichfalls nicht erst neuerdings in Angriff genommen wurde. Im 78. bis 81. Kapitel haben wir unter der gemeinsamen Ueberschrift der Infinitesimalbetrachtungen zusammengestellt, was in der ersten Hälfte des XVII. Jahrh. auf jenem Felde geerntet worden war. Wir haben dabei gesehen, dass die wichtigsten Fragen, die nach den Berührungslinien, nach der Quadratur, nach der Kubatur, nach der Rectification schon gestellt waren, dass es auch nicht an Beantwortungen gefehlt hat, und dass namentlich Fermat Methoden ersann, welche dem, was nun bald Differentialrechnung heissen soll, täuschend ähnelten, während die künftige Integralrechnung aus den Erfindungen von Kepler, von Cavalieri, von Pascal, von Wallis fertig zugehauene Quader zur Errichtung ihres Baues entnehmen durfte. Haben wir doch grade die Arbeiten von Wallis auch im 85. und 86. Kapitel dieses Abschnittes mehr als einmal als die Grundmauern einer neuen Reihenlehre kennen gelernt. Wohl war jetzt die Zeit gekommen, in der, wie die Schlussbetrachtungen des XV. Abschnittes es ankündigten,

die Grammatik der Sprache erfunden werden sollte, welche bisher nur empirisch in Gestalt einzelner Wortformen zur Kenntniss gekommen war, aber während die künftigen Lehrer noch zurückhielten, jeder derselben für sich im Geheimen sann und ersann, arbeitete und verarbeitete, waren andere Forscher nicht müssig die frühere Art der Untersuchung fortzusetzen, und über sie und ihre Leistungen muss berichtet werden.

Wir beginnen mit Isaac Barrow[1]). Ein von ihm in den Jahren 1664—1666 unter dem Titel *Mathematicae lectiones* verfasstes Werk war von geringer Wirkung. Aus ihm dürfte etwa hervorzuheben sein, dass Barrow, ähnlich wie vor ihm Roberval (Bd. II, S. 801) sich dagegen verwahrte, als ob Ungleichartiges mit einander in Vergleich gebracht werden könne. Linien seien nicht aus Punkten, sondern nur wieder aus kleineren Linien, Flächen nicht aus Linien, sondern aus kleineren Flächen zusammengesetzt u. s. w. Ungleich bedeutender waren die *Lectiones opticae et geometricae*, welche 1669 und 1670, dann in einer rasch nöthig gewordenen neuen Auflage 1674 erschienen, erstmalig[2]) also in dem Jahre, in welchem Barrow auf seine Professur in Cambridge zu Gunsten seines Schülers Newton verzichtete (S. 10). Schon in der Vorrede zu den optischen Vorlesungen, welche den Band eröffnen, erklärt Barrow, sein College Newton, ein Mann von ungemein auserlesenem Geiste und bemerkenswerther Erfahrung[3]), habe das Buch durchgesehen und manche Verbesserungen angerathen, manches auch aus dem Eigenen hinzugefügt. In der Vorrede zu den geometrischen Vorlesungen, welche mit neu beginnender Seitenzählung nachfolgen, hat Barrow dann abermals Newton zwar nicht gradezu genannt, aber doch hinlänglich deutlich bezeichnet, wenn er sagt, die letzte Vorlesung habe ihm ein Freund, sonst ein ehrenwerther Mann wie Einer, in derartigen Dingen aber ein unbilliger Forderer, abgequält[4]). Barrow selbst legte auf die geometrischen Vorlesungen nur geringes Gewicht, oder gab sich wenigstens den Anschein solcher niedrigen Schätzung derselben. Gebraucht er doch wieder in der Vorrede die Redewendung, diese Vorlesungen sollten den optischen nur als Begleiter und gewissermassen als Zugabe, *mantissa*, dienen, denn in anderem Falle würde er kaum daran gedacht haben, solchen Auskehricht, *quisquiliae*, an das Sonnen-

[1]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis (1855) S. 45—48. — H. Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis (1856) S. 16—21 und 73—77. — Rouse Ball, *A short account of the history of mathematics* (1888) S. 268—270. [2]) Uns lag der Druck von 1674 vor. [3]) *peregregiae vir indolis ac insignis peritiae.* [4]) *Ultimam amicus (vir sane cum primis probus, sed in hujusmodi negotiis flagitator improbus) extorsit.*

licht zu bringen. Wir glauben auf diesen Ausdruck hinweisen zu sollen, weil die Bedeutung, welche ein Schriftsteller dieser oder jener unter seinen Arbeiten beimisst, nicht selten ersehen lässt, ob und in wie weit er selbst erkannte, wie gross eigentlich der von ihm vollzogene Schritt war. Barrow ging von der Bewegung aus, welche ihrer Art und ihrer Grösse nach zu betrachten sei. Der Art nach ist sie fortschreitend, kreisförmig oder aus beiden gemischt. Zur Beurtheilung der Bewegungsgrösse, d. h. ob sie schneller ob langsamer als eine andere, bedarf man des Zwischenbegriffes der Zeit. Zeit aber ist das Verharren eines jeden Gegenstandes in seinem Sein[1]. Auf die Frage, ob der Begriff der Zeit nicht den der Bewegung einschliesse, antwortet Barrow, das thue er nicht mehr, als er den Begriff der Ruhe einschliesse. Die Grösse der Zeit hänge von keinem von beiden ab, sie sei eine Grösse für sich. Um aber ein Maass dieser Grösse zu erhalten, ist das Hilfsmittel der Bewegung zu benutzen[2]. Diejenigen Bewegungen, welche meistens als Zeitmaass dienen, sind die der Gestirne, aber nicht unmittelbar, sondern in uns nahe gerückter Weise, so dass unsere Sinne sie wahrnehmen, unsere Versuche sie zur Erscheinung bringen können[3]: Sonnenuhr und Sanduhr erläutern die Meinung dieses Ausspruchs. Die Zeit wird durch irgend ein Bild dargestellt werden können, welches die Gleichmässigkeit veranschaulicht, namentlich durch Gerade und Kreis. Ist doch die Zeit als einfach ausgedehnte Grösse[4] und durch den stetigen Fluss eines Augenblickes entstanden zu denken[5]. Schliesslich wählt Barrow nur die Gerade als Versinnlichung der Zeit und eine senkrecht zur Zeitlinie gezogene Gerade als Versinnlichung der in jedem Augenblicke vorhandenen Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeitsgeraden können, je nachdem die Geschwindigkeit als gleichbleibende oder als veränderliche gedacht ist, von derselben oder von verschiedener Länge sein. Die durch die Gesammtheit der Geschwindigkeitslinien gebildeten Flächenräume liefern ein Bild der in der gegebenen Zeit mit den gegebenen Geschwindigkeiten vollzogenen Bewegungen, der vereinigten Geschwindigkeit[6], der bewegenden Kraft[7]

---

[1] Barrow, *Lectiones geometricae* pag. 2: *Tempus est perseverantia rei cujusque in suo esse.* [2] Ebenda pag. 3: *Ita per se tempus quantum est, etsi quo temporis quantitas a nobis dignoscatur, advocandum sit motus subsidium.* [3] Ebenda pag. 5: *coelestia corpora non esse primarias et originales temporis mensuras, ast illos potius motus, qui prope nos sensibus observantur, et experimentis subjacent nostris.* [4] Ebenda pag. 6: *unica dimensione praeditum quantum.* [5] Ebenda pag. 6: *ex unius momenti quasi continuo fluxu constitutum imaginamur.* [6] Ebenda pag. 10: *aggregata velocitas.* [7] Ebenda pag. 13: *vis motiva.*

(Figur 15). Das Rechteck $AEZZ$, das Dreieck AEY erläutern die Meinung. Es erscheint nicht unangemessen, auf das wiederholte Vorkommen der unterschiedlosen Buchstaben Z und Y hinzuweisen und dabei an die Leibnizischen Stellenzeiger zur Unterscheidung gleicher Buchstaben zu erinnern. Unterschiedlose Buchstaben zu gebrauchen lag in der Gewohnheit der Zeit, und auch Pascal bediente sich ihrer wiederholt[1]). Barrow hat durch die Erörterung der Bewegung den Ort der Punkte Z, Y u. s. w. entstehen sehen. Er ist bei den Curven angelangt, denen er in der zweiten Vorlesung sich zuwendet.

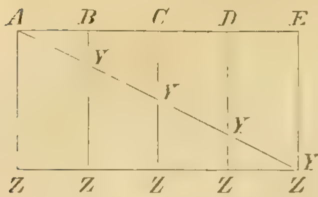


Fig. 15.

Sie entstehen als Endprodukte einer Erzeugenden, Genetrix, welche längs einer Leitlinie, Directrix, verschoben wird[2]). Bei der Berechnung der entstehenden Flächenräume ist nach der Methode der Indivisibilien zu verfahren, welche unter allen Methoden die freieste von Schwierigkeiten ist, und nicht minder gewiss und untrüglich, wenn sie nur richtig angewandt wird[3]).

In der dritten Vorlesung entsteht eine Curve auch durch zusammengesetzte und zusammentreffende Bewegungen[4]), wenn z. B. die eine Gerade AB in gleichförmiger Bewegung eine Parallelverschiebung erfährt, während zugleich die zu AB senkrechte AC in einer zweiten ebenfalls gleichförmigen Parallelverschiebung sich befindet, so dass die aufeinander folgenden Lagen beider Geraden in Punkten M der Curve sich schneiden. Die Zusammensetzung kann aber auch verwickelterer Natur sein. Es kann eine fortschreitende mit einer drehenden Bewegung, es können weit mehr als zwei Bewegungen mit einander zusammentreffen.

In der vierten Vorlesung kommt Barrow zur Tangentenaufgabe als Anwendung des Gedankens, die Zusammensetzung von Bewegungen zur Erörterung der Eigenschaften der Curven zu gebrauchen[5]). Die Bewegung der einen Geraden, welche etwa von

[1]) Pascal, Oeuvres III, 373 in dem Briefe von Dettonville an Carcavi und an vielen anderen Orten. [2]) Barrow, *Lectiones geometricae* pag. 14: *Notatur autem abhinc brevitatis ergo tam in his, quam in similibus casibus harum linearum illam quae motu suo magnitudinem describit, a me Genetricem dici; alteram autem, juxta quam, vel cui insistens prior defertur, Directricem appellari.* [3]) Ebenda pag. 21: *juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, et modo rite adhibeatur haud minus certam et infallibilem.* [4]) Ebenda pag. 24: *Ad compositos nunc et concurrentes, eidem proposito servientes, motus accingimur.* [5]) Ebenda pag. 29: *Propositum est nobis e compositione motuum emergentes linearum affectiones indagare ac exponere.*

links nach rechts gedacht wird, nennt Barrow Seitenbewegung[1]), die Bewegung nach abwärts auf der seitlich verschobenen Geraden heisst Abwärtsbewegung[2]). Bei anderer Lage der Figur kann die Wahl dieser Namen allerdings wenig zweckmässig erscheinen. Beispielsweise sei[3]) (Figur 16) die Gerade TMS Berührungslinie an die Curve OMO in M, so verhält sich in diesem Punkte M die Abwärtsbewegung zur Seitenbewegung wie TP zu PM, und diese Benennungen stimmen nur dann, wenn man die ganze Figur um einen rechten Winkel gedreht denkt, so dass X der höchste Punkt, Y der am weitesten rechts befindliche wird. Jenes Verhältniss muss nämlich stattfinden, damit ein Punkt längs der Geraden TM sich bewege, und weil in M Curve und Berührungslinie übereinstimmen, so muss dort auch für die Curve das gleiche Verhältniss der beiden Bewegungen stattfinden. Naturgemäss lässt alsdann der Satz sich auch umkehren: Stellen TP und PM die Abwärts- und die Seitenbewegung des Curvenpunktes M dar, so muss TM Berührungslinie sein. Es ist kaum nothwendig hervorzuheben, dass Barrow hier der Hauptsache nach Robervals Gedankengang (Bd. II, S. 805) einschlägt, und wenn wir weiter daran erinnern (Bd. II, S. 828), dass Wallis schon 1659 Torricelli gegen Roberval in Schutz nahm, dass also damals Robervals Tangentenmethode in England sehr wohl bekannt war, so ist an eine Anlehnung Barrows an diesen Vorgänger nicht zu zweifeln.

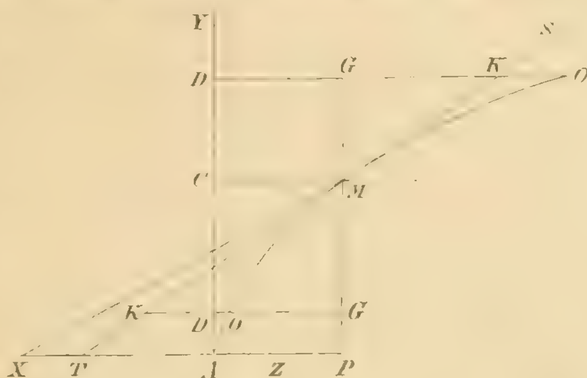


Fig. 16.

Wir überspringen die folgenden Vorlesungen bis ans Ende der zehnten Vorlesung, wo Barrow dem Rathe eines Freundes, offenbar wieder Newtons, folgend die Methode der durch Rechnung zu beschaffenden Berührungslinien mittheilt[4]), deren er sich zu bedienen pflege. Es sei (Figur 17) MT Berührungslinie an die Curve ANM in M und MN ein Curvenstück von unbegrenzter Kleinheit[5]).

[1]) *motus transversus.* [2]) *descensus* oder auch *motus descendens.* [3]) Barrow, *Lectiones geometricae* pag. 32—33. Die Buchstaben an der Figur sind genau dieselben wie bei Barrow. [4]) Ebenda pag. 80—81. [5]) *indefinite parvum.*

MP und NQ sind senkrecht zu AP, während $NR \parallel AP$. Barrow benennt die einzelnen auftretenden Strecken durch einfache Buchstaben $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$, $NR = e$. Die Stücke MR, NR werden durch eine Gleichung mit einander in Verbindung gesetzt, wobei folgende Regeln festgehalten werden: 1. Beim Rechnen wirft man alle Glieder fort, welche höhere Potenzen von a und e oder Producte dieser Grössen in einander enthalten. 2. Ist die Gleichung hergestellt, so wirft man die Glieder weg, welche a und e nicht enthalten, weil jene Glieder, als Gleichungspolynom gedacht, immer Null sind. 3. Nun ersetzt man a durch m und e durch t, so wird PT bekannt. Als Begründung fügt Barrow hinzu: Wenn in die Rechnung ein unendlich kleines Stück einer Curve eingeht, so wird statt dessen ein richtig gewähltes Stück der Berührungslinie oder irgend eine wegen der unendlichen Kleinheit des Curvenstückes gleichwerthige gerade Strecke genommen[1]. Auch hier ist eine Erinnerung wohl angebracht, welche ins Gedächtniss zurückruft, dass Fermat (Bd. II, S. 788) ein für allemal gewisser Buchstaben zur Bezeichnung bestimmter geometrisch erklärter Punkte und Strecken sich zu bedienen pflegte, und dass sein E genau die gleiche Bedeutung hatte wie Barrows e. Alle anderen Buchstaben weichen allerdings wesentlich ab, und die Subtangente insbesondere, Barrows t, heisst bei Fermat A. Dagegen ist darin wieder volle Uebereinstimmung, dass grade die Subtangente gesucht wird, um mittels ihrer den Fusspunkt der Berührungslinie kennen zu lernen. Es ist allerdings anzuerkennen, dass der Druck von Fermats *Opera varia* erst 1679 stattfand, also bedeutend später als der von Barrows geometrischen Vorlesungen, aber seine Tangentenbestimmung war seit 1642 und 1644 durch Hérigone (Bd. II, S. 785) bekannt gegeben. Das erste Beispiel, welches Barrow durchführt, ist (Figur 18) das einer Curve $ANMO$, deren Sehne AM (beziehungsweise AN) in ihrer Verlängerung auf der Geraden

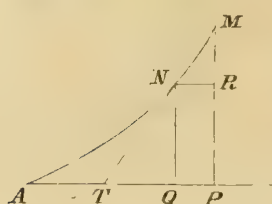


Fig. 17.

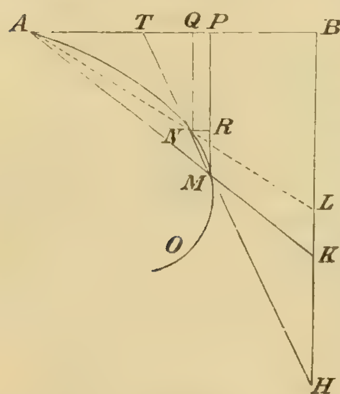


Fig. 18

[1] *Quod si calculum ingrediatur curvae cujuspiam indefinita particula, substituatur ejus loco tangentis particula rite sumpta; vel ei quaevis (ob indefinitam curvae parvitatem) aequipollens recta.*

BH ein ihr gleiches Stück BK (beziehungsweise BL) abschneidet, wobei der Winkel ABH als ein rechter vorausgesetzt ist. Ausser den uns schon bekannten Bezeichnungen

$$MR = a, \quad NR = QP = e, \quad MP = m, \quad PT = t$$

sei noch $AB = r$, $AP = q$. Nun ist

$$AQ = q - e, \quad QN = m - a,$$

also

$$(q - e)^2 + (m - a)^2 = AN^2 = BL^2.$$

Ferner ist

$$AQ : QN = AB : BL,$$

also

$$BL = \frac{r(m - a)}{q - e} \text{ und } BL^2 = \frac{r^2(m - a)^2}{(q - e)^2}.$$

Die beiden Werthe von BL^2 sind einander gleichzusetzen:

$$(q - e)^2 + (m - a)^2 = \frac{r^2(m - a)^2}{(q - e)^2}.$$

Folglich ist

$$(q - e)^4 = (r^2 - (q - e)^2)(m - a)^2.$$

Entwickelt man unter Weglassung aller Glieder von höherer als erster Dimension in a und e, so entsteht

$$q^4 - 4q^3e = r^2m^2 - q^2m^2 + 2qem^2 - 2amr^2 + 2amq^2.$$

Weiter soll $q^4 = r^2m^2 - q^2m^2$ in Wegfall kommen. Eine Begründung dafür gibt Barrow nicht, aber es hat seine Richtigkeit. Wegen $AB : BK = AP : PM$ ist

$$(AB \cdot PM)^2 = (AP \cdot BK)^2 = (AP \cdot AM)^2 = AP^2(AP^2 + PM^2)$$
$$\text{d. h. } r^2m^2 = q^2(q^2 + m^2) \text{ und } q^4 = r^2m^2 - q^2m^2.$$

Nach Weglassung dieser Glieder bleibt noch

$$-4q^3e = 2qem^2 - 2amr^2 + 2amq^2.$$

Jetzt wird a durch m, e durch t ersetzt, und man erhält

$$t = \frac{r^2m^2 - q^2m^2}{2q^3 + qm^2}.$$

Bei Barrow ist in Folge eines Irrthums an die Stelle des Pluszeichens im Nenner des Ausdruckes für t ein Minuszeichen getreten. Barrow behandelt noch vier weitere Beispiele, deren zweites das Cartesische Blatt (*folium Cartesii* Bd. II, S. 781), das dritte die Quadratrix ist. Jene Descartes'sche Curve, deren Gleichung in der heute üblichen Schreibweise $x^3 + y^3 = axy$ lautet, heisst bei Barrow in einer Randnote *La Galande*, im Texte kommt ein Name nicht vor. Jene Randnote ist ein neuer Beleg dafür, dass Barrow mit französischen geometrischen Untersuchungen bekannt war.

Was Wallis 1672 als seine Tangentenmethode veröffentlichte[1]), verleugnet ebensowenig seine Abhängigkeit von schon bekannten Methoden. Die Subtangente wird gesucht, und als Mittel zum Zweck dient eine in der Nähe des Berührungspunktes gezogene Ordinate bis zum Durchschnitte mit der Curve, beziehungsweise mit der Berührungslinie. Unterscheidend ist, dass Wallis das unendlichkleine Abscissenstückchen zwischen der Ordinate des Berührungspunktes und der ihr benachbarten Ordinate nicht E oder e, sondern a nennt, und dass er, was allerdings ein bedeutsamerer Unterschied ist, nicht eine, sondern zwei der Berührungsordinate benachbarte Ordinaten in Rechnung zieht, beide um a von derselben abstehend, aber die eine einem früheren, die andere einem späteren Curvenpunkte angehörend, so dass die Berührungsordinate zwischen beiden liegt. Wallis Darstellung gewinnt dadurch unleugbar an Klarheit.

In demselben Bande der Veröffentlichungen der Londoner Königlichen Gesellschaft[2]) ist die Tangentenmethode von De Sluse nach einem Briefe desselben vom 17. Januar 1673 zum Drucke befördert, über welche wir (Bd. II, S. 839—840) berichten durften, weil sie ihrer Erfindung nach wohl schon dem Jahre 1652 angehört, wenn sie auch erst mehr als zwanzig Jahre später der lesenden Welt zur Verfügung gestellt wurde. De Sluse versprach in seinem Briefe einen Beweis seiner Methode. An dieses Versprechen gemahnt, liess er am 3. Mai 1673 einen zweiten Brief nachfolgen[3]). Statt eines Beweises gab er indessen nur drei Sätze an, auf welche seine Methode sich gründe. Erstens sei die Differenz gleich hoher Potenzen mit positiv ganzzahligen Exponenten zweier Zahlen durch die Differenz der zwei Zahlen selbst theilbar. Zweitens bestehe die Entwicklung einer Potenz von abermals positiv ganzzahligen Exponenten eines Binomiums aus einem Gliede mehr als der Exponent Einheiten zähle. Drittens stehen die Quotienten derselben Zahl getheilt durch zwei andere in dem umgekehrten Verhältnisse jener Divisoren. Die Sätze seien in der angegebenen Reihenfolge zu benutzen, und aus dieser Angabe werde der Leser ohne grossen Zeitaufwand den Beweis herzustellen wissen.

Abermals auf früher (Bd. II, S. 827—828) Mitgetheiltes zurückgreifend führen wir an, dass Wallis, Brouncker und Wren[4]) im October 1673 die Erstlingsrechte von Neil und Wren auf die Ermittelung von Rectificationen aufrecht hielten. Veranlassung dazu gab die durch Huygens 1673 herausgegebene Schrift *Horologium*

[1]) P. T. VII, 4010—4016 (Nr. 81). [2]) Ebenda VII, 4243—4247 (Nr. 90). [3]) Ebenda VIII, 6059 (Nr. 95). [4]) Ebenda VIII, 6146—6150 (Nr. 98).

oscillatorium, in welcher die Rectification der semicubischen Parabel für Van Heuraet in Anspruch genommen war[1]).

Wir müssen auf das hochbedeutende Werk von Huygens, von welchem eine erste Niederschrift schon am 5. Februar 1665 vollendet war[2]), näher eingehen. Durch eine vom 25. März 1673 datirte Widmung an König Ludwig XIV. von Frankreich eingeleitet, zerfällt das Werk[3]) in fünf Theile: 1. die Beschreibung der Pendeluhr, 2. der Fall schwerer Körper und ihre Bewegung längs der Cycloide, 3. die Lehre von der Evolution, 4. der Schwingungsmittelpunkt, 5. die Fliehkraft.

Der erste Theil bietet für unsere Zwecke nichts zur Mittheilung. Im zweiten Theile sind zunächst die Fallgesetze zu beweisen. Den Ausgangspunkt des Beweises bildet die dritte Hypothese[4]), dass, sofern auf einen Körper sein den Fall verursachendes Gewicht und irgend eine andere Kraft gleichzeitig einwirken, jede Wirkung für sich zu betrachten sei, eine Hypothese, welche später die noch allgemeinere Form erhalten sollte, dass von zusammen wirkenden Kräften jede für sich und unabhängig von den anderen in Rechnung kommen müsse. Der Fall der Körper wird theils in freier Luft, also senkrecht, theils längs einer Curve untersucht, und da Huygens auf den Fall längs eines Cycloidenbogens hinsteuert, so spricht er in mehreren Sätzen von dieser Curve. Im XV. Satze[5]) wird die Berührungsaufgabe für die Cycloide behandelt und erweitert. Denkt man sich irgend eine Figur in Rollbewegung längs einer Geraden, so dass ein Punkt A der erzeugenden d. h. rollenden Figur bei dieser Bewegung in seinem eine Curve bildenden Laufe beobachtet werden kann, ist ferner C der tiefste Punkt der Figur, in welchem sie auf der Geraden, über die sie rollt, jedesmal aufsteht, so ist in jeder einzelnen Lage CA normal zur Rollcurve. Das ist jener Satz, an welchen wir (S. 125) dachten, wo wir von den Anregungen redeten, welche De la Hire von Huygens erhalten haben mochte. Der Fall längs der Hohlseite einer Cycloide, welche durch einen unterhalb einer wagrechten Geraden rollenden Kreis erzeugt ist, deren Scheitelpunkt mithin der tiefste Punkt der ganzen Zeichnung ist, wird untersucht, und im XXV. Satze[6]) kommt Huygens zu dem Ergebnisse, dass ein Körper, von welchem Punkte des absteigenden Cycloidenarmes aus er in fallende Bewegung

[1]) Huygens, *Opera varia* (Leiden, 1724) pag. 100—101. [2]) Huygens' Gesammtausgabe V, 223 (Haag, 1893). [3]) Huygens, *Opera varia* pag. 33—248, die Widmung schon pag. 17—20. — Ein sehr ausführlicher Auszug, in welchem namentlich die der Mechanik angehörenden Sätze genau mitgetheilt sind, bei Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* V, 27—67. [4]) Huygens, *Opera varia* pag. 51. [5]) Ebenda pag. 69—70. [6]) Ebenda pag. 87.

gerathe, genau in derselben Zeit beim Tiefpunkte anlange. Das ist die merkwürdige Eigenschaft, welche man später den Tautochronismus der Cycloide genannt hat.

Wir bemerken beiläufig, dass dieser eine Satz schon vor dem Erscheinen des Horologium oscillatorium in die Oeffentlichkeit gedrungen sein muss. Ignace Gaston Pardies[1]) (1633–1673) aus Pau, der am Jesuitencollegium seiner Vaterstadt alte Sprachen, Mathematik und Physik lehrte und kurz vor seinem Tode als Professor der Rethorik an das Collège Louis le Grand in Paris kam, kannte ihn wenigstens. Sein Todestag war der 22. April 1673. Unmittelbar vorher gab er in französischer Sprache *La statique ou la science des forces mouvantes* heraus, und bewies darin jenen Satz, welchen er den Isochronismus der Cycloide nannte. Das Horologium war aber damals noch nicht im Buchhandel. Pardies sagt vielmehr ausdrücklich in seiner Vorrede, er sehe mit Begierde dem Erscheinen der Schrift von Huygens entgegen, um sich zu überzeugen, ob sein Beweis mit dem des Erfinders übereinstimme[2]). Lord Brouncker hat dann gleichfalls bei Gelegenheit des Herauskommens der Statique einen Beweis veröffentlicht[3]). Brounckers Ausdrucksweise ist etwas zu unbestimmt, als dass man aus ihr entnehmen könnte, ob er damals den Satz kennen lernte und zu ihm einen Beweis ermittelte, oder ob er auf eine frühere Erfindung des Satzes Anspruch zu erheben wünschte, aber grade wegen der Unbestimmtheit ist ersteres das Wahrscheinlichere.

Wir kehren zu dem Horologium oscillatorium zurück, und zwar zu dessen drittem Theile. Ist, sagt Huygens in der III. Definition dieses Theiles[4]), um eine nach einer Seite hin hohle Linie ein biegsamer Faden gewickelt, und blieb das eine Ende des Fadens mit der Curve in Verbindung, während das andere unter fortwährender Spannung des abgelösten Stückes weiter geführt wird, so beschreibt dieses Fadenende eine zweite Curve, welche die durch Abwickelung beschriebene, *Descripta ex evolutione*, heissen soll. Das ist diejenige Curve, welche heute den Namen der Evolvente führt. Die erste Curve dagegen nennt Huygens in der IV. Definition[5]) die Abgewickelte, Evoluta, und dieser Name ist ihr geblieben. Der I. Satz[6]) behauptet, dass jede Berührungslinie der Evolute auf der Evolvente senkrecht stehe. Wenn (Figur 19) die Gerade FDC

[1]) Poggendorff II, 358. [2]) Vergl. den Bericht über die Statique von Pardies in den P. T. VIII, 6043 (Nr. 94). [3]) P. T. VIII, 6032 (Nr. 94): *nunc juris publici facta ex occasione quam suppeditavit Rev. P. Pardies.* [4]) Huygens, *Opera varia* pag. 89: *lineae in unam partem cavae.* [5]) Ebenda pag. 90. [6]) Ebenda pag. 90—91.

in D die Evolute berührt, wenn alsdann in dem der Evolvente angehörenden Punkte C die CE senkrecht zu DC gezogen wird, so treffe, heisst es, diese CE die Evolvente in keinem anderen Punkte als in C, berühre sie folglich eben dort. Bei Fortsetzung der Abwicklung, bis der Faden die Evolute in G berührt, trifft der die Evolvente beschreibende Endpunkt in H ein, und GH schneidet die CE in E. In dem bei C rechtwinkligen Dreiecke CEF ist $EF > CF$. Ferner ist Bogen $AD = CD$, Bogen $AG = GH$ und zugleich Bogen AG = Bogen AD + Bogen $DG = CD$ + Bogen DG. Aber $DF + FG >$ Bogen DG, also $CD + DF + FG > GH$ oder $CF + FG > GH$. Daraus folgt weiter $CF > GH - FG$ oder $CF > FH$. Nun war $EF > CF$, und umsomehr ist $EF > FH$, d. h. E liegt jenseits der Evolvente. An einer zweiten Figur wird durch ganz ähnliche Schlüsse nachgewiesen, dass auch, wenn der Punkt H der Evolvente zwischen A und C liegt, G folglich auf der Evolute zwischen A und D sich befindet, $GH < GE$ sein muss, also auch dieser Punkt E jenseits der Evolvente liegt, und damit ist der an die Spitze gestellte Satz bewiesen, ist zugleich bewiesen, dass die Curve $AHCH$ fortwährend gleichartig gekrümmt ist[1]). Der V. Satz[2]) beweist, dass, wenn zwei Cycloiden von gleichen Erzeugungskreisen so über einander gezeichnet sind, dass die Grundlinien parallel sind und der Anfang der oberen Cycloide mit dem Scheitelpunkte der unteren zusammenfällt, alsdann die Berührungslinien der unteren Cycloide auf der oberen senkrecht stehen. Im VI. Satze wird weiter gezeigt, dass der unteren Cycloide als Evolute die obere als Evolvente entspricht, und der VII. Satz zieht die Folgerung, die halbe Länge der unteren Cycloide müsse dem doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises gleich sein. Nach der Cycloide wendet Huygens sich der gewöhnlichen Parabel zu, als deren Evolute eine semicubische Parabel auftritt, welche folglich gleich jeder Evolute als rectificirbar sich erweist. Diese Auseinandersetzung ist es, bei welcher, wie (S. 133) erwähnt wurde, Huygens für

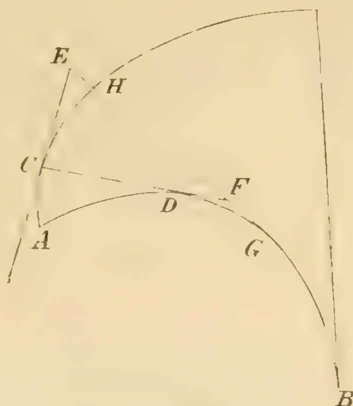


Fig. 19.

---

[1]) *in partem unam inflexam esse.* [2]) Ebenda pag. 95—97 die Sätze V, VI, VII. Dann folgt pag. 98: Geschichtliches über die Entdeckung der einzelnen Eigenschaften der Cycloide, deren Rectification zuerst von Wren vollzogen worden sei.

die Erfinderrechte Van Heuraets auf die Rectification der semicubischen Parabel den durch Wallis vertretenen Ansprüchen Neils gegenüber mit mehr Geschick als Recht eine Lanze bricht. Huygens schaltet nunmehr einige unbewiesene Constructionen ein, welche den Flächeninhalt einer Oberfläche zweiten Grades als Kreis darstellen, zeigt den Zusammenhang der Rectification der gewöhnlichen Parabel mit der Quadratur der Hyperbel, bespricht die Evoluten der Ellipse und der Hyperbel und gelangt so zu dem ganz allgemeinen XI. Satze[1]), dass zu jeder Curve die Evolute gefunden werden könne, welche letztere nothwendig rectificirbar sei. Der Grundgedanke bei der Auffindung der der Curve ABF (Figur 20) entsprechenden Curve DE ist folgender. Die Berührungslinien an DE stehen senkrecht auf BF, also müssen die Senkrechten auf ABF die DE treffen. Weil sie senkrecht zu einer als einförmig gewölbt vorausgesetzten Curve nach ihrer Hohlseite hin sind, müssen sie auch einander selbst schneiden, und so seien beispielsweise BD, FE zwei Senkrechte zu ABF, welche in D und E die Evolute treffen und in G einander schneiden. Je näher F bei B liegt, um so näher liegen die Punkte D, G, E bei einander. Ist der Zwischenraum BF unendlich klein[2]), so fallen die drei genannten Punkte zusammen, und überdies wird alsdann BH, welche die Curve ABF in B berührt, auch als deren Berührende in F angesehen werden können[3]). Damit ist genau das Gleiche ausgesprochen, was heutige Mathematiker in die Worte zu kleiden pflegen, die Evolute sei der Ort der Durchschnittspunkte consecutiver Normalen an die Evolvente. Nun handelt es sich um die

Fig. 20.

---

[1]) Huygens, *Opera varia* pag. 108—109 und dann wieder 111—112.
[2]) *si interstitium BF infinite parvum intelligatur.* [3]) *BH, quae curvam in B tangat, eadem quoque pro tangente in F censebitur.*

thatsächliche Auffindung von G. Zieht man die BX, YX, die in K einander senkrecht durchschneiden, und ihnen parallel die an der Figur erkennbaren Geraden, wobei $KT = KM$, $LV = LN$ abgemessen wird, so ist

$$BG : MG = BG : (BG - BM) = BO : MN = \frac{BO}{BP} : \frac{MN}{BP} = \frac{HN}{HL} : \frac{MN}{KL}.$$

Nun ist die Länge von BM, HN, HL aus der Figur ersichtlich, und überdies werden diese Strecken für jede Curve berechenbar sein. Findet letzteres auch noch für $\frac{MN}{KL}$ statt, so ist demnach BG in der Proportion

$$BG : (BG - BM) = \frac{HN}{HL} : \frac{MN}{KL}$$

als gegeben zu betrachten. Aber

$$\begin{aligned} MN - KL &= (LM + MN) - (KL + LM) \\ &= LN - KM = LV - KT = TX. \end{aligned}$$

Also $MN = TX + KL = TX + XV$ und

$$\frac{MN}{KL} = \frac{TX + XV}{XV} = 1 + \frac{TX}{XV}$$

d. h. man kennt $\frac{MN}{KL}$ sofern man $\frac{TX}{XV}$, die trigonometrische Tangente des Winkels TYK, kennt. Die YV, welche diesen nunmehr in Betracht kommenden Winkel mit der gegebenen YK bildet, ist die Verbindungsgerade der Punkte T, V, d. h. Berührungslinie an die Curve der Punkte T, V, welche so definirt werden kann, dass in ihr jedes $KT = KM$ oder die Ordinate jedes Curvenpunktes T der Subnormale desjenigen Punktes B der gegebenen Curve ABF gleich ist, der mit T auf gleicher Ordinatenlinie liegt. Würde man die Zeichen der heutigen Mathematik in Anwendung bringen und die Gleichung der ABF als $F(x, y) = 0$ schreiben, so wäre $KM = yy'$. Ebenso gross wäre also KT und daher

$$\operatorname{tang} TYK = \frac{d(yy')}{dx} = y'^2 + yy'' = \frac{TX}{XV}.$$

Somit ist $\frac{MN}{KL} = 1 + y'^2 + yy''$. Andrerseits ist der oben als berechenbar bezeichnete Bruch

$$\frac{HN}{HL} = 1 + \frac{LN}{HL} = 1 + \frac{yy'}{y : y'} = 1 + y'^2.$$

Die Proportion, zu welcher wir oben gelangt waren, hat daher die Gestalt

$$BG : (BG - BM) = (1 + y'^2) : (1 + y'^2 + yy'').$$

Ihr entnimmt man $\frac{BG}{BM} = -\frac{1 + y'^2}{yy''}$, $BG^2 = \frac{BM^2(1 + y'^2)^2}{y^2 y''^2}$. BM ist

die Normale der Curve ABF, also

$$BM^2 = y^2(1 + y'^2) \text{ und } BG^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}$$

in Uebereinstimmung mit bekannten Ergebnissen. Es bedarf sicherlich nicht der Bemerkung, dass Huygens nicht im Stande war, die hier zuletzt geführte allgemeine Rechnung vorzunehmen. Wir wollten unseren Lesern nur die Controle über den Gedankengang von Huygens ermöglichen und führten sie deshalb ziemlich weit über ihn hinaus. Huygens musste seine allgemeinen Betrachtungen, welche für jede Curve galten, mit $\frac{MN}{KL} = 1 + \text{tang } TYK$ beschliessen. Von diesem Punkte an war er genöthigt, für jede besondere Curve die Berechnung von BG in besonderer Weise vorzunehmen, und das hat er auch gethan.

Der vierte Theil des Horologium oscillatorium hat es mit dem Oscillationsmittelpunkte zu thun, d. h. mit der Auffindung desjenigen einfachen, aus einem an einem nicht biegsamen gewichtlosen Faden hängenden Gewichte bestehenden Pendels[1]), dessen Schwingungsdauer mit der eines gegebenen Körpers, der als Pendel benutzt wird, übereinstimmt. Die Aufgabe war 1646 von Pater Mersenne gestellt worden[2]), und Descartes und Roberval versuchten sich an ihrer Auflösung, welche beiden misslang, was sie aber nicht verhinderte darüber in Streit zu gerathen. Huygens erkannte die ganze Wichtigkeit der Frage, erkannte auch bereits 1664, dass das einfache Pendel sich dazu eigne, eine Längeneinheit zu bilden, deren erfahrungsmässiges Element in der Schwingungsdauer liege[3]), und Robert Hooke stellte Versuche zur Ermittelung der Länge eines Pendels an, das der Einfachheit so nahe als möglich kam[4]). Im Horologium oscillatorium gab nun Huygens die wirkliche Lehre vom Oscillationsmittelpunkte, naturgemäss auf Grund gewisser Voraussetzungen, ohne welche keine physikalische Frage in Angriff genommen werden kann. Huygens' Grundannahme[5]) besteht darin, dass, wenn irgend welche Gewichte in Folge ihrer Schwere[6]) sich zu bewegen anfangen, ihr gemeinsamer Schwerpunkt nicht höher steigen könne als bis dahin, wo er am Beginne der Bewegung sich befand. Dieser Ausspruch, setzt er hinzu, besage nichts weiter als was niemals in Abrede gestellt worden ist, dass schwere Körper nicht von selbst in die Höhe streben[7]). Als

---

[1]) *pendulum simplex, hoc est pondus filo inflexili gravitatis experto appensum.* [2]) Heller, Geschichte der Physik II, 74. [3]) Huygens' Gesammtausgabe V, 149: Brief vom 21. November 1664. [4]) Ebenda V, 170: Brief vom 23. December 1664. [5]) Huygens, *Opera varia* pag. 121. [6]) *vi gravitatis suae.* [7]) *gravia sursum non ferri.*

zweite Annahme dient ihm, dass im widerstandslosen Raume der Schwerpunkt eines bewegten Pendels beim Abwärts- und Aufwärtsschwingen gleiche Kreisbogen beschreibe. Es würde uns von unserem Gegenstande, der geschichtlichen Entwickelung der Curvenlehre, viel zu weit abführen, wollten wir berichten, wie Huygens auf die erwähnten Annahmen die ganze Lehre vom Oscillations- oder Schwingungsmittelpunkte aufbaut, bis er zuletzt im XX. Satze[1]) zur Vertauschbarkeit des Aufhängepunktes und des Schwingungsmittelpunktes gelangt und daran die Aufsuchung des Schwingungsmittelpunktes bestimmter ihrer Figur nach gegebener Pendel knüpft, wobei theils ebene Figuren, theils wirkliche Körper als Pendel dienen. In einem kurzen fünften Theile sind noch beweislos Sätze über die Fliehkraft[2]) beigefügt.

Haben wir in dem Werke von 1673 Huygens als fruchtbaren geometrischen Erfinder kennen gelernt, so zeigen zwei Abhandlungen von 1693, wie er im Stande war in Fermats Gedanken einzudringen und sie klarer darzustellen, als jener selbst vermochte. Es sind Darlegungen von Fermats Methoden Maximal- und Minimalwerthe zu finden[3]) und das Tangentenproblem aufzulösen[4]). Sei etwa (Figur 21) die Gerade DE, seien ausserdem die Punkte A und B gegeben, und man suche auf der DE einen Punkt C von der Beschaffenheit, dass $AC^2 + BC^2$ zu einem Minimum werde. Huygens nimmt als selbstverständlich an, es gebe einen solchen Punkt C, und es gebe zu beiden Seiten von C stets Punkte F, G, welche $AF^2 + BF^2 = AG^2 + BG^2 > AC^2 + BC^2$ werden lassen. Als gegeben gilt $AE = a$, $BD = b$, $ED = c$. GF wird durch e und EG durch x bezeichnet. Nun ist

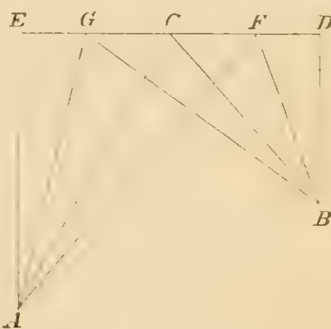


Fig. 12.

$$AG^2 = AE^2 + EG^2 = a^2 + x^2,$$
$$AF^2 = AE^2 + (EG + GF)^2 = a^2 + (x + e)^2,$$
$$BG^2 = BD^2 + (ED - EG)^2 = b^2 + (c - x)^2,$$
$$BF^2 = BD^2 + (ED - EG - GF)^2 = b^2 + (c - x - e)^2.$$

Die vorausgesetzte Eigenschaft der Punkte F, G, welche

$$AF^2 + BF^2 = AG^2 + BG^2$$

[1]) Huygens, *Opera varia* pag. 154. [2]) *De vi centrifuga ex motu circulari.* [3]) Huygens, *Opera varia* pag. 490—498. [4]) Ebenda pag. 498—506.

lautete, heisst daher jetzt

$$a^2 + x^2 + b^2 + (c - x)^2 = a^2 + (x + e)^2 + b^2 + (c - x - e)^2$$

oder $a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2 - 2ce + 4xe + 2e^2,$$

und kennt man c, so ist x durch diese Gleichung gegeben. Nimmt man jenes e als unendlich klein an, so fallen die drei Punkte G, C, F in C zusammen, und x ist die Entfernung des gesuchten Punktes C von E. Werden in der gefundenen Gleichung zunächst die Brüche weggeschafft, deren in dem vorliegenden Beispiele keine vorhanden sind[1]), so streichen sich dann auf beiden Seiten die gleichen Glieder weg, und das werden nothwendigerweise alle die sein, in welchen e nicht vorkommt, wie leicht ersichtlich, da der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen aus dem links von demselben befindlichen so entstand, dass x durch $x + e$ ersetzt wurde. Die übrig bleibenden Glieder der Gleichung besitzen also e als gemeinsamen Faktor, durch welchen dividirt werden kann. Dann erscheint eine neue Gleichung, deren Glieder theils von e frei sind, theils e noch als Faktor besitzen. Letztere fallen weg, weil e als unendlich klein betrachtet wird, und nun ermittelt man x. Aus dieser Theorie lässt aber eine praktische Regel sich herleiten, welche in den Fällen zur Anwendung zu kommen hat, in welchen der Ausdruck, der ein Maximum oder ein Minimum werden soll, keinen die Unbekannte im Nenner enthaltenden Bruch einschliesst, eine Regel, welche darin ihre Begründung findet, dass bei ganzzahlig positivem n der Ausdruck $(x + e)^n = x^n + nx^{n-1}e +$ anderweitigen Gliedern wird, welche höhere Potenzen von e zu Faktoren besitzen. Die Regel lautet: „Jedes Glied ist mit dem Exponenten der in ihm vorkommenden Potenz der Unbekannten zu vervielfachen, die Glieder ohne Unbekannte sind wegzulassen, alle jene Produkte zusammen sind gleich Null zu setzen.“ Aus

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2$$

wird demnach

$$-2cx + 4x^2 = 0,\ x = \frac{c}{2}.$$

Vergleicht man Huygens Begründung mit den Sätzen, auf welchen nach De Sluses zweitem Briefe von 1673 (S. 132) dessen Tangentenmethode beruhte, so kann man kaum zweifeln, dass De Sluses Gedankengang mit dem von Huygens hier bei Gelegenheit der Bestimmung von Maximal- und Minimalwerthen Entwickelten nahe verwandt war. Doch wir gehen in unserem Berichte über die Huygens'sche Abhandlung weiter. Ist der zum Maximum oder Minimum zu machende

[1]) *sublatis primum, si quae sunt, fractionibus (quae in hoc exemplo nullae sunt).*

Ausdruck mit Brüchen behaftet, deren Nenner die Unbekannte enthalten, so nimmt die Regel folgende Gestalt an, deren Beweis wiederum von dem gleichen Gedanken aus wie vorher leicht zu führen ist: „Zunächst werden alle die Unbekannte nicht enthaltenden Glieder weggelassen; dann bringt man alle Glieder auf gemeinschaftlichen Nenner; der ganze Zähler wird hierauf mit dem ganzen Nenner vervielfacht und jedes einzelne Glied des Produktes überdies mit der Differenz der Exponenten der Unbekannten in den dem Zähler und dem Nenner angehörenden Faktoren, positiv wenn ersterer, negativ wenn letzterer den höheren Exponenten besitzt; die Summe dieser Produkte endlich ist gleich Null zu setzen.“ Das von Huygens gewählte Beispiel ist $\frac{bx^3 - c^2x^2 - 2bc^2x}{bc^2 + x^3}$. Er bildet

$$(3-0)bc^2 \cdot bx^3 - (2-0)bc^2 \cdot c^2x^2 - (1-0)bc^2 \cdot 2bc^2x$$
$$+ (3-3)x^3 \cdot bx^3 - (2-3)x^3 \cdot c^2x^2 - (1-3)x^3 \cdot 2bc^2x = 0$$

oder

$$3b^2c^2x^3 - 2bc^4x^2 - 2b^2c^4x + c^2x^5 + 4bc^2x^4 = 0.$$

Diese Gleichung ist durch $bc^2x + c^2x^2$ theilbar und liefert als Quotienten $x^3 + 3bx^2 - 2bc^2 = 0$, woraus x zu ermitteln ist. Huygens gibt ausdrücklich Fermat als den Schriftsteller an, aus welchem er die Anregung zu seiner Darlegung entnommen habe. Es ist kein Zweifel, dass er die Regeln wesentlich bequemer als Jener (Bd. II, S. 783—784) gestaltete, aber ebensowenig, dass er zwei Mängel weder beseitigte, noch vermuthlich erkannte, welche Fermat übrig gelassen hatte. Huygens gleich Fermat weiss nur rationalen Ausdrücken beizukommen, er lässt es vom Zufalle abhängen, ob der gefundene Werth von x ein Maximum oder ein Minimum hervorbringt, von jenen Fällen zu schweigen wo keines von beiden eintritt.

Die zweite Abhandlung von 1693 ist der Tangentenaufgabe gewidmet. Sie muss sehr viel früher geschrieben als dem Drucke übergeben worden sein, denn Huygens sagt in den einleitenden Worten, er habe diese Fassung der Fermatschen Regel als eine praktische erkannt, noch bevor Descartes Briefwechsel herausgekommen war, aus welchem er ersah, wie dieser letztere sich mit jener Regel abzufinden suchte. Das muss also schon vor 1667 gewesen sein, weil in diesem Jahre Clersellier den genannten Briefwechsel zum Drucke beförderte. Immerhin dürfte es nicht vor 1652 gewesen sein, da damals Huygens Nachdenken wesentlich durch fremde wie eigene auf die Quadratur des Kreises sich beziehende Untersuchungen in Anspruch genommen war. 1652 aber erfand De Sluse (Bd. II, S. 839) seine, wie wir oben bemerkt haben, mit Huygens Gedankenfolgen ungemein nahe verwandte Tangentenmethode. Auch der 1673 ver-

öffentlichte Wortlaut von De Sluses Regel deckt sich fast vollständig mit dem der von Huygens ausgesprochenen Vorschrift. Der Erfindung wie der Veröffentlichung nach ist also hier Huygens der zweite. Sein Eigenthum bleibt nur das Wort Subtangente und eine Klarlegung der Gründe, auf welche die Regel sich stützt, während De Sluse, wie wir gleichfalls wiederholen, sich mit Angabe dreier die Grundlage bildenden Sätze begnügt hatte (S. 132). Im Grossen und Ganzen kommt die Auseinandersetzung wieder darauf hinaus, dass bei ganzzahlig positivem n die Differenz $(x+e)^n - x^n$ mit $nx^{n-1}e$ beginne, um in den weiterfolgenden Gliedern höhere Potenzen von e zu enthalten.

Zu den Schriftstellern, welche mit der Curvenlehre sich beschäftigten, gehört auch Tschirnhaus. Manches, was er darüber dachte und veröffentlichte, kann nicht als richtig befunden werden, sei es, dass der Wunsch Früchte seiner rasch wachsenden Berühmtheit zu geniessen ihn Dinge zum Druck befördern liess, an deren vollen Zuverlässigkeit er selbst nicht recht glaubte (S. 113), sei es dass er allzugierig schon auf mangelhafte Induktion hin der neuen Sätze sich freute, welche sich ihm darboten. Werthvoll blieb seine Entdeckung der Brennlinien durch Zurückwerfung. Sei (Figur 22) eine Curve AFE den parallel einfallenden Sonnenstrahlen ausgesetzt, und der Strahl DF werde in der Richtung FG zurückgeworfen. Ein ihm zunächst eintreffender Strahl erzeugt einen auch dem FG sehr nahe liegenden zurückgeworfenen Strahl, der jenen in G schneidet. Der geometrische Ort der Durchschnittspunkte je zweier zunächst liegender zurückgeworfener Strahlen ist eine Curve BGE, welche als Brennlinie durch Zurückwerfung benannt zu werden pflegt, mit fremdländischem Ausdrucke als Catacaustica. Durch gebrochene Strahlen erzeugte Brennlinien führen den Namen Diacaustica. Beide Namen rühren von Johann und Jakob Bernoulli her[1]). Tschirnhaus hat seine Ergebnisse 1682 der Pariser Akademie der Wissenschaften mitgetheilt[2]) und hat sich in seinen Briefen an Leibniz weitläutiger

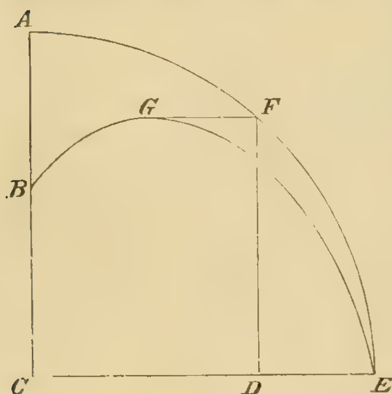


Fig. 22.

[1]) Jac. Bernoulli, Opera I, 466, 473 und öfter. [2]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 148—179.

darüber ausgelassen. Beweise von Tschirnhaus für diese seine Sätze kennt man nicht. Einzelne seiner Behauptungen sind auch thatsächlich unrichtig, was er später in den A. E. vom Februar 1690 zuzugeben sich genöthigt sah: Er habe einen Rechenfehler begangen, indem er früher die Catacaustica des Kreises für eine Curve vierten Grades gehalten habe, sie sei, wie Jakob Bernoulli ihn aufmerksam gemacht habe, vom sechsten Grade. Der wichtigste Satz Tschirnhausens spricht aus, dass die Bogenlänge EG der Catacaustica der Summe der beiden Strahlen $DF + FG$ gleich sei. Einen Beweis dafür lieferte Leibniz 1682 sofort in dem Antwortschreiben auf die ihm gemachte Mittheilung[2]), indem er dabei von dem nachgrade allgemein gewordenen Gedanken des Unendlichkleinen, beziehungsweise des Zusammenfallens eines Curvenelementes mit seiner Berührungslinie, einer Senkrechten auf eine Gerade mit einem um den Anfang der Geraden als Mittelpunkt beschriebenen unendlich kleinen Kreisbogen u. s. w. Gebrauch machte.

Eine sich von selbst aufdrängende Bemerkung ist es, dass die Durchschnittspunkte nächstliegender Strahlen, wie sie in der Catacaustica auftreten, und Durchschnittspunkte nächstliegender Normalen, wie sie als Evolute erscheinen, sehr verwandte Forderungen an die geometrische Einbildungskraft stellen. Wir wollen damit nicht sagen, Tschirnhaus habe das Horologium oscillatorium studirt, und der Gedanke von Huygens habe bewusst oder unbewusst in ihm weiter gearbeitet. Das kann nicht behauptet, es kann ebensowenig gradezu geleugnet werden, um so weniger geleugnet werden, als Tschirnhaus gleich das erste Mal, wo er Leibniz Andeutungen über seine neuen Untersuchungen machte, die Frage beifügte[3]), ob dieser glaube, dass Huygens, dessen Dioptrik jüngst herausgekommen sei, Aehnliches kenne. Man kann dieser Frage vielleicht entnehmen, dass Tschirnhaus die Empfindung hatte, es sei für Huygens nur naturgemäss, den einmal erfolgreich benutzten Gedanken des Durchschnittes nächstliegender Geraden weiter auszubilden.

Huygens that es auch wirklich, wobei er selbst einen Vorgänger in Descartes besass, dessen Ovalen (Bd. II, S. 743) bereits zu den Diacausticae gehörten. Huygens hat im sechsten Kapitel seines 1678 geschriebenen und Pariser Gelehrten vorgezeigten, dann allerdings erst 1690 gedruckten *Traité de la Lumière* die Aufgabe der Diacaustica gestellt und gelöst.

Die ältesten geometrischen Untersuchungen Tschirnhausens, von

[1]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 153. [2]) Leibniz IV, 493—494. [3]) Ebenda IV, 484.

denen wir wissen, und die ihn auf der Reise nach Italien beschäftigten, nachdem er eben Paris verlassen, wo er unter Leibnizens Augen und mit diesem gemeinsam, wenn nicht von ihm, mathematisch arbeiten gelernt hatte, beziehen sich auf Quadraturen[1]). Zunächst, d. h. während des Jahres 1678, wissen wir von solchen Arbeiten aus an Leibniz gerichteten brieflichen Mittheilungen. Tschirnhaus verfuhr theils nach Cavalieris Methode der Indivisibilien, theils nach einer Methode, die dem *Ductus plani in planum* des Gregorius a Sto. Vincentio augenfällig nachgebildet war, was Leibniz nicht anstand, ihm bemerklich zu machen. Dann probirte es Tschirnhaus mit der umgekehrten Aufgabe: quadrirbare Curven zu finden. Er sagt, er stelle einen algebraischen Ausdruck auf, welchen er als die Quadratur einer Curve betrachtet wissen wolle, und dann könne man nach einer Methode, welche an Barrow sich anschliesse[2]), die Gleichung der Curve finden. Näher erklärte er sich nicht, gab auch keine Beispiele, denen man entnehmen könnte, ob Tschirnhaus richtig schloss. Leibniz antwortete in etwas vorwurfsvollem Tone, das seien Dinge, welche er, Leibniz, ihm in Paris mündlich auseinandergesetzt habe, aber Tschirnhaus scheine nicht Acht gegeben zu haben[3]). Die Sache verhalte sich so. Die Gleichung irgend einer Curve möge

$$0 = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + \text{etc.}$$

heissen, und man wolle wissen, ob sie algebraisch allgemein quadrirbar sei. Nun stelle man die Gleichung einer zweiten Curve

$$0 = l + mx + nz + pxz + qx^2 + rz^2 + \text{etc.}$$

auf, welche die Curva summatrix, die summirende Curve genannt werden möge. Ist t deren Subtangente, so sei

$$\frac{z}{t} = \frac{m + pz + 2qx + \cdots}{n + px + 2rz + \cdots},$$

und bei $\frac{z}{t} = y$ entstehe

$$ny + pxy + 2rzy + \cdots = m + pz + 2qx + \cdots.$$

Aus dieser Gleichung sei mittels

$$0 = l + mx + nz + pxz + qx^2 + rz^2 + \text{etc.}$$

die Unbekannte z wegzuschaffen, und man erhalte eine neue Gleichung, welche als Unbekannte nur x und y, in den Coefficienten aber l, m, n, p, q, r ... enthalten werde. Die Frage sei nun darauf zurückgeführt, ob durch Identification dieser Gleichung mit

$$0 = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + \text{etc.}$$

[1]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 71—112. [2]) Leibniz IV, 472. — Weissenborn, Tschirnhaus S. 84. [3]) Leibniz IV, 481: *Et memini me Tibi jam haec Parisiis dicere, sed ut video non attendisti.*

die $l, m, n, p, q, r \ldots$ bestimmt werden können oder nicht; im ersteren Falle habe man eine algebraisch allgemein quadrirbare Curve, im zweiten nicht. In die Sprache der heutigen Mathematik gekleidet würde die Leibnizische Vorschrift besagen, dass wenn $z = f(x)$ zur Quadratur von $y = \varphi(x)$ führen soll, man $y = \frac{z}{t} = z'$ setzen müsse, weil alsdann

$$\int y \cdot dx = \int z' \cdot dx = z = f(x)$$

liefert. Im Jahre 1678 war das noch nicht so leicht zu verstehen, und nur die mündlichen Unterredungen in Paris, auf welche Leibniz anspielte, mochten den Schlüssel zum Verständniss geliefert haben.

Tschirnhaus schwieg von nun an in seinen Briefen über diesen Gegenstand, aber nach Ablauf mehrerer Jahre gab er im Octoberhefte 1683 der A. E. eine Abhandlung *Methodus datae figurae, rectis lineis et curva geometrica terminatae, aut quadraturam aut impossibilitatem ejusdem quadraturae determinare*[1]) heraus, welche schon durch die an der Spitze stehende Zeichnung (Figur 23) Zeugniss dafür ablegt, dass Tschirnhaus, mochte er auch eine Zeit lang vergessen haben, was Leibniz ihm in Paris mündlich gesagt hatte, dessen Brief um so sorgsamer sich eingeprägt und dessen Sinn begriffen hatte. Tschirnhaus nimmt in der Abhandlung an, zwischen der Curve AHD, deren Ordinaten y heissen, und der Curve AFB, deren Ordinaten z heissen, während die beiden Curven

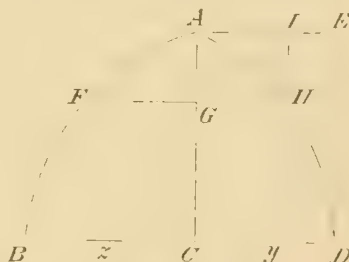


Fig. 23.

gemeinsamen, auf AGC gemessenen Abscissen durch x bezeichnet werden, finde die Beziehung statt, dass das Rechteck $ACDE$ dem gemischtlinigen Dreieck ACB gleich sei, ebenso $AGHI = AGF$ u. s. w. Die Gleichung der AHD wird als gegeben angenommen, und zwar als Gleichung 1., 2., 3. u. s. w. Grades. Er gibt alsdann die Gleichung zwischen x und z an, welche der Curve AFB angehören muss, damit die geforderte Beziehung stattfinde. Wie er zu diesen Gleichungen gelangt sei, sagt er nicht, und überdies hat sich bei einer Nachrechnung unter Benutzung der heute landläufigen Mittel herausgestellt[2]), dass sie nicht einmal richtig sind.

Es würde uns zu weit führen, wollten wir genauer erzählen, wie

[1]) A. E. 1683 pag. 433—437. [2]) Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwicklung von Leibniz bis auf Lagrange. Halle, 1856. S. 79—82.

Leibniz über Tschirnhausens Verfahren, ein ihm brieflich Angedeutetes auszubeuten, ohne auch nur der ihm gegebenen Anregung mit einem Worte zu gedenken, erzürnt war, und wie es der Vermittelung von Mencke, dem Herausgeber der A. E., bedurfte, um zu verhüten, dass nicht ein öffentlicher Streit zwischen Leibniz und Tschirnhaus in jener Zeitschrift selbst ausbrach.

Einige Monate früher als die Abhandlung über Quadraturen liess Tschirnhaus in den A. E. vom December 1682 und vom März 1683 zwei Aufsätze erscheinen[1]), welche das Tangentenproblem und das der Maxima und Minima behandelten. Zur Lösung beider Aufgaben wurden allgemeine Regeln aufgestellt, welche in dieser Allgemeinheit falsch sind und nur ausnahmsweise in einigen besonderen Fällen Richtiges liefern.

Einige Jahre später dagegen, 1686, erschien Tschirnhaus mit einem grösseren Werke auf dem Büchermarkt, mit der *Medicina mentis*[2]). Tschirnhaus selbst durfte 1695 eine neue verbesserte Ausgabe veranstalten, weitere Abdrücke erfolgten 1705 und 1753 und beweisen, dass der Geschmack der Zeit für derartige Bücher empfänglich war, wenn auch Tadel und Widerspruch nicht fehlten. Die Medicina mentis ist eine Logik und würde sich unserer Beachtung entziehen, wenn nicht Tschirnhaus, wie seit Aristoteles alle Schriftsteller über Logik es mehr oder weniger gethan haben, seine Beispiele mit einiger Vorliebe der Mathematik entlehnte, und zwar blieb er, wie man voll anerkennen muss, nicht bei den alten breitgetretenen Beispielen stehen, sondern er ersann deren neue, die im Lichte der Mathematik betrachtet zu werden verdienen. Die menschlichen Kenntnisse werden nach Tschirnhaus theils durch die Begriffsfähigkeit erzeugt, theils durch die Einbildungskraft empfangen[3]). Erzeugen, der Concept, ist das logisch Bedeutsamere, und insbesondere ist zu untersuchen, wie die ursprünglichen Concepte erzeugt werden. Sie theilen sich ein nach der Anzahl der bei der Bildung wirksamen Elemente, und hierfür tritt ein erstes neues Beispiel auf: die Erzeugung von Curven aus Brennpunkten[4]). Eine Curve hat einen Brennpunkt, Focus, wenn sie so entsteht, dass ein Faden von gegebener Länge an einem festen Stifte A befestigt ist, und dass das Ende des Fadens mittels eines Griffels B herumgeführt wird; sie ist ein Kreis. Die Ellipse als Curve mit zwei Brennpunkten entsteht, indem der Faden mit beiden Enden in festen Stiften A, B befestigt ist und

---

[1]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 129—148. [2]) Ebenda S. 19—69. [3]) *Intellectus concipit, imaginatio percipit.* [4]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 35—36.

mittels eines bewegten Griffels C gespannt wird. Nun gelangt man zur Curve (Figur 24) mit den drei durch feste Stifte A, B, C hergestellten Brennpunkten. Der Faden ist in A befestigt, um B lose herumgeschlungen, mit dem anderen Ende in C befestigt, und nun spannt ihn der bewegte Griffel D. Man sieht den weiteren Verlauf, d. h. die Entstehung der Curve mit vier und mehr Brennpunkten. Bei m Brennpunkten als allgemeinem Falle — den Tschirnhaus freilich nicht erörtert — sind die beiden Enden des Fadens an Stiften befestigt, während er inzwischen um $m-2$ Stifte lose herumgeschlungen ist, so dass von jedem dieser $m-2$ Stifte Doppelfäden nach jedem Curvenpunkte gehen. Als besondere Fälle sind zu unterscheiden, wie viele von den Brennpunkten in einer Geraden liegen u. s. w. Die Anzahl der Brennpunkte soll man den Grad der Curve nennen, und da durch das Zusammenfallen von Brennpunkten der Grad sich erniedrigt, so sind alle Brennpunktscurven niedrigeren Grades besondere Fälle derer von höherem Grade. Man kann aber die Erzeugung nunmehr dadurch verwickelter machen, dass Brennpunktscurven an die Stelle einzelner Brennpunkte treten. Wollte man, was Tschirnhaus nicht thut, dafür die Benennung Ordnung benutzen, so wären die gewöhnlichen Brennpunktscurven solche erster Ordnung, die soeben geschilderten neuen Curven wären Brennpunktscurven zweiter Ordnung, und Brennpunktscurven $n$ter Ordnung wären solche, bei welchen Brennpunktscurven $n-1$ter Ordnung an die Stelle der Brennpunkte traten. Sind (Figur 25) zwei Brennpunkte a, d vorhanden, deren einer a durch λ, der andere d durch μ Fäden mit dem Curvenpunkte c vereinigt ist, so dass also $\lambda \cdot ac + \mu \cdot dc$ die unveränderliche Länge des ursprünglichen Fadens darstellt, so glaubte Tschirnhaus auf folgende Weise die Berührungslinie an die Curve in c erhalten zu können: Man beschreibe um c als Mittelpunkt mit irgend einem Halbmesser einen Kreisbogen mp, welcher in m den Leitstrahl ca nach dem einen Brennpunkte a, in p den Leitstrahl cd nach dem anderen Brennpunkte d schneide. Den Bogen mp theile man in r in umgekehrtem Verhältnisse der Anzahl der nach a und d führenden

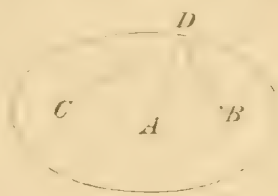


Fig. 24.

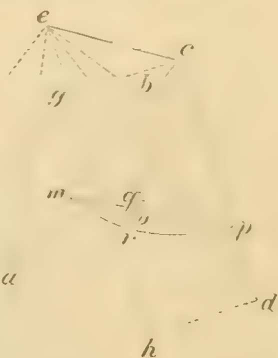


Fig. 25.

Fäden, d. h. so dass $mr : rp = \mu : \lambda$. Alsdann stehe rc in c zur Curve senkrecht.

Ein damals noch sehr junger schweizer Mathematiker, Nicolas Fatio de Duillier (1664—1753), von welchem im 92. Kapitel ausführlicher die Rede sein wird, trat in der *Bibliothèque universelle* (Année 1688, Tome V, pag. 25) gegen die Tschirnhausensche Vorschrift auf und behauptete, die rc sei nur unter der Voraussetzung senkrecht zur Curve, wenn sie nicht den Kreisbogen mrp, sondern dessen Sehne mnp in dem verlangten Verhältnisse theile, d. h. wenn $mn : np = \mu : \lambda$. Ist nc alsdann zur Curve senkrecht, und ist ce wieder senkrecht zu nc, so muss ce die Berührungslinie sein, d. h. kein weiterer Punkt e dieser Geraden kann der Curve angehören. Letzteres hat man für den Punkt e zu beweisen, d. h. man muss zeigen, dass $\lambda \cdot ae + \mu \cdot de$ mehr als die Fadenlänge beansprucht. Werden diejenigen senkrechte und parallele Hilfslinien gezogen, welche aus der Figur ersichtlich sind, so erscheinen, wie leicht zu beweisen, drei Paare einander ähnlicher Dreiecke,

$$\triangle\, cmo \backsim ecb, \qquad \triangle\, cpq \backsim ceg, \qquad \triangle\, mon \backsim pqn,$$

und daraus folgen die drei Proportionen:

$$1.\quad cm : om = ec : bc,$$
$$2.\quad cp : qp = ce : ge,$$
$$3.\quad om : qp = mn : pn.$$

Weil $cp = cm$ als Halbmesser desselben Kreises, lässt 2. sich auch

$$cm : qp = ec : eg$$

schreiben, und daraus in Verbindung mit 1. erhält man

$$om : qp = bc : eg$$

und wegen 3. auch

$$bc : eg = mn : pn = \mu : \lambda.$$

Demnach ist $\lambda \cdot bc = \mu \cdot eg$. Die Länge des mehrgenannten Fadens ist

$$\lambda \cdot ac + \mu \cdot dc = \lambda(ab + bc) + \mu \cdot dc = \lambda \cdot ef + \mu \cdot eg + \mu \cdot gh = \lambda \cdot ef + \mu \cdot eh.$$

Aber $ae > ef$, $de > eh$, mithin

$$\lambda \cdot ae + \mu \cdot de > \lambda \cdot ef + \mu \cdot eh,$$

und das ist die Ungleichung, auf deren Beweis es ankam. Allerdings fehlt noch der Beweis einer eben solchen Ungleichung für den Fall, dass e auf der anderen Seite von c (näher beim Brennpunkte d) liegt, aber auch ihn erbrachte Fatio de Duillier unter Herstellung einer der vorigen ähnlichen Zeichnung mittels fast buchstäblich gleicher Schlüsse. Fatio de Duillier ging aber noch einen beträchtlichen Schritt über diesen ersten interessanten Lehrsatz hinaus. Seien b, c, d

die Brennpunkte einer dreibrennpunktigen Curve und m ein Punkt dieser Curve, deren Gesetz sich dadurch ausdrückt, dass die Fadenlänge

$$L = \varkappa \cdot mb + \lambda \cdot mc + \mu \cdot md$$

sein muss. Nun solle man um m als Mittelpunkt mit beliebigem Halbmesser einen Kreisbogen beschreiben, der die mb in f, die mc in g, die md in h schneiden möge, und in f, g, h Gewichte im Grössenverhältnisse $\varkappa : \lambda : \mu$ angebracht denken. Fällt deren Schwerpunkt nach n, so sei nm zur Curve senkrecht. Man hat gezeigt[1]), dass diese Behauptung unrichtig ist.

Tschirnhaus vertheidigte sich zunächst im Septemberheft 1688 der Bibliothèque universelle in sehr gewundener Weise, indem er in der Hauptsache nachgab, d. h. zugestand, dass die Tangentenregel in der Medicina mentis irrig sei. In der zweiten Auflage der Medicina mentis von 1695 beging er dann den Irrthum, die Schwerpunktsmethode für zutreffend zu halten. Er ersetzte sie durch eine rein geometrische Vorschrift, deren Beweis er zu anderer Gelegenheit zusagte. Er hat ihn nie gegeben und konnte ihn nie geben, denn die Vorschrift war irrig.

Immer und überall kehrt das Gleiche wieder. Tschirnhaus verallgemeinert, verspricht Beweise der Verallgemeinerung und bleibt sie schuldig. Ein letztes Beispiel können wir dem im Novemberheft 1695 der A. E. gedruckten Aufsatze *Nova et singularis geometriae promotio circa dimensionem quantitatum curvarum* entnehmen. Dort ist der richtige Satz ausgesprochen, dass, wenn zwei Parabeln (Figur 26) mit der Axe AX und dem Brennpunkte C auf einander liegen, eine von C aus gezogene Gerade CDE die Parabelbögen BD, AE begrenze, deren Längen sich wie die Parameter der beiden Parabeln verhalten. Aber sofort geht Tschirnhaus weiter und verallgemeinert den Satz in ungerechtfertigter Weise, ja er geht so weit, dass er sogar behauptet[2]), er sei im Besitze eines Verfahrens, welches ihm ermögliche, bei jeder Curve ein Bogenstück zu ermitteln, welches zu einem anderen auf ihr gegebenen Bogenstücke in gegebenem Verhältnisse stehe! Natürlich blieb er auch dieses Verfahren schuldig und hinterlässt uns den Zweifel, ob er heissblütig genug war, Sätze, die er nur ahnte, ohne weiteres für wahr zu halten, oder ob er immer mit Bewusstsein flunkerte.

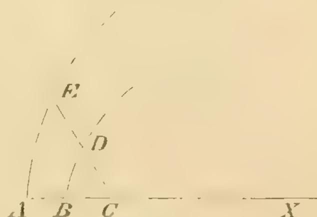


Fig. 26.

[1]) Weissenborn, Tschirnhaus S. 139 und 146. [2]) Ebenda S. 117.

89. Kapitel.

Newtons und Leibnizens erste Entdeckungen im Gebiete der Infinitesimalrechnung.

Was wir im letzten Kapitel an neuen Errungenschaften in der Curvenlehre mitzutheilen hatten, war geistreichen Benutzern längst bekannter Methoden zu verdanken. Inzwischen waren aber neue Methoden entstanden, und ihre Erfindung zu erzählen, von der wir schon am Schlusse des XV. Abschnittes als bevorstehend sprachen, um im letzten Kapitel (S. 126) die Ankündigung zu wiederholen, ist nunmehr unsere Aufgabe.

Wir haben zuerst von Newtons Analysis per aequationes, von seiner Erstlingsabhandlung von 1666 beziehungsweise 1669 (S. 64) zu reden. Wir haben als Inhalt derselben den binomischen Lehrsatz bei beliebiger Annahme des Exponenten und die näherungsweise erfolgende Auflösung von Gleichungen kennen gelernt, einen Inhalt, der vollauf genügte, dem Verfasser unsterblichen Ruhm zu sichern. Aber jener Inhalt war, möchte man sagen, eingerahmt zwischen Aeusserungen, auf welche man später noch grösseres Gewicht legte. Die Abhandlung beginnt nämlich mit einer Regel für die Quadratur einfacher Curven, welche $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ sei, falls die Gleichung der Curve $y = ax^{\frac{m}{n}}$ war, und gegen den Schluss der Abhandlung findet sich ein Beweis der Regel.

Sie war nichts weniger als neu. Wallis (Bd. II, S. 826) hatte sie 1655, wenn auch nicht in demselben Wortlaute doch dem Sinne nach, aufgestellt. Newtons Beweis ist folgender (Figur 27). Die Basis AB einer Curve $AD\delta$ möge durch x bezeichnet sein, die senkrechte Applicate BD durch y, die Fläche ABD durch z. Das kleine Stückchen $B\beta$ wird durch den Buchstaben o bezeichnet, den man ja nicht, wie es mitunter geschehen ist, mit einer Null verwechseln darf, ausserdem sei $BK = v$, und das Rechteck $BKH\beta$ $(= ov)$ sei flächengleich mit $B\beta\delta D$. Man hat also $A\beta = x + o$, $A\delta\beta = z + ov$. Newton nimmt nun die Abhängigkeit des z von x als gegeben an und sucht daraus y; mit Ausdrücken, welche Newton

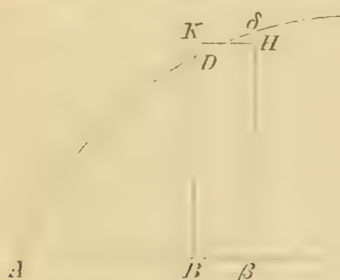


Fig. 27.

nicht kannte, würde man sagen, aus $z = \int y dx = F(x)$ sucht er $y = \frac{dF(x)}{dx}$. Als Beispiel wählt er $\frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} = z$ oder, indem $\frac{na}{m+n} = c$, $m + n = p$ gesetzt ist, $cx^{\frac{p}{n}} = z$, beziehungsweise $c^n x^p = z^n$. Geht x in $x + o$ über, so nimmt z den Werth $z + ov$ oder auch den davon nicht verschiedenen Werth $z + oy$ an[1]). Das liefert die neue Gleichung

$$c^n (x + o)^p = (z + oy)^n.$$

Wendet man links und rechts die Binomialentwicklung an, so entsteht

$$c^n x^p + c^n p x^{p-1} o + \cdots = z^n + n z^{n-1} o y + \cdots,$$

und durch Subtraktion von $c^n x^p = z^n$ und darauf folgender Division durch o findet man

$$c^n p x^{p-1} + \cdots = n z^{n-1} y + \cdots,$$

wo sämmtliche durch Punkte angedeutete Glieder links wie rechts vom Gleichheitszeichen den Faktor o noch enthalten, folglich wegfallen, wenn o verschwindet. Aus der übrig bleibenden Gleichung $c^n p x^{p-1} = n z^{n-1} y$ entsteht dann

$$y = \frac{c^n p x^{p-1}}{n z^{n-1}} = \frac{c^n p x^{p-1} z}{n z^n} = \frac{c^n p x^{p-1} z}{n c^n x^p} = \frac{pz}{nx} = \frac{p c x^{\frac{p}{n}}}{nx}$$

$$= (m+n) \frac{na}{m+n} \frac{x^{\frac{m+n}{n}}}{nx} = a x^{\frac{m}{n}},$$

und rückwärts hat also die Curvengleichung $y = a x^{\frac{m}{n}}$ die Fläche $z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$ zur Folge. Newton fügt hinzu, man könne auch andere Gleichungsformen für den Zusammenhang zwischen z und x wählen. Bei $z = \sqrt{a^2 + x^2}$ sei $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ und so bei den übrigen[2]).

Gestatten wir uns wieder die Ausdrucksweise der heutigen Mathematik, so sind wir berechtigt aus diesen Aeusserungen die Folgerung zu ziehen, dass Newton, als er so schrieb, Potenzen von Polynomien mit positiven, vielleicht auch negativen, ganzen und gebrochenen Exponenten zu differentiiren wusste, während von der Differentiation von Produkten und Quotienten sich noch keine Spur findet. Wir erkennen ferner, dass es Newton klar war, dass die Gleichung der Curve durch Differentiation der Gleichung für die Curvenfläche ent-

[1]) *sive, quod perinde est, $z + oy$.* [2]) *Et sic de reliquis.*

stehe. Andererseits ist die Aehnlichkeit von Newtons Verfahren mit Barrows rechnender Tangentenmethode (S. 130) nicht von der Hand zu weisen. Man wird unter Berücksichtigung des Umstandes, dass Barrow jenes Verfahren auf Newtons Andrängen zum Drucke gab, zu einer von zwei Vermuthungen gedrängt: entweder hat Barrow den Anregungen Newtons, oder Newton, der Schüler Barrows, den Anregungen seines Lehrers sehr viel zu verdanken gehabt. Wir wollen nicht entscheiden, welche Vermuthung die richtigere ist; vielleicht traf beides zusammen. Das aber glauben wir behaupten zu können, bezüglich der Differentiation war von einem unbefangenen und unwissenden Leser nicht mehr aus diesem Kapitel von Newtons handschriftlicher *Analysis per aequationes* als aus Barrows gedruckten *Lectiones geometricae* zu entnehmen und umgekehrt.

Aber Newton hat noch Anderes zwischendrein erörtert. Wir sahen früher (S. 101—102), dass Newton aus einer x und y enthaltenden Gleichung y in Gestalt einer nach Potenzen von x fortlaufenden Reihe zu entwickeln lehrte. Seine Absicht dabei war, die Quadratur der durch jene Gleichung zwischen x und y definirten Curve zu ermitteln. Wenn[1]) die Gleichung

$$y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$$

den Werth

$$y = x - \frac{a}{4} + \frac{a^2}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3} + \text{etc.}$$

nach sich zieht, so kann nach den am Anfange der Abhandlung gelehrten Regeln die Curve quadrirt werden und ihre Fläche stellt sich alsdann dar durch

$$\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{a^2}{64x}} - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2} \text{ etc.}$$

Der sonderbar aussehende Ausdruck $\boxed{\frac{a^2}{64x}}$ wird dahin erklärt, es handle sich hier um ein hyperbolisches Flächenstück, welches der übrigen durch die anderen Reihenglieder gemessenen Fläche hinzuzufügen sei. Eine Bemerkung dagegen, welche ausspräche, jenes hyperbolische Flächenstück sei $\frac{a^2}{64}\log x$, findet sich nicht.

Curvenlängen, Körperinhalte und Körperoberflächen, auch Schwerpunkte zu bestimmen, heisst es dann später[2]), seien lauter Aufgaben, welche auf Quadraturen sich zurückführen lassen. Der Grundgedanke sei folgender (Figur 28). Das Flächenstück ABD ist durch irgend eine Curve AD und die Strecken $AB = x$, $BD = y$ begrenzt. AH

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 15. [2]) Ebenda I, 18.

oder BK soll die Längeneinheit sein, so dass das Rechteck

$$ABKH = x \cdot 1 = x$$

ist. Die Fläche ABD ebenso wie das Rechteck $ABKH$ kann durch gleichmässige bei AH beginnende Fortbewegung der DBK entstanden gedacht werden. Dabei ist $BK = 1$ das Moment, *momentum*, gemäss dessen $ABKH = x$, und $BD = y$ das Moment, gemäss dessen ABD sich allmälig vergrössert. Ist BD fortwährend gegeben, so kann nach den früheren Regeln die Fläche ABD bestimmt, beziehungsweise mit der Fläche $ABKH$ verglichen werden, welche gemäss des Momentes 1 entstand.

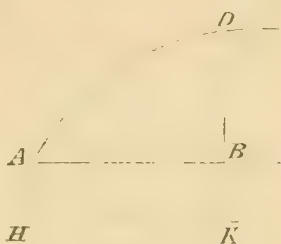


Fig. 28.

Wir haben das lateinische Wort Moment einfach übernommen. Es bedeutet, wie wir sehen, eine in einem kürzesten Zeitraume sich vollziehende räumliche Veränderung und kann ganz passend durch das deutsche Wort einer Augenblicksveränderung wiedergegeben werden.

Newton macht die Anwendung seines Gedankens auf die Bestimmung der Bogenlänge AD eines Kreisbogens (Figur 29). Er zieht die Berührungslinie DHT und die Seiten des unendlich kleinen Rechtecks $HGBK$. Als Einheit wird der Durchmesser

$$AE = 2AC = 2DC$$

angenommen. BK oder das ihm gleiche GH ist die Augenblicksveränderung der Basis x, HD die des Bogens AD, und nun verhält sich $GH : HD = BT : TD = BD : CD = \sqrt{x - x^2} : \frac{1}{2}$ $= 1 : \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} = 1 : \frac{\sqrt{x - x^2}}{2x - 2x^2}$. Betrachtet man, was Newton freilich zunächst nicht sagt, die Augenblicksveränderung der Basis als Einheit für die anderen Augenblicksveränderungen, so zeigt sich

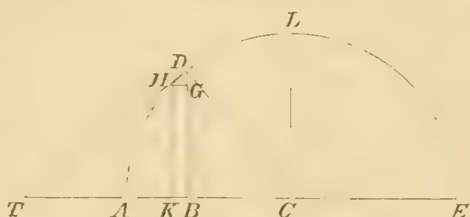


Fig. 29.

$$\frac{\sqrt{x - x^2}}{2x - 2x^2} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16} x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32} x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256} x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512} x^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

als Augenblicksveränderung der Bogenlänge. Von der Veränderung des Bogens zum Bogen ist der gleiche Uebergang, wie von der Veränderung der Fläche zur Fläche. Newton spricht diese Behauptung in den für die damalige Zeit dunklen Worten aus, aus jener Reihe

folge nach den für die Quadraturen gegebenen Regeln die Bogenlänge

$$AD = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}} \text{ etc.}$$

Eine hinzugefügte Erläuterung ersetzt dann jene erst verschwiegene Bemerkung, dass die Augenblicksveränderung der Basis als Einheit derjenigen des Bogens gelte. „Die Einheit für die Augenblicksveränderungen, sagt er[1]), ist Oberfläche wo es um Körperinhalte, Linie wo es um Flächenräume, Punkt wo es (wie in diesem Beispiele) um Längen sich handelt, und ich scheue mich nicht von Punkten oder unendlich kleinen Linien als Einheiten zu reden."

Wir sehen in diesen Aeusserungen Newtons einmal das deutlicher werdende Bewusstsein auftreten, dass Rectification, Kubatur, Quadratur Aufgaben von wesentlich gleicher Natur sind. Wir sehen zweitens den Begriff der Augenblicksveränderung hervortreten. Diesen hat Barrow nicht besessen, so nahe im Uebrigen, wie wir wiederholen dürfen, dessen Lectiones geometricae den Newtonschen Gedanken verwandt waren. Er ist Newton eigenthümlich und bildet die der Bewegungslehre entnommene Grundlage seiner weiteren Forschungen.

Diese kamen allerdings sehr viel später an die Oeffentlichkeit, und wir verlassen Newton, um zum Berichte über Leibniz und seine Leistungen auf dem Gebiete der Infinitesimalgeometrie überzugehen. Leibniz war seit 1669 im Briefwechsel mit Oldenburg. Am 10. August 1670 machte dieser ihn auf Barrows *Lectiones tum Opticae tum Geometricae* als ein von urtheilsfähigen Lesern sehr geschätztes Werk[2]) aufmerksam. Im Januar 1673 nahm Leibniz seinen ersten Londoner Aufenthalt, wo er, wie (S. 28) begründet wurde, nicht mit Collins bekannt wurde, also nicht in der Lage war, die bei diesem ruhende Abhandlung Newtons, die Analysis per aequationes, lesen zu können. Dagegen brachte er Barrows Lectiones opticae käuflich an sich, von deren Besitze in einem Briefe die Rede ist[3]), welchen Leibniz, nach Paris zurückgekehrt, im April 1673 an Oldenburg schrieb. Wenn darin nur die optischen Vorlesungen genannt sind, so kann doch kein Zweifel daran obwalten, dass ein Exemplar der vereinigten

---

[1]) *Sed notandum est, quod unitas ista, quae pro momento ponitur, est Superficies quum de Solidis, et Linea quum de Superficiebus, et Punctum quum de Lineis (ut in hoc exemplo) agitur. Nec vereor loqui de unitate in Punctis, sive Lineis infinite parvis.* [2]) Leibniz I, 12. [3]) Ebenda I, 46: *Attuli mecum Barrovii Lectiones Opticas; sub libri calcem doctissimus autor phaenomenon exhibet, cujus rationem reddere posse negat, aliosque ut inquirant hortatur; aut ut, si possint, causam sibi communicent rogat; dubitat vero ut id facile praestari possit. Hugenius tamen et Mariottus ejus solutionem se habere dixere.*

optischen und geometrischen Vorlesungen gemeint war. Ein solches Exemplar mit handschriftlichen Randbemerkungen Leibnizens versehen ist nämlich in seinem Nachlasse aufgefunden worden[1]). Eine nicht unwichtige Frage ist hier aufzuwerfen: Hat Leibniz die Lectiones gleich im April 1673 studirt, oder hat er das Buch erst geraume Zeit in seinem Besitze gehabt und ist erst dann zur Aneignung seines Inhaltes geschritten, als er Barrow gegenüber selbständig schon Vieles ersonnen hatte, zu welchem er dort eine allerdings nur geringe Anregung, aber immerhin eine Anregung hätte finden können?

Zu Gunsten der Meinung, dass Leibniz das erworbene Buch sofort studirte, hat man verschiedene Gründe angeführt[2]). Erstlich spricht dafür die allgemeine Wahrscheinlichkeit. Ein Mathematiker, der wie die in der Note abgedruckte oben erwähnte Briefstelle vom April 1673 beweist, die optischen Theile des Buches las, wird nicht grade da aufhören, wo von der ihn weit mehr interessirenden Geometrie die Rede ist. Zweitens hat Barrow die unendlich kleinen Katheten des aus den Zuwächsen der Abscisse und der Ordinate und aus der Tangente gebildeten Dreieckchens durch e und a bezeichnet (S. 130), und noch im October 1675 führen die gleichen Stückchen bei Leibniz, der des gleichen unendlich kleinen Dreiecks sich bedient, bestimmte Buchstaben als Bezeichnung, nämlich die Buchstaben a und l[3]).

Wenn wir das Gewicht dieser Gründe keineswegs verkennen, so lässt sich ihnen doch mancherlei entgegenhalten. Man kann sagen, bestimmte Buchstaben für unendlich kleine Zuwächse seien seit Fermats E allgemein angewandt worden, so dass das Neue einzig darin bestand, zwei unendlich kleine Längen durch Buchstaben zu bezeichnen. Man kann auf einen Brief Leibnizens an den Marquis de l'Hospital von Ende December 1694 sich berufen[4]). Leibniz erklärt dort, er habe bei Beginn seiner Infinitesimaluntersuchungen von den Indivisibilien Cavalieris, von dem Ductus plani in planum des Gregorius a Sto. Vincentio, von der Synopsis geometrica des Honoré Fabri von 1669 genaue Kenntniss gehabt, also von dem was aus diesen oder ähnlichen Schriftstellern geschöpft werden könne[5]). Dass Barrow nicht unter die Worte ähnliche Schriftsteller inbegriffen werden darf, ist ausdrücklich durch die jener Erklärung

[1]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle, 1855. S. 48. [2]) F. Giesel, Die Entstehung des Newton-Leibnizischen Prioritätsstreites hinsichtlich der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Osterprogramm der höheren Bürgerschule zu Delitzsch 1866. S. 13, Note 6. [3]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis. S. 123. [4]) Leibniz II, 259. [5]) *ce qui peut se tirer de ces auteurs ou leurs semblables.*

vorausgeschickten Worte[1]) betont: „Ich erkenne an, dass Herr Barrow sehr weit gegangen ist, aber für meine Methoden brachte er mir keinerlei Hilfe.“ Dann führt Leibniz in Anschluss an das obige auf die ähnlichen Schriftsteller Bezügliche fort: „Jetzt lieh mir Herr Huygens die Briefe Dettonvilles oder Pascals. Ich prüfte dessen Beweis für die Kugeloberfläche, und mir kam ein Licht, welches der Verfasser nicht gesehen hatte“[2]). Leibniz sagt also hier ganz unzweideutig, Pascal habe ihm den Gedanken des Dreieckchen eingeflösst[3]), welches er das charakteristische Dreieck nenne[4]). Er habe darüber mit Huygens gesprochen und dieser ihn alsdann auf Descartes hingewiesen, damit er mit dessen Verfahren sich vertraut mache, Gleichungen zur Darstellung der Natur krummer Linien anzuwenden. Nach weiteren Ausführungen schliesst Leibniz seine Erzählung mit den Worten[5]): „Ich habe öffentlich anerkannt, was ich Herrn Huygens und bezüglich der unendlichen Reihen Herrn Newton schulde. Ich hätte Herrn Barrow gegenüber ebenso gehandelt, wenn ich aus ihm geschöpft hätte.“

Wir müssen hier kurz einschalten, dass es leicht fällt, die Stelle Pascals nachzuweisen, auf welche Leibniz in seinem Briefe, und wie wir zeigen werden, auch anderwärts, anspielte. Sie findet sich in dessen *Traité des sinus du quart de cercle*[6]) und ist von einer Zeichnung (Figur 30) begleitet, bei welcher es auf die Aehnlichkeit der Dreiecke EKE und DIA ankommt.

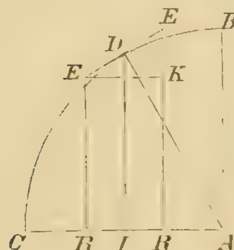


Fig. 30.

Auch anderwärts, sagen wir, hat Leibniz die Einwirkung Pascals, aber nicht Barrows, auf seinen Geist ganz ähnlich wie in dem Briefe an L'Hospital geschildert. In einer nicht abgeschickten, aber handschriftlich erhaltenen Nachschrift zu einem Briefe vom April 1703 an Jakob Bernoulli sagt Leibniz noch etwas weitergehend, er habe nachmals bei Barrow, als dessen Vorlesungen erschienen, einen grossen Theil seiner eigenen Sätze vorweggenommen gefunden[7]). An Freiherr Christian von Wolf schreibt

[1]) *Je reconnais que M. Barrow est allé bien avant, mais je puis vous assurer, Monsieur, que je n'ay tiré aucun secours pour mes méthodes.* [2]) *J'y trouvay une lumiere que l'auteur n'avait point veue.* [3]) Ueber das Verhältniss von Leibniz zu Pascal vergl. C. J. Gerhardt, Leibniz und Pascal, in den Monatsberichten der Berliner Akademie 1891, S. 1053 figg. [4]) *que j'appelle le triangle caractéristique.* [5]) *Comme j'ay reconnu publiquement, en quoy j'estois redevable à M. Hugens et à l'egard des series infinies à M. Newton, j'en aurais fait autant à l'egard de M. Barrow, si j'y avais puisé.* [6]) Pascal, Oeuvres III, 409. [7]) Leibniz III, 72—73 in der Anmerkung: *quemadmodum et Barrovio demum*

Leibniz etwa 1716, Barrow habe für das Tangentenproblem nichts geleistet, was nicht auf Vorarbeiten von Fermat, von Roberval, von De Sluse und anderen beruhe; er habe in dessen Vorlesungen, als er, so weit er sich erinnere im Jahre 1675, Einsicht davon nahm[1]), nichts Bemerkenswerthes darin gefunden, um so weniger als er selbst damals Reiferes besessen habe. In der zwischen 1714 und 1716 verfassten Abhandlung *Historia et origo calculi differentialis* hat Leibniz wiederum Pascal als den Schriftsteller genannt, aus dessen Arbeiten er Folgerungen gezogen habe, die Pascal selbst entgangen waren[2]).

Soll Leibniz an allen diesen Stellen die Unwahrheit gesagt haben? Warum? Um sich mit fremden Federn zu schmücken? Er gibt ja fremde Anregung zu! Er beruft sich auf Pascal! Also nur um dem Engländer Barrow nichts zu verdanken zu haben? Wir wissen, wohin Parteisucht und Parteihass führen können, wir werden im XVII. Abschnitte traurige Geschichten davon zu erzählen haben. Aber wenn man die Ansicht hegt, Leibniz habe gegen alle mit ihm in Briefwechsel stehende Gelehrten gelogen, will man auch bedachte Lüge in dem Aufsatze *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* wittern, welchen Leibniz 1686 in den A. E. veröffentlichte, also zu einer Zeit, als er zum Hasse gegen Engländer nicht die geringste Veranlassung hatte? Er nannte allerdings Pascal dort nicht, aber er sprach sich für uns doch mit hinlänglicher Deutlichkeit aus, indem er erzählte[3]), er habe plötzlich ein helles Licht gesehen, als ihm ein Beweis für die Grösse der Kugeloberfläche zu Augen kam, denn diese Redewendung deckt sich fast buchstäblich mit den in dem Briefe an L'Hospital vorkommenden Ausdrücken.

Und will man schliesslich so weit gehen, behaupten zu wollen, Leibniz habe nicht bloss alle Andere, er habe auch sich selbst angelogen? Wie anders wäre denn die Thatsache zu nennen, dass Leibniz in seinem Handexemplare der Lectiones geometricae mehrere mathematische Formeln an den Rand schrieb, in welchen Integralzeichen vorkommen[4]), von denen wir sehen werden, dass sie grade 1675 in Gebrauch genommen wurden, was also eine Bestätigung des Christian von Wolf mitgetheilten Studiendatums in sich schliesst? Oder soll man sich mit der Deutung begnügen, Leibniz werde die Barrowschen

cum ejus Lectiones prodirent, ubi magnam partem meorum theorematum praeceptam vidi.

[1]) Leibniz Briefwechsel, Supplementband S. 186: *cum Barrovianas lectiones vidi (Anno Domini 1675 quantum recordor).* [2]) Leibniz V, 399. [3]) Ebenda V, 232: *Mihi contigit adhuc tironi in his studiis, ut ex uno aspectu cujusdam demonstrationis de magnitudine superficiei sphaericae subito magna lux aboriretur.* [4]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis S. 48.

Lectiones wiederholt gelesen haben, einmal 1673, dann abermals 1675, und beim zweiten Lesen habe er jene Randbemerkungen eingeschrieben?

Wir haben unsere Ueberzeugung, dass Leibniz die Benutzung des unendlich kleinen, einem endlichen Dreiecke ähnlichen Dreieckchen Pascal und nicht Barrow schuldete, zu vertreten gesucht. Schliesslich kommt bei der ganzen Streitfrage wissenschaftlich nichts heraus, und nur die Wahrheitsliebe oder die Verlogenheit Leibnizens steht auf dem Spiel, je nachdem man sich für die eine oder für die andere Meinung entscheidet. Sicher ist unter allen Umständen, dass Leibniz von jenem Dreieckchen, das er gar nicht selbst zuerst angewandt haben will, frühzeitig Gebrauch machte.

Leibniz hatte die gute Gewohnheit, die losen Blätter, auf welchen er seine mathematischen Untersuchungen anstellte, und die in ziemlicher Anzahl in seinem Nachlasse gefunden worden sind, zu datiren. Im August 1673 versuchte er sich schon an einer allgemeinen Tangentenmethode[1]), welche also, wie hervorgehoben werden mag, seinen Ausgangspunkt bildete, während Newton von den Quadraturen her zu Infinitesimalbetrachtungen gelangte. Gleich in diesem ersten Aufsatze wird die Curve als Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachtet, wird die Aehnlichkeit des Dreiecks aus einer dieser unendlich kleinen Seiten und den Differenzen der Abscissen und der Ordinaten ihrer Endpunkte mit dem aus der Tangente, der Subtangente und der Ordinate des Berührungspunktes gebildeten Dreiecke benutzt. Leibniz bezeichnet den unendlich kleinen Abscissenunterschied durch b. Er lässt Glieder, welche b als Faktor enthalten, weg; aber es sei nicht sicher, diese Vielfachen von b sogleich von Anfang an zu verwerfen[2]), sie könnten im weiteren Verlaufe zur Ausgleichung gegen andere Glieder sich als nothwendig erweisen und der Gleichung eine ganz andere Gestalt verleihen. Leibniz hat ferner schon hier das Bewusstsein von der Differenzennatur der unendlich kleinen Katheten des wiederholt genannten Dreieckchens. Die ganze Frage spitzt sich ihm darauf zu, aus der Differenz zweier Ordinaten die Ordinaten selbst zu finden[3]). Er weiss aber auch, dass das umgekehrte Tangentenproblem auf Quadraturen, auf Auffindung von Flächenräumen zurückführbar erscheine[4]). Von diesem Augenblicke an gewinnt auch für Leibniz die Lehre von den

[1]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis S. 55—56. [2]) *non est tutum ipsius infinite parvi b multipla ab initio rejicere.* [3]) *Tota quaestio est, quomodo ex differentiis duarum applicatarum ipsae inveniri queant applicatae.* [4]) *Hinc intelligi potest fere totam doctrinam de methodo tangentium inversa revocabilem videri ad quadraturas.*

Quadraturen erhöhte Wichtigkeit. Zum Theil sehr umfangreiche Entwürfe von October 1674 und Januar 1675, welche aber leider nicht gedruckt sind, scheinen diesen Umschwung über jeden Zweifel zu erheben[1]. Gedruckt ist eine längere Abhandlung, welche in den Tagen vom 25., 26., 29. October, 1. November 1675 entstanden ist[2]. Ueberraschend dürfte für die meisten Leser der Abhandlung das Vorkommen des Wortes *momentum* gleich in den ersten Zeilen und im ganzen Verlaufe der Abhandlung sein.

Das ist ja derselbe Kunstausdruck, dessen Newton sich bediente, um die Augenblicksveränderung der wachsenden Grösse zu benennen, und es war doch wiederholt behauptet worden, Leibniz habe vor seinem zweiten Londoner Aufenthalte, mithin vor October 1676, von der Analysis per aequationes keine Kenntniss gehabt? Wir halten diese Behauptung im vollen Umfange aufrecht. Nur das Wort, nicht der Sinn desselben stimmt bei Leibniz und Newton überein. Leibnizens *momentum* ist der mechanische Begriff des Wortes (Bd. II, S. 524), wie denn auch Leibniz am 25. October nur über die Beziehungen zwischen den Momenten einer Figur mit Rücksicht auf zwei gegebene Gerade, der Fläche der Figur und der Lage ihres Schwerpunktes Untersuchungen anstellte. Er blieb dabei der Hauptsache nach auf dem von Guldin eingeschlagenen Wege (Bd. II, S. 767), und wenn auch Guldin selbst im Texte nicht genannt ist, so ist die *Centrobaryca*, von welcher die Rede ist, gewiss als dessen so betitelte Schrift zu deuten, nicht etwa allgemein als Schwerpunktsuntersuchungen oder dergleichen.

Am 26. October treten die Cavalierischen Gesammtheiten auf. *Omnia w, omn. xw* und dergleichen Ausdrücke kehren fort und fort wieder. Am 29. October 1675 erfolgt der grosse Schritt der Erfindung des neuen Algorithmus[3]. *Utile erit scribi* $\int$ *pro omn. ut* $\int l$ *pro omn. l id est summa ipsorum l*, es wird nützlich sein $\int$ statt *omnia* zu schreiben, um die Summe einer Gesammtheit zu bezeichnen. Hier zeige sich, heisst es in der an demselben Tage geschriebenen Fortsetzung weiter[4], eine neue Gattung des Calcüls: sei dagegen $\int l = ya$ gegeben, so biete sich ein entgegengesetzter Calcül mit der Bezeichnung $l = \frac{ya}{d}$, *nempe ut* $\int$ *augebit, ita d minuet dimensiones.* $\int$ *autem significat summam, d differentiam*, das heisst auf deutsch:

---

[1]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis S. 57—58. [2]) Ebenda S. 117—131. [3]) Ebenda S. 125. [4]) Ebenda S. 126.

Wie nämlich $\int$ die Abmessungen vermehrt, so vermindert sie d. $\int$ aber bedeutet Summe, d Differenz.

Das war ein wesentlich Neues, aus Leibnizens eigenem Geiste entsprungen, und wozu er nirgend die Anregung erhalten konnte, nicht bei Pascal, nicht bei Barrow, nicht in Newtons Analysis per aequationes, wenn Jemand allen Gegenbeweisen zum Trotz darauf beharren wollte, Leibniz habe sie im October 1675 kennen können.

Allerdings besass Newton, wie wir bald sehen werden, muthmasslich seit 1671 Aehnliches, aber es war, wiewohl zur Veröffentlichung bestimmt, für Jedermann ohne irgend eine Ausnahme tiefstes Geheimniss, und für die Wissenschaft als solche, der es gleich gilt, ob dieser, ob jener ihr neue Bahnen bricht, war es ein Glück, dass Leibniz unbeeinflusst die Zeichensprache erfinden durfte.

Sie hat mit anderen Sprachen das gemein, dass sie erst allmälig aus unvollkommenen Anfängen zu immer höherer Ausbildung sich entwickelte, zu immer grösserer Ausbreitung gelangte, ein Gebiet, ein Land nach dem andern erobernd, während der Geist der Sprache unverändert derselbe blieb, während die Begriffe Summe und Differenz stets mit gleicher Deutlichkeit sich erkennen liessen.

Wie allmälig die Sprache sich vervollkommnete, zeigt ein handschriftlich erhaltener in unserem Jahrhunderte zum Druck beförderter Aufsatz vom 11. November 1675 über inverse Tangentenaufgaben, *Methodi tangentium inversae exempla*[1]). Am Anfang ist das $\int$ und das als Nenner eines Bruches auftretende d ganz so wie in den früheren Aufsätzen benutzt. Auf einmal erscheint mitten im Texte dx, und eine Randnote Leibnizens sagt, dx sei das gleiche wie $\frac{x}{d}$, nämlich die Differenz zweier nächstliegender x-Werthe[2]), und noch etwas später[3]) kommt auch dy vor und $\int y\,dy = \frac{y^2}{2}$, also genau so geschrieben, wie es später geblieben ist, während im Aufsatze selbst Zeichen wie $\int x$, $\int\sqrt{x^2+y^2}$ u. s. w. auch nachher neben $\int dx$, $\int dy$ u. s. w. auftreten.

Wir haben das Hauptgewicht auf die Bezeichnung legen zu müssen geglaubt. Das steht in Zusammenhang mit unserer wiederholt ausgesprochenen Ansicht, dass die Infinitesimalbetrachtungen selbst schon vor Newton und Leibniz so weit gediehen waren, dass es hauptsächlich auf die Erfindung einer zweckmässigen Bezeichnung

---

[1]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis S. 132—139. [2]) Ebenda S. 134: *id est differentia inter duas x proximas.* [3]) Ebenda S. 135.

ankam, ehe wesentliche Fortschritte möglich waren. Nunmehr war eine Bezeichnung vorhanden, in unanfechtbarer Selbstständigkeit von Leibniz erfunden.

Etwas anders verhält es sich mit dem Inhalte der in neuer Form niedergeschriebenen Aufsätze Leibnizens vom October und November 1675. Man hat bezüglich desselben Anklagen gegen Leibniz erhoben, die zu erörtern sind. Im September 1675 war Tschirnhaus nach Paris gekommen (S. 108). Ein Brief Oldenburgs vom 30. September bestätigt dessen jüngst erfolgte Abreise und spricht die Vermuthung aus, er werde Leibniz ohne Zweifel schon besucht haben[1]. Leibniz nahm, wie wir gleichfalls schon wissen, den ihm Empfohlenen in seinen vertrautesten Umgang auf. Sie arbeiteten gemeinsam, und am 28. December dankte Leibniz Oldenburg dafür, dass er ihm einen so hoffnungsvollen geistreichen Jüngling zugesandt habe[2]. Nun wurde 1725, nachdem Collins, Leibniz, Tschirnhaus längst gestorben waren, behauptet[3], Collins, der einen Brief Newtons über die Tangentenaufgabe vom 10. December 1672 besass, habe diesen Brief, den Tangentenbrief von 1672, wie er künftig kurz heissen mag, im Mai 1675 an Tschirnhaus gelangen lassen. Tschirnhaus war zwar im Mai 1675 entweder noch gar nicht in London oder erst seit sehr kurzer Zeit. Ferner steht keineswegs fest, ob Tschirnhaus mit Collins bekannt geworden ist. Gleichviel, die Behauptung wurde nun einmal ausgesprochen, als Anklage gegen Leibniz ausgesprochen, und es ist Pflicht sich mit ihr auseinanderzusetzen. Wir kehren deshalb zu Newton zurück, den wir seit seiner Analysis per aequationes nicht weiter in seinen Forschungen begleitet haben.

Eine 1661 in Harlem gedruckte Algebra des holländischen Mathematikers Gerhard Kinckhuysen sollte 1671 durch Newton mit Zusätzen neu herausgegeben werden, und dieser beabsichtigte insbesondere eine grosse Abhandlung unter dem Titel *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* als Einleitung vorauszuschicken[4] (S. 104). Wir haben erzählt, dass die neue Ausgabe Kinckhuysens unterblieb, dass nunmehr die Absicht bestand, die Methodus fluxionum — unter diesem abgekürzten Titel mag künftig die Abhandlung genannt werden — wiederum im Jahre 1671 gemeinschaftlich mit einer Lehre von der Lichtbrechung und den Farben zum Drucke zu befördern. Auch dieses Vorhaben zerschlug sich, wie wir gleichfalls schon wissen. Einwürfe gegen die neue Farbenlehre hatten sich erhoben, welchen Newton nicht begegnen wollte, um nicht in öffentlichen Streit ver

[1]) Leibniz I, 82. [2]) Ebenda I, 84. [3]) Ebenda IV, 419 in der Fussnote.
[4]) *Commerc. epistol.* pag. 81.

wickelt zu werden[1]). Noch später wollte Collins die grosse Abhandlung herausgeben. Er machte diesen Vorschlag der Royal Society am 21. Januar 1680. Sie solle 60 Exemplare fest bestellen, damit der Druck gesichert sei. Nach zweiundeinhalbjährlichem Ueberlegen entschloss sich die Gesellschaft auf die Bedingung einzugehen. Warum der Druck dennoch auch damals unterblieb, ist unbekannt[2]). Endlich 1736, also erst nach Newtons Tode, erschien die nunmehr bereits 65 Jahre alte Abhandlung, sofern man berechtigt ist anzunehmen, es sei in der That seit 1671 keine Aenderung an der sorgsam aufbewahrten Handschrift vorgenommen worden. Wir wollen noch keinen Zweifel in dieser Beziehung erheben und vorläufig die *Methodus fluxionum* von 1736 für übereinstimmend mit der von 1671 halten. Die Ausgabe von 1736 erfolgte durch John Colson in englischer Uebersetzung, Buffon gab dann 1740 eine französische Uebersetzung heraus und Castillon 1744 eine Rückübersetzung ins Lateinische nach Colsons Wortlaut[3]). In der fünfbändigen Gesammtausgabe der Newtonschen Werke, welche Samuel Horsley 1779—1785 veranstaltete, führt die Methodus fluxionum die Ueberschrift *Geometria analytica*.

Newton beginnt mit der Lehre von den Reihenentwicklungen und von der Auflösung der Gleichungen mit einer, beziehungsweise mit zwei Unbekannten, in welchem letzteren Falle die eine insofern als gegeben angesehen wird, als die andere Unbekannte durch eine nach steigenden oder fallenden Potenzen der ersteren geordnete unendliche Reihe ihre Darstellung findet. Hier ist ziemlich genaue Uebereinstimmung mit der Analysis per aequationes. Wie jene vollzieht die Methodus fluxionum die Wurzelausziehungen nur nach den elementaren Regeln der Zahlenarithmetik ohne des binomischen Lehrsatzes sich zu bedienen (S. 68). Hinzugekommen ist das Newtonsche Parallelogramm (S. 102—103). Nach dieser Einleitung wird die doppelte Aufgabe der Fluxionsmethode gestellt[4]). Man soll erstens die Geschwindigkeit einer Bewegung zu einer bestimmten Zeit finden, wenn der durchlaufene Weg jederzeit bekannt ist. Man soll zweitens die Grösse des durchlaufenen Weges finden, wenn die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke bekannt ist. Ist x ein Raum, der in stetiger Weise — gleichsam im Flusse — sich verändert, so nennt man ihn

---

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 127. [2]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes.* London, 1850. pag. XXVIII. [3]) *Opuscula Newtoni* I, 31—199. Wir bedienen uns dieser lateinischen Ausgabe. [4]) Ebenda I, 53—54. *I. Longitudine descripti spatii semper (id est quovis Temporis momento) data, invenire Velocitatem Motus tempore proposito. II. Velocitate Motus semper data, invenire Longitudinum spatii descripti Tempore proposito.*

ein Fluens, und der Name bleibt der gleiche, wenn nicht grade von einem Raume, sondern von irgend sonst Fliessendem die Rede ist, wobei ausser x auch andere Buchstaben vom Ende des Alphabetes, wie y, z, u, zur Bezeichnung dienen können. Die Buchstaben am Anfange des Alphabetes a, b, c etc. bedeuten bekannte und bestimmte Grössen. Die Geschwindigkeiten, nach welchen die einzelnen Fluenten sich verändern, heissen Fluxionen. Sie werden dadurch bezeichnet, dass man über die Fluente noch ein Pünktchen setzt. Demnach sind $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{u}$ die Geschwindigkeiten, mit welchen x, y, z, u sich ändern. Ob Newton Begriff und Name des Fliessens Neper (Bd. II, S. 666), ob er ihn Cavalieri (Bd. II, S. 761) entnahm, dürfte sehr schwer zu entscheiden sein; für Cavalieri spricht die bei diesem vorkommende Participialform *fluens*. Das Pünktchen und der Gegensatz der Wörter **Fluens und Fluxio gehören Newton selbst an.**

In der Methodus fluxionum gibt nun Newton erst eine Regel und Beispiele für die erste Aufgabe, dann den Beweis der Regel. Unser Bericht kehrt die Reihenfolge vielleicht besser um. Moment der Fluente nennt Newton bei Auseinandersetzung der ersten Aufgabe[1]) die unendlich kleinen Theile, um welche sie sich in unendlich kleinen Zeittheilen verändert, also wieder die Augenblicksveränderung, wie in der Analysis per aequationes. Das Moment ist der Geschwindigkeit, der Fluxion, proportional, ist gleich deren Produkt in eine unendlich kleine Grösse dargestellt durch den Buchstaben o, welcher im Druck immer von der Null 0 unterschieden ist. Das Moment von x ist demnach $\dot{x}o$, und das von y, z, u ist $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, $\dot{u}o$. Da die Momente unendlich kleine Incremente[2]) sind, um welche sich die Fluenten in unendlich kleinen Zeittheilchen verändern, so sind die x, y, ... dadurch in $x + \dot{x}o$, $y + \dot{y}o$, $\cdots$ übergegangen, und da die Bewegungsgleichungen in jedem einzelnen Augenblicke Geltung haben sollen, so müssen diese durch die angedeutete Substitution richtig bleiben. Richtiges muss dann auch auftreten, wenn die ursprüngliche Bewegungsgleichung abgezogen wird, Richtiges, wenn man den Rest durch o dividirt. Aber o soll unendlich klein sein, die diesen Buchstaben enthaltenden Glieder dürfen deshalb den anderen gegenüber vernachlässigt werden[3]), und so entsteht eine Regel, welche von den mehrfach besprochenen Tangentenregeln (S. 140) sich so gut wie nicht unterscheidet und darin besteht, dass aus jedem Gliede $ax^m y^n$ der ursprünglichen Gleichung die Gliedersumme

$$max^{m-1}y^n\dot{x} + nax^m y^{n-1}\dot{y}$$

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 59–61. [2]) *incrementa indefinite parva.* [3]) *Termini in eam ducti pro nihilo possunt haberi cum aliis collati: eos igitur negligo.*

wird. Aus der Gleichung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ z. B. entsteht

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} + 3y^2\dot{y} = 0.$$

Brüche mit Veränderlichen im Nenner oder Irrationalitäten, die in der Bewegungsgleichung vorkommen, würden die ganze Regel über den Haufen werfen, wenn Newton nicht durch einen geistreichen, wenn auch vielleicht nicht ganz erlaubten Kunstgriff, der vor ihm nur von Fermat bei dem Rationalmachen von Gleichungen (Bd. II, S. 733) angewandt worden war, den aber Newton schwerlich dorther kennen gelernt haben kann, Abhilfe getroffen hätte. Sei etwa die Gleichung

$$x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - x^2\sqrt{ay} + x^2 = 0$$

gegeben[1]), so setze man $\frac{by^3}{a+y} = z$ und $x^2\sqrt{ay} + x^2 = u$. Diese beiden Annahmen lassen sich auch in der Form

$$az + yz - by^3 = 0, \quad ax^4y + x^6 - u^2 = 0$$

anschreiben, während die ursprüngliche Gleichung die Gestalt

$$x^3 - ay^2 + z - u = 0$$

annimmt. Die drei neuen Gleichungen liefern in der Reihenfolge, in der wir sie genannt haben, nach der nunmehr anwendbaren Regel behandelt, folgende Ergebnisse:

$$a\dot{z} + y\dot{z} + z\dot{y} - 3by^2\dot{y} = 0, \quad 4ax^3y\dot{x} + ax^4\dot{y} + 6x^5\dot{x} - 2u\dot{u} = 0,$$
$$3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0.$$

Eliminirt man zwischen ihnen $\dot{z}$ und $\dot{u}$, so entsteht:

$$3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \frac{3by^2\dot{y} - z\dot{y}}{a+y} - \frac{4ax^3y\dot{x} + ax^4\dot{y} + 6x^5\dot{x}}{2u} = 0,$$

in welche Gleichung man endlich rückwärts die Werthe von z und u einsetzt, um die verlangte Gleichung zwischen x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, zu erhalten.

Nun kommt die zweite Aufgabe an die Reihe, welche den Uebergang von den Fluxionen zu den Fluenten zum Ziele hat[2]). Die Regel ist die umgekehrte wie vorher. Aus $max^{m-1}y^n\dot{x}$ wird ax^my^n, und wenn in der Gleichung $nax^my^{n-1}\dot{y}$ gleichfalls vorkommt, welches wieder zu ax^my^n führt, so darf dieses Glied in der Endgleichung gleichwohl nicht mehrmals, sondern nur einmal geschrieben werden. Newton fühlte hier nicht, dass die richtige Bemerkung einen Folgesatz forderte dahin gehend, dass seine Regel, die er freilich eine *Solutio peculiaris*, eine in besonderen Fällen zutreffende nennt, nur dann Geltung habe, wenn in der Fluxionsgleichung neben $max^{m-1}y^n\dot{x}$ das Glied $nax^my^{n-1}\dot{y}$ auch wirklich auftrete. Es ist ganz richtig her-

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 57—58. [2]) Ebenda I, 61.

vorgehoben worden[1], dass der Rückschluss von

$$x^3\dot{x} - 3x^2y\dot{x} + xy^2\dot{y} - y^3\dot{y} = 0$$

auf

$$\frac{x^4}{4} - x^3y + \frac{xy^3}{3} - \frac{y^4}{4} = 0$$

falsch ist. Richtig wäre er nur, wenn die Fluxionsgleichung auch noch die Glieder $-x^3\dot{y} + \frac{y^3\dot{x}}{3}$ in ihrem Gleichungspolynome enthielte.

Wir sind weit entfernt, diesen und andere Fehler, welche in den Newtonschen Integrationsregeln vorkommen, ihm als Verbrechen anrechnen zu wollen. Auch bei Leibniz hätten wir bei eingehender Prüfung des materiellen Inhaltes seiner älteren Papiere auf die gröbsten Unrichtigkeiten hinweisen müssen, kaum dadurch entschuldbar, dass es Arbeitsnotizen und nicht druckfertige Ausarbeitungen waren, welche dieselben offenbaren. Das ist nun einmal nicht anders bei den ersten Gehversuchen auf nie betretenem Boden, als dass man strauchelt. Wir betonen die Mängel vielmehr in dem Sinne, dass sie uns bis zu einem gewissen Grade als Datirung dienen. Nach 1700 etwa hätten weder Newton noch Leibniz solche Fehler begangen, und so glauben wir besonders in der hervorgehobenen Stelle einen Beleg dafür zu besitzen, dass Newton die Methodus fluxionum nachmals nicht ganz umarbeitete, mag er auch einzelne Veränderungen sich nicht versagt haben.

Eine grosse Unklarheit steckt auch in der Bemerkung Newtons[2], die gegebene Fluxionsgleichung müsse nach den auftretenden Fluxionen homogen sein, und wenn das nicht von selbst der Fall sei, müsse man Fluxionen einer weiteren Grösse als Factoren hinzudenken und diese als Einheiten betrachten. So gewinne

$$\dot{x} + x\dot{x}y - ax^2 = 0$$

nur dann einen Sinn, wenn man die Umwandlung in

$$\dot{x}\dot{z} + x\dot{x}y - ax^2\dot{z}^2 = 0$$

vornehme.

Was soll, hat man ganz richtig gefragt, dieses $\dot{z}$, was soll z selbst bedeuten? Newton ging von Bewegungserscheinungen aus. Jede Fluente und jede Fluxion hatte für ihn einen bestimmten mechanischen Sinn. Durfte er schon oben bei der ersten Aufgabe z und u als blosse Abkürzungen einführen? Durfte er vollends hier bei der zweiten Aufgabe eines gar nicht definirten $\dot{z}$ sich so bedienen, wie er es that?

[1]) Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis u. s. w. S. 33.
[2]) *Opuscula Newtoni* I, 63. Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis u. s. w. S. 34.

Newton blieb bei der *Solutio peculiaris* der zweiten Aufgabe nicht stehen. Er lehrte vielmehr jede Fluxionsgleichung auf die Gestalt zurückführen, dass die Fluxionen nur in Quotientenform — eine Fluxion durch eine andere dividirt — auftreten und unterschied sodann drei Gattungen[1]). In der ersten Gattung sollen zwei Fluxionen, aber nur eine Fluente vorkommen; wie würden heute schreiben $y' = F(x)$ oder $y' = F(y)$. In der zweiten Gattung sollen zwei Fluxionen und beide Fluenten vorkommen; wir würden heute schreiben $y' = F(x, y)$. In der dritten Gattung sollen mehr als zwei Fluxionen vorkommen; das sind die heutigen partiellen Differentialgleichungen.

Das Mittel, welches Newton ganz allgemein anwandte, um von der Fluxionsgleichung zur Gleichung zwischen den Fluenten zurückzukehren, ist das der Entwickelung der Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen in unendliche nach Potenzen der Fluenten fortlaufende Reihen. Unbequem ist ihm dabei selbstverständlich das Auftreten von Gliedern wie $\frac{a}{x}$, denn wenn beim Aufsteigen von der Fluxion zur Fluenten aus $max^{m-1}y$ zu $ax^m y^n$ oder aus $ax^{m-1}y$ zu $\frac{ax^m y^n}{m}$ übergegangen werden muss, so führt dieses Verfahren von $\frac{a}{x}$ oder ax^{-1} zu $\frac{a}{0}$ d. h. zu einem unendlich Grossen. Newton schreibt vor[2]), man solle alsdann das $\frac{a}{x}$ durch ein $\frac{a}{b+x}$ oder ein $\frac{a}{b-x}$ ersetzen und diesen Ausdruck durch Division in eine Reihe verwandeln; an eine Rechtfertigung dieser Willkür scheint er nicht gedacht zu haben. Doch ist damit noch nicht der Gipfelpunkt willkürlichen Verfahrens erreicht. Solches ist vielmehr bei der Behandlung des dritten Falles geschehen, wo Newton bei mehr als zwei vorkommenden Fluxionen mit einer einzigen Gleichung nicht ausreicht. Bei λ Fluxionen muss er $\lambda - 1$ Gleichungen haben; gegeben ist ihm eine Gleichung; weitere $\lambda - 2$ Gleichungen werden beliebig angenommen[3]). Anders ausgedrückt: Newton weiss mit von einander unabhängigen Veränderlichen sich nicht zu helfen und setzt deshalb diese ihm unbequemen Grössen durch hinzugenommene Bedingungen in ein Abhängigkeitsverhältniss von einander.

Bei der Behandlung des zweiten Falles ($y' = F(x, y)$) wird die Funktion von x und y, welche in Newtonscher Schreibweise dem Quotienten $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ gleich war, in eine nach Potenzen von x fortschreitende

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 66. [2]) Ebenda I, 70. [3]) Ebenda I, 83: *Si trium quantitatum fluxiones adsunt, una aequatio assumenda est, duae aequationes, si quatuor insunt fluxiones, atque ita porro, ita ut aequatio proposita tandem in aliam transformetur, in qua sint duae fluxiones tantummodo.*

Reihe verwandelt, zu deren Bildung ein Verfahren angegeben ist, welches Newton nicht näher begründet, aber dessen Zusammenhang mit der Methode der unbestimmten Coefficienten sofort zu erkennen ist[1]. Sei

$$\frac{y}{x} = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2 y$$

vorgelegt. Man nimmt an

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \text{ u. s. w.}$$

Dann ist

$$\frac{y}{x} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \cdots$$

und setzt man den angenommenen Werth von y in

$$2 + 3x - 2y + x^2 + x^2 y$$

ein, so ist andererseits auch

$$\frac{y}{x} = 2 + 3x + x^2 + (x^2 - 2)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots)$$
$$= (2 - 2A_0) + (3 - 2A_1)x + (1 + A_0 - 2A_2)x^2 + \cdots.$$

Die beiden Reihen für $\frac{y}{x}$ müssen gleiche Coefficienten besitzen, d. h. es muss sein

$$A_1 = 2 - 2A_0, \quad 2A_2 = 3 - 2A_1, \quad 3A_3 = 1 + A_0 - 2A_2 \text{ u. s. w.}$$

Alle A können dadurch von A_0 abhängig gemacht werden, und setzt man für A_0 irgend einen bestimmten Werth, so erhält man eine Reihenentwickelung von y, eine von unendlich vielen, je nach der für A_0 getroffenen Wahl. Newton war sich dieser Unbestimmtheit auch voll bewusst[2].

Waren die beiden ersten Aufgaben, von deren Bearbeitung in der Methodus fluxionum wir bisher gesprochen haben, die Auffindung einer Fluxionsgleichung, wenn die gegenseitige Beziehung der Fluenten zu einander — das was wir oben Bewegungsgleichung nannten — gegeben war, und die Herleitung der Bewegungsgleichung aus der Fluxionsgleichung, so fordert die dritte Aufgabe die Auffindung grösster oder kleinster Werthe[3]. Eine Grösse, welche Maximum oder Minimum ist, sagt Newton, kann in dem Augenblicke, in welchem sie diesen besonders gearteten Werth annimmt, weder nach der einen noch nach der anderen Seite hin im Flusse befindlich sein, denn sonst wäre, wenn es um ein Maximum sich handelt, ein noch grösserer, wenn es um ein Minimum sich handelt, ein noch kleinerer Werth

[1] Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis u. s. w. S. 36—39.
[2] *Opuscula Newtoni* I, 79: *Hic obiter animadvertendum est, quod inter infinitas solutiones, quibus aequatio potest enodari etc.* [3] Ebenda I, 86—88.

vor oder nach dem betreffenden Punkte vorhanden. Daraus ergibt sich die Nothwendigkeit die Fluxion zu suchen und gleich Null zu setzen, und daraus eine Regel, welche mit der von Hudde herrührenden (Bd. II, S. 841) übereinstimme[1]). Aus

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

folgt

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

Mittels $\dot{x} = 0$ erhält man $ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$, beziehungsweise $3y^2 = ax$, und diese Gleichung in Verbindung mit der ursprünglich gegebenen lässt die gewünschten Werthe von x und y auffinden. Ein Kriterium dafür zu suchen, ob die ermittelten Werthe von x und y wirklich ein Maximum oder ein Minimum und welches von beiden sie liefern, fällt auch Newton noch nicht ein.

Die vierte Aufgabe ist die der Tangentenziehung[2]). Bei ihrer Betrachtung hat Newton den nur von Fermat fast verstohlenerweise angedeuteten (Bd. II, S. 745, Note 2) Fortschritt vollzogen, dass die Ordinaten der Curve (Figur 31) nicht mehr senkrecht zu den Abscissen gezeichnet sind[3]). Wird die Ordinate BD in die unendlich nahe Lage bewegt, so dass sie um die Augenblicksveränderung cd zunimmt, während AB um die Augenblicksveränderung $Bb = Dc$ wächst, so findet in Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke dcD und DBT die Proportion statt

Fig. 31.

$$TB : BD = Dc \quad (\text{oder } Bb) : dc.$$

Die Beziehung zwischen DB und AB geht aus der Curvengleichung hervor. Aus ebenderselben erhält man nach den Vorschriften der ersten Aufgabe das Verhältniss der Fluxionen von AB und BD, und dieses Verhältniss lässt TB bei gegebenem BD finden. Alsdann berührt DT die Curve in D.

Ueber die Inflexion hatte Newton unklare Vorstellungen[4]). Er meint an einer Stelle in dem Punkte D sei ein Uebergang von einem convexen zu einem concaven Curventheile[5]), wenn AT (mithin auch BT oder die Subtangente) einen kleinsten Werth besitze. Er meint an einer zweiten Stelle, im Inflexionspunkte sei die Neigung

[1]) *Hinc deduci potest notissima regula Huddenii.* [2]) *Opuscula Newtoni* I, 89. [3]) *Ordinata faciens angulum quemvis datum cum alia recta AB quae Basis est vel Abscissa.* [4]) Ebenda I, 91 und 103. [5]) *punctum quod separat partem convexam a concava.*

der Tangente zur Abscisse ein Maximum oder Minimum. Letztere Betrachtung ist ziemlich richtig, sofern das Maximum oder Minimum der ersten Ableitung der Ordinate nach der Abscisse nur dann eintreten kann, wenn die zweite Ableitung Null ist.

Andere Methoden der Tangentenbestimmung, acht an der Zahl, folgen, auf welche wir nicht näher eingehen.

In der fünften Aufgabe wird die Grösse der Krümmung[1]), welche irgend eine Curve in einem bestimmten Punkte besitzt, untersucht. Kreise, heisst es, hätten an allen Stellen eine und dieselbe Krümmung, und bei verschiedenen Kreisen stehe dieselbe im reciproken Verhältnisse der Durchmesser. Eine andere Curve, d. h. eine solche, die kein Kreis ist, kann in einem Punkte durch sehr viele Kreise von der concaven Seite her berührt werden. Ist einer dieser Berührungskreise so beschaffen, dass kein anderer innerhalb dessen Contingenzwinkel mit der Curve verläuft, so könne man von ihm sagen, er habe im Berührungspunkte die gleiche Krümmung wie die Curve, sein Mittelpunkt sei dann Krümmungsmittelpunkt, sein Halbmesser Krümmungshalbmesser der Curve[2]). Dieser sei, heisst es, das zwischen dem Krümmungsmittelpunkte und der Curve gelegene Stück der zur Curve senkrecht gezogenen Geraden. Ziehe man in drei Curvenpunkten Senkrechte zur Curve, so schneidet die Senkrechte im mittleren Curvenpunkte die beiden anderen in zwei Punkten, die um so näher zusammenfallen, je näher die Curvenpunkte bei einander liegen. Werden die drei Curvenpunkte zu einem, die drei Senkrechten mithin auch zu einer, so ist nur ein Durchschnittspunkt der Senkrechten vorhanden, und dieser ist der Krümmungsmittelpunkt, was von selbst offenbar ist[3]). Newton geht sodann zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers über. Die Curve ADd (Figur 32) ist auf die Abscisse $AB = x$ und die zu ihr senkrechte Ordinate $BD = y$ bezogen. TD ist die Berührungslinie in D, DC und dC sind unendlich nahe bei einander liegende Senkrechte zur Curve, die im Krümmungsmittelpunkte C einander schneiden. Cg ist ein auf der Ordinate von C beliebig angenommenes

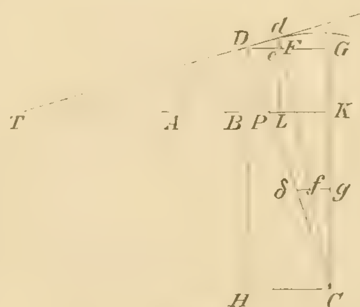


Fig. 32.

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 104—125: *Quantitas curvaturae.* [2]) *Centrum curvaturae, radius curvaturae.* [3]) *Quod per se patet.*

und als Längeneinheit gewähltes Stück. Die übrigen Stücke der Figur bedürfen keiner besonderen Erläuterung, da der Augenschein zeigt, welche Geraden der Abscisse, welche der Ordinate parallel laufen. Die Proportion ergibt sich leicht

$$Cg : g\delta = BT : BD = De : de = \dot{x} : \dot{y},$$

denn es ist De die Augenblicksveränderung $\dot{x} \cdot o$ der Abscisse, de die $\dot{y} \cdot o$ der Ordinate, und diese Augenblicksveränderungen verhalten sich wie die Fluxionen. Setzt man ausser $Cg = 1$, was schon ausgesprochen worden ist, noch $g\delta = z$, so ist aus jener Proportion $1 : z = \dot{x} : \dot{y}$, d. h. $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\cdot$ Der Uebergang von D zum benachbarten Punkte d lässt δf als Augenblicksveränderung von z, d. h. als $\dot{z} \cdot o$ erkennen. In dem bei d rechtwinkligen Dreiecke DdF ist $de^2 = De \cdot eF$, mithin $eF = \frac{de^2}{De} = \frac{\dot{y}^2 \cdot o^2}{\dot{x} \cdot o} = \frac{\dot{y}^2 \cdot o}{\dot{x}}$, und

$$DF = De + eF = \dot{x} \cdot o + \frac{\dot{y}^2 \cdot o}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}} \cdot o.$$

Ferner verhält sich

$$\delta f : DF = Cg : CG \text{ oder } \dot{z} \cdot o : \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}} \cdot o = 1 : CG$$

und somit hat man $CG = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}}\cdot$ Des Weiteren ist

$$GD : CG = \delta g : Cg \text{ oder } GD = \frac{CG \cdot \delta g}{Cg} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}} \cdot z.$$

Man sucht aber CD, und zu dessen Auffindung dient

$$CD^2 = CG^2 + GD^2 = \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}}\right)^2 (1 + z^2).$$

Newton wählt nunmehr $\dot{x}$ als Fluxionseinheit. Dadurch wird $z = \frac{\dot{y}}{1} = \dot{y}$

$$\text{und } CD^2 = \left(\frac{1 + z^2}{\dot{z}}\right)^2 (1 + z^2) \text{ und } CD = \frac{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{z}}\cdot$$

Das Interessanteste an der ganzen Entwicklung ist offenbar die Darstellung des Fluxionsquotienten $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ durch eine Strecke z, welche es möglich macht, die Fluxion des Fluxionsquotienten in Rechnung zu bringen.

Vergleicht man die Betrachtungen (S. 137), welche Huygens bei Aufsuchung des Krümmungshalbmessers anstellte, so ist anzuerkennen, dass Newtons Weg ein durchaus anderer, und zwar der gangbarere war, ganz abgesehen davon, dass Huygens an Krümmungsverhältnisse nicht dachte, sondern nur darin mit Newton übereinstimmte, dass er die Entfernung eines Curvenpunktes von dem Punkte

suchte, in welchem zwei consecutive Normalen, deren eine die an den betreffenden Curvenpunkt ist, einander schneiden.

Um so auffallender ist die ungemeine Aehnlichkeit zwischen den weiteren Folgerungen beider Schriftsteller. Newton sucht als Beispiel für seine Regel den Krümmungsmittelpunkt der Hyperbel, der Cissoide, der Conchoide, der Trochoide, welche letztere auch Cycloide heisse. Bei letzterer bemerkt er plötzlich[1]) das Vorhandensein der Curve der Krümmungsmittelpunkte, welche selbst eine Cycloide sei. Er bemerkt, dass die Normalen an die eine Cycloide Berührungslinien der anderen sind. Er dreht die Figur um, so dass die Cycloiden ihre Wölbung nach unten haben. Er bildet eine cycloidale Pendelvorrichtung. Er benutzt die Pendelfigur zur Rectification der Cycloide, er spricht davon, dass der Pendelfaden um die obere Cycloide sich herumwickle[2]). Er wählt alsdann andere Curven als Beispiel. Von einer Curve der Krümmungsmittelpunkte ist bei ihnen keine Rede, aber in einem Anhange von wenigen Zeilen, welchen wir deshalb vollständig mittheilen, kommt er auf die Frage zurück.

„V. Den Ort der Krümmungsmittelpunkte zu bestimmen, oder die Curve zu beschreiben, auf welcher dieser Mittelpunkt sich immer befindet. Wir haben oben gezeigt, dass der Krümmungsmittelpunkt der Trochoide immer auf einer anderen Trochoide gefunden wird. Nicht anders liegt der Krümmungsmittelpunkt der Parabel auf einer anderen Parabel aber zweiten Geschlechtes, welche durch die Gleichung $ax^2 = y^3$ ausgedrückt wird, wie die Rechnung leicht zeigt“[3]).

Wir verweisen unsere Leser auf den Bericht über den dritten Theil des *Horologium oscillatorium* (S. 134—138) und knüpfen daran die Frage, ob es denkbar ist, dass hier lauter zufällige Uebereinstimmungen uns entgegentreten? Newton sollte ganz zufällig nur bei den beiden Curven, welche Huygens genauer behandelte, die Gleichung der Krümmungsmittelpunktscurven gesucht haben? Er sollte, während nirgend sonst in der Methodus Fluxionum von einem Pendel die Rede ist, grade auf die cycloidale Vorrichtung verfallen sein, auf das Herumwickeln des Fadens *(filum circumvolutum)*? Er sollte ganz von selbst in der zehnten Aufgabe, beliebige Curven zu finden, deren Länge in einem geschlossenen Ausdrucke darstellbar sei[4]), gleich Huygens die Evoluten bekannter Curven gesucht haben und diese als rectificirbar bezeichnen?

Uns kommt ein solcher sich fortsetzender Zufall als mehr als überraschend vor. Wir können die Vermuthung nicht unterdrücken,

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 112—114. [2]) *Totum filum circumvolutum fuit trochoidis perimetro.* [3]) Ebenda I, 123—124. [4]) Ebenda I, 178—185.

Newton habe diese Stellen der Methodus fluxionum erst geschrieben, nachdem er das Horologium oscillatorium gelesen hatte, und ein weiterer gewichtiger Grund für diese Annahme wird uns im 90. Kapitel bekannt werden.

Wenn wir also auch weit entfernt davon sind, die (S. 165) ausgesprochene Ueberzeugung, dass Newton die Methodus Fluxionum von 1671 nachmals nicht ganz umarbeitete, wieder zurücknehmen zu wollen, so kommen wir doch zu der nicht minder festen Ueberzeugung, jene Abhandlung habe eine theilweise Umarbeitung nach 1673, als dem Jahre, in welchem das Horologium oscillatorium im Drucke erschien, erfahren. Wie viel später als 1673 die Veränderungen vorgenommen wurden, wie weit sie sich erstreckten, darüber ist uns jede Auskunft unmöglich und nur eine Folgerung bleibt bestehen: wenn die Methodus fluxionum nach 1671 Veränderungen erfuhr, so fällt damit ihre Beweiskraft für das Wissen Newtons in jener frühen Zeit.

Wir müssen suchen, andere zuverlässigere Zeugnisse uns zu verschaffen, Schriftstücke, welche mit Zeitangabe versehen, früh genug aus Newtons Händen in die anderer Gelehrten übergingen, um die Bürgschaft zu gewähren, dass sie so geblieben sind, wie sie von Anfang an geschrieben waren.

90. Kapitel.

Newton und Leibniz bis 1687.

Mit dem Vorbehalte gleich wieder auf frühere Zeiten zurückzugreifen, beginnen wir mit einem Bruchstücke eines Briefes, den Leibniz am 12. Mai 1676 von Paris aus an Oldenburg schrieb[1]. Von Infinitesimalrechnung ist zwar darin nicht die Rede, aber Leibniz erkundigte sich hier zum ersten Male nach den von den Engländern benutzten Methoden.

Ein in Geometrie und Analysis wohl bewanderter Däne, Georg Mohr, war über England nach Paris gekommen und hatte Leibniz mitgetheilt, Collins sei in Besitz der Reihenentwicklungen

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \text{etc.}$$

und

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \text{etc.}$$

Leibniz fragt nach dem Beweise dieser Sätze. Er selbst habe, wie

[1]) Leibniz I, 88.

aus seinen früheren Briefen an Oldenburg erhelle, Aehnliches gleichfalls ohne Beweis schon längere Zeit in Erwägung gezogen. Er schreibe gegenwärtig seine Beweise auf und werde sie gegen Einsendung der englischen Beweise an Oldenburg gelangen lassen.

Oldenburg antwortete[1] am 26. Juli 1676. Zunächst gab er Auskunft über die Coefficienten der Arcussinusreihe, dann über einige andere Reihen. Er erzählte weiter als vorläufig wissenswürdig, dass Newton ihm und Collins unter dem 10. December 1672 eine Methode der Tangentenziehung an geometrische Curven mitgetheilt habe, welche ihren Ausgang von der Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate der Curve nehme. Eigentlich sei es nur ein Zusatz zu einer allgemeinen Methode, welche ohne beschwerliche Rechnung nicht nur das Tangentenproblem in grösster Allgemeinheit erledige, sondern auch andere verborgene Probleme über die Art wie Curven gebogen sind[2]), über Flächeninhalte, Längen, Schwerpunkte u. s. w. Die Methode, so fahre Newton fort, sei nicht gleich Huddes Methode der grössten und kleinsten Werthe oder De Sluses Tangentenmethode auf Gleichungen beschränkt, in welchen Irrationalitäten nicht vorkommen. Das ist Alles, was Oldenburg an Leibniz über jenen Newtonschen Brief vom 10. December 1672 schrieb. Von einem bestimmten Beispiele vollends ist durchaus nicht die Rede.

Gehen wir nun zu Newtons Brief selbst zurück, zu dem Tangentenbrief von 1672, wie wir ihn (S. 161) genannt haben. Er ist seit 1712 dem Drucke übergeben[3]), und wir werden ihn namentlich in der Richtung zu durchmustern haben, ob und was er allenfalls mehr enthielt, als was schon in der *Analysis per aequationes* gestanden hatte, ob er etwa den Inhalt der *Methodus fluxionum* andeutete? Was finden wir nun? Versprechungen, was mittels der neuen Methode geleistet werden könne, welche Oldenburg zum Zwecke seiner Mittheilung an Leibniz fast wörtlich abschrieb! Oldenburg veränderte nur ein Wort, wo es um die Krümmungsverhältnisse sich handelte. Er schrieb *de curvarum flexu*, während Newton *de curvitatibus* gesagt hatte. Ausserdem findet sich im Tangentenbriefe ein einziges Beispiel. Es lautet folgendermassen. Sei

$$x^3 - 2x^2y + bx^2 - b^2x + by^2 - y^3 = 0$$

die vorgelegte Curvengleichung. Man soll ihre Glieder mit irgend einer arithmetischen den Abmessungen von y gemäss verlaufenden Zahlenreihe multipliciren[4]), etwa mit 0, 1, 0, 0, 2, 3, dann mit einer

[1]) Leibniz I, 88—99. [2]) *De curvarum flexu.* [3]) *Commerc. epistol.* pag. 83—84. Vergl. auch *Opuscula Newtoni* I, 297—298. [4]) *Multiplica aequationis terminos per quamlibet progressionem arithmeticam juxta dimensiones y.*

anderen den Abmessungen von x sich anschliessenden, etwa mit 3, 2, 2, 1, 0, 0. Das erste Produkt werde der Zähler, das zweite, nachdem man es zuvor durch x dividirt habe, der Nenner eines Bruches sein, der die Subtangente darstelle. Diese sei also $\frac{-2x^2y + 2by^2 - 3y^3}{3x^2 - 4xy + 2bx - b^2}$. Das Ergebniss unserer Durchmusterung ist also: kein Kunstausdruck, keine Bezeichnung, keine Curvengleichung mit Irrationalitäten oder mit in einem Nenner auftretenden Unbekannten, überhaupt ein kaum nennenswerther Fortschritt über das hinaus, was die von Newton erwähnten Schriftsteller längst geleistet hatten; insbesondere Hudde hatte bei seinem Verfahren zur Bestimmung grösster und kleinster Werthe nahezu Uebereinstimmendes gelehrt.

Wir haben (S. 161) bemerkt, es sei nichts weniger als ausgemacht, dass Tschirnhaus, als er im Spätjahr 1675 zu Leibniz kam, den Tangentenbrief kannte, aber möge er sogar eine Abschrift davon besessen und diese Leibniz zur Verfügung gestellt haben, lernen konnte Leibniz daraus so gut wie nichts, lernen auch nicht aus dem Briefe Oldenburgs vom 26. Juli 1676. Er konnte höchstens die Anregung finden, nun auch seinerseits nach einem Verfahren zu forschen, welches durch Irrationalitäten in der Curvengleichung nicht in seiner Ausführbarkeit behindert werde.

Nun lag allerdings dem Briefe Oldenburgs vom 26. Juli 1676 ein langer für Leibniz bestimmter Brief Newtons bei[1]). In diesem Briefe, von welchem schon (S. 75) die Rede war, und den man nicht mit demjenigen vom 24. October 1676 (S. 64) verwechseln darf, gab Newton das Gesetz seiner Binomialreihe an, gab er seine numerische Gleichungsauflösung, seine Darstellung der einen Unbekannten einer zwei Unbekannte enthaltenden Gleichung in Gestalt einer nach Potenzen der anderen fortschreitenden Reihe. Er gab auch einige durch Reihen vollzogene Rectificationen und Quadraturen, aber überall wurden nur Ergebnisse mitgetheilt. Von Ableitungen oder Beweisen ist nichts zu finden. Das Wie der Ermittelung zu beschreiben, meint Newton, wäre allzu weitläufig[2]). Leibniz beantwortete die Briefe Oldenburgs und Newtons am 27. August 1676 und auch von diesem Antwortschreiben[3]) war (S. 76) die Rede. Wir erörterten damals, dass in Leibnizens Briefe die Transmutation eine Rolle spielte, d. h. eine Quadratur, welche Flächenelemente von einer gewissen Gestalt durch solche von anderer Art ersetzte, aber dass Leibniz sehr deutlich gesprochen hätte, kann kein Mensch behaupten, und wenn

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 307—322 und Leibniz I, 100—113. [2]) *Quomodo determinantur nimis longum foret describere* (Leibniz I, 106, *Opuscula Newtoni* I, 314). [3]) Leibniz I, 114—122.

mit unendlich kleinen Strecken β gerechnet wurde, so lag darin nichts irgend Neues.

Nur eine Stelle des Briefes mochte Newton auffallen. Dort hiess es[1]: „Wenn Ihr sagt, die meisten Schwierigkeiten liessen sich durch unendliche Reihen erledigen, so will mir das nicht recht scheinen. Vieles Wunderbare und Verwickelte hängt weder von Gleichungen noch von Quadraturen ab. So z. B. die Aufgaben der umgekehrten Tangentenmethode, von welchen auch Descartes eingestand, der er sie nicht in seiner Gewalt habe.“ Leibniz nannte als besonderes Beispiel die Beaune'sche Aufgabe (Bd. II, S. 782). Was Descartes und Beaune nicht hätten leisten können, das habe er, Leibniz, mit Hilfe einer gewissen Analysis innerhalb einer Stunde vollendet. „Ich gestehe jedoch, fuhr er dann fort, dass ich noch nicht erreicht habe, was auf diesem Gebiete wünschenswerth ist, wiewohl ich weiss, dass es von höchstem Gewichte wäre.“

Vielleicht grade mit Rücksicht auf diese Aeusserung sprach Newton am 26. October 1676 an Oldenburg von Leibnizens trefflichem Briefe[2], suchte er am 8. November Collins zu überzeugen, dass Leibnizens Methode weder allgemeiner noch leichter sei, als seine eigene[3].

Aber inzwischen war Leibniz in London gewesen, wo dieser sein zweiter Aufenthalt etwa acht Tage währte. Leibniz hat damals Collins kennen gelernt, und es ist zu vermuthen, dass es bei dieser Gelegenheit war, dass er die Analysis per aequationes las und die Aufzeichnungen sich machte, welche unter der Ueberschrift „Auszüge aus einer handschriftlichen Abhandlung Newtons“[4]) in Leibnizens Nachlasse gefunden worden sind. In diesen Aufzeichnungen ist namentlich der Abschnitt *De resolutione aequationum affectarum*, also die Darstellung von y in einer nach Potenzen von x geordneten Reihe unter Zugrundelegung einer Gleichung zwischen x und y in einem Maasse berücksichtigt, dass man fast von einer Abschrift sprechen kann. In denselben Aufzeichnungen kommt das am 29. October 1675 erfundene Integralzeichen (S. 159) vor. Es ist nicht ersichtlich, wann anders als während des zweiten Londoner Aufenthaltes Leibniz den handschriftlichen Aufsatz Newtons zur Verfügung gehabt haben sollte.

Eines dürfen wir dabei hervorheben: dass Collins die Sache jedenfalls sehr unverfänglich fand, denn in einem Briefe an Newton

---

[1]) Leibniz I, 121–122. [2]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes*, pag. 257: *excellent letter*. [3]) Ebenda pag. XXVIII. [4]) Leibniz I, 7: *Excerpta ex tractatu Newtoni Msco.*

vom März 1677, in welchem Einzelheiten über Leibnizens Besuch mitgetheilt sind[1]), steht nichts davon, dass er sich die Analysis per aequationes genau angesehen habe. Ebenso war gewiss Leibniz selbst sich keines Unterschleifes oder Unrechtes irgend einer Art bewusst, welches er mit Anfertigung des Auszuges begangen haben könnte, denn sonst hätte er ihn sicherlich nicht aufbewahrt, nachdem ein heftiger Streit grade über die Erfinderrechte am neuen Algorithmus sich erhoben hatte.

Leibniz war nämlich so ganz heikel nicht bei Anwendung von Mitteln, welche in einem Streite gute Dienste leisten können. Der XVII. Abschnitt wird uns nöthigen, von beiden grossen Männern, von Leibniz wie von Newton, Dinge zu erzählen, welche der blosse Bewunderer, wenn er nicht die Pflichten des Geschichtsschreibers zu erfüllen hätte, am liebsten verschwiege und jetzt schon müssen wir auf Eines aufmerksam machen. Wir haben (S. 160) von einem Aufsatze vom 11. November 1675 gesprochen, in welchem Leibniz $\int y\,dy = \frac{y^2}{2}$ geschrieben hat, mithin derjenigen Bezeichnung sich bediente, welche seitdem die mathematische Welt erobert hat. Mit der Datirung dieses Aufsatzes ist ein Fälschungsversuch vorgenommen worden[2]). Man hat sie in 1673 umändern wollen. Der obere Zug der 5 ist wegradirt und dafür mit schwärzerer Tinte der obere Zug von 3 gesetzt worden. Man wird schwerlich gegen einen Anderen als gegen Leibniz selbst den Vorwurf dieser versuchten Rückdatirung erheben können.

Aber dass man die Veränderung erkannte, zieht noch zwei Folgerungen nach, welche wir auszusprechen nicht unterlassen. Erstens wird, nachdem die einmal versuchte Aenderung beobachtet war, sicherlich auch den übrigen vorhandenen Jahreszahlen nochmalige Beachtung gewidmet worden sein, und der Mangel jeder Bemerkung über sie beweist ihre volle Unanfechtbarkeit. Zweitens bestätigt die Aenderung von 5 in 3 die nicht mehr zu bezweifelnde Echtheit der ersteren Zahl. Am 11. November 1675, das steht nunmehr fester als je, war Leibniz im Besitze seiner Bezeichnung.

Eine der Aufgaben, welche er damals löste, und zwar deren erste, war die Auffindung der Curve, deren Subnormale, wie wir heute sagen, der Ordinate umgekehrt proportional sei. Die Subnormale nennt Leibniz w, die Subtangente t, die Differenz zweier nächsten Abscissen z (anstatt des späteren dx). Er weiss aus früheren Versuchen[3]),

[1]) Leibniz I, 147 flg. [2]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis. S. 132 Fussnote. [3]) *Constat ex alibi a me demonstratis.*

dass $\int wz = \frac{y^2}{2}$, was seine Richtigkeit hat. Die Subnormale ist ja $y \cdot y'$, also $\int wz = \int yy'dx = \int y\,dy = \frac{y^2}{2}$. Nun, schliesst Leibniz weiter, müsse $wz = d\left(\frac{y^2}{2}\right) = y$ sein, indem er den Faktor dy entweder einfach vergass, was keineswegs unmöglich ist, oder aber ihn als Einheit betrachtete. Der Voraussetzung gemäss solle $w = \frac{b}{y}$ sein, folglich erhalte man

$$y = wz = \frac{bz}{y} \text{ und } z = \frac{y^2}{b} \text{ sowie } \int z = \int \frac{y^2}{b},$$

die links stehende Summe sei x $\left(\text{d. h. } \int dx = x\right)$, die rechtsstehende $\frac{y^3}{3ba}$, folglich sei $x = \frac{y^3}{3ba}$ die Gleichung der gesuchten Curve. Leibniz macht sofort die Probe auf seine Rechnung. Er ermittelt von der Curvengleichung $y^3 = 3abx$ ausgehend die Subtangente $t = \frac{y^3}{ab}$, wozu er der Methode von De Sluse sich bedient. Allgemein ist aber

$$t : y = y : w \quad \left(\text{d. h. } \frac{y}{y'} : y = y : yy'\right).$$

Für die untersuchte Curve ist daher $\frac{y^3}{ab} : y = y : w$, $w = \frac{ab}{y}$ wie verlangt war[1]). Dieses eine Beispiel möge erkennen lassen, wie Leibniz damals, Ende 1675, inverse Tangentenaufgaben behandelte.

Wir kehren zu dem Ende des zweiten Londoner Aufenthaltes von Leibniz zurück. Auf der Heimreise nach Hannover hielt er sich bei Hudde in Amsterdam auf und schrieb über die mit diesem gepflogenen Unterredungen einen an Oldenburg gerichteten, mittelbar auch für Collins und Newton bestimmten Brief. Letzterer insbesondere erhielt ihn in Gestalt einer durch Collins besorgten Abschrift[2]). Leibniz erzählte hier, Hudde besitze eine bessere Tangentenmethode als De Sluse. Er zeigte auch, wie zwischen der Subtangente und der Abscisse eine Gleichung ermittelt werden könne, welche die Ordinate nicht mehr enthalte, mit anderen Worten er lehrte die Elimination einer Unbekannten zwischen zwei Gleichungen, in deren einer mindestens sie als Potenz höheren als des ersten Grades vorkommt.

Newton schuldete Leibniz noch immer eine Antwort auf dessen Brief vom 27. August 1676. Er schrieb sie am 24. October, und gemeiniglich bezeichnet man diese Antwort als **zweiten Brief Newtons an Leibniz**, während unter dem **ersten Briefe** der vom 26. Juli (S. 174) verstanden wird. Auch für den zweiten Brief diente Olden-

[1]) C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis S. 132—133.
[2]) Leibniz I, 147—149.

burg als Mittelperson, aber dieser konnte ihn nicht mehr persönlich übergeben, denn Leibniz war schon wiedes abgereist, als der Brief in London ankam. Man muss damalige Postverhältnisse weder der Schnelligkeit noch der Sicherheit der Beförderung nach mit heutigem Maassstabe messen. Oldenburg fühlte sich berechtigt, den Brief nicht sofort nachzuschicken. Er hob ihn sorgfältig auf, fertigte eine Abschrift und liess auch diese erst am 2. Mai 1677 abgehen, nachdem sich, wie er in dem Begleitbriefe sagte[1]), eine sichere Gelegenheit zur Uebersendung gefunden hatte. In dem zweiten Briefe[2]) äusserte sich Newton, wie wir wissen (S. 66—67 u. S. 102), über die Art und Weise, wie er zum Binomialtheorem gelangt war, und über sein Parallelogramm. Ueber andere Theile des ausserordentlich langen Briefes haben wir jetzt zu berichten.

Die Absicht Newtons war offenbar die, sich jetzt die Priorität der Fluxionsrechnung zu sichern, und er führte sie aus, indem er sagte, seine Tangentenmethode stosse sich nicht an Irrationalitäten; ebenso wenig störe ihn deren Vorkommen bei Aufgaben über grösste und kleinste Werthe, ebenso wenig bei einigen anderen von denen er nicht rede. Die Grundlage des Verfahrens verberge sich in folgenden Buchstaben:

$$6a,\ 2c,\ d,\ a,\ e,\ 13e,\ 2f,\ 7i,\ 3l,\ 9n,\ 4o,\ 4q,\ 2r,\ 4s,\ 8t,\ 12v,\ x.$$

In späterer Zeit hat man erfahren, dieses Anagramm bedeute: *Data aequatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa*, aus einer beliebig viele Fluenten enthaltenden Gleichung die Fluxionen zu finden und umgekehrt. Ein zweites Anagramm fand sich gegen Ende des Briefes. Dort behauptete Newton die inversen Tangentenprobleme zu beherrschen. Er bediene sich dazu zweier Methoden, welche aus folgenden Buchstaben bestehen. Und nun kamen abermals zahlreiche Buchstaben, deren Vereinigung zu Worten später bekannt geworden ist. Sie lautet: *Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus; altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari possint, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendos terminos assumptae seriei.* Die eine Methode besteht in der Herausziehung der Fluente aus einer Gleichung, welche daneben auch ihre Fluxion enthält, die andere in der Annahme einer Reihe für jede Unbekannte, woraus das Uebrige leicht abzuleiten ist, und in der Vergleichung der einander entsprechenden Glieder des Ergebnisses, um daraus die Glieder der angenommenen Reihe zu ermitteln.

[1]) Leibniz I, 151. [2]) Ebenda I, 122—146. *Opuscula Newtoni* I, 328—357.

Zieht man in Erwägung, dass *Fluens* und *Fluxio*, ersteres selten, letzteres überhaupt noch nie in einer mathematischen Schrift gebraucht worden waren, und dass, was man mit ihnen machen sollte, mit einziger Ausnahme der zuletzt angerathenen Methode der unbestimmten Coefficienten, auch aus dem voll und unzerlegt angegebenen Wortlaute beider Anagramme kaum zu verstehen gewesen wäre, so gewinnen beide nur die Bedeutung, welche wir ihnen beilegten. Während sie für Leibniz ohne jeglichen Nutzen waren, sollten sie künftig die Selbständigkeit von Newtons Erfindungen mit sichernder Zeitangabe versehen. Wir machen dabei besonders darauf aufmerksam, dass in den Anagrammen von einer Bezeichnung, einem eigentlichen Algorithmus, nicht die Rede war. Das lässt sich nicht anders deuten, als dass Newton diese Dinge nicht für wichtig genug hielt, um auch ihren Besitz sich zu sichern.

Gehen wir noch auf Eines ein, was hochwichtig für die Geschichte der Infinitesimalrechnung in dem nicht in Anagrammen geschriebenen Texte des Briefes vorkommt. Ist z die Abscisse, y die senkrecht zu z angenommene Ordinate einer Curve, und heisst die Gleichung der Curve $y = dz^{\vartheta}(e + fz^{\eta})^{\lambda}$, und ist $\frac{\vartheta + 1}{\eta} = r$, so stelle, behauptet Newton unmittelbar nach dem ersten Anagramme, die Fläche der Curve sich durch eine Reihe dar, deren Anfangsglieder er angibt, und welche als geschlossener Ausdruck erscheine, sofern r eine ganze positive Zahl sei; anderenfalls sei die Reihenentwickelung eine unendliche. Wir wollen unseren Lesern das Verständniss des Satzes dadurch erleichtern, dass wir ihn in Zeichen der Integralrechnung schreiben und dabei den Buchstaben d, welchen wir für das Differential von z nicht entbehren können, mit a vertauschen.

Newton sagt alsdann: $\int az^{\vartheta}(e + fz^{\eta})^{\lambda}dz$ lasse sich in eine Reihe entwickeln, welche abbreche, mithin einen geschlossenen Ausdruck liefere, sofern $\frac{\vartheta + 1}{\eta}$ eine ganze positive Zahl sei. Er kannte also bereits einen Hauptfall, in welchem das sogenannte binomische Integral in geschlossener Form gefunden werden kann, eine Thatsache, welche ihm zur höchsten Ehre gereicht.

Im weiteren Verlaufe des Briefes zeigte dann Newton, wie unter Benutzung dieser Regel die Curve $y = \sqrt{a^2 - ax + \frac{x^3}{a}}$ quadrirt werden könne. Setze man nämlich $a^2 - ax = z^2$, so sei

$$y = \sqrt{z^2 + \frac{x^3}{a}} = z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8a^2z^3} \text{ etc.},$$

und jedes Glied dieser Reihe sei für sich quadrirbar. Auch diese

Behauptung ist wahr. Nennt man nämlich den auftretenden Zahlencoefficienten k, so ist jedes Glied von der Form

$$\frac{kx^{3\mu}}{z^{2\mu-1}} = kx^{3\mu}(z^2)^{\frac{1}{2}-\mu} = kx^{3\mu}(a^2 - ax)^{\frac{1}{2}-\mu},$$

und $\frac{\vartheta + 1}{\eta} = \frac{3\mu + 1}{1}$ ist eine ganz positive Zahl, da μ selbst ganz und positiv ist. Wäre, fährt Newton sogleich fort, die Reihe nicht einfach genug, so könne man sich dadurch helfen, dass man eine geometrische Curve beschriebe, welche durch beliebig viele gegebene Punkte hindurchginge[1]). Offenbar dachte Newton hier an eine näherungsweise Quadratur von der Art der Simpsonschen Regel. Diese Sätze dürften die wichtigsten Errungenschaften Newtons auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung darstellen, für welche der zweite Brief vom 24. October 1676 als Zeugniss angerufen werden kann.

Ob Leibniz durch diesen zweiten Brief auf die Spur von Dingen gebracht werden konnte, die er nicht vorher schon kannte? Durch die Anagramme gewiss nicht, ob durch den nicht in Räthselform gehüllten, aber immer noch dunkel und räthselhaft klingenden Text der zuletzt von uns besprochenen Sätze bleibe dahingestellt.

Aber Leibniz liess sich gar nicht die Zeit, den Brief zum Ausgangspunkte neuer Untersuchungen zu nehmen, er beantwortete ihn an dem Tage, an welchem er ihn erhielt[2]). Er beantwortete ihn durch eine klare, offene, vollständige Darlegung der Auflösung des Tangentenproblems mit Hilfe der Differentialrechnung. Augenscheinlich finde (Figur 33) die Proportion statt:

$$T_1B : {}_1B_1C = {}_1CD : D_2C$$

d. h. der auf der Axe gemessene Abstand der Tangente von der Ordinate verhalte sich zur Ordinate, wie die Differenz zweier Abscissen zur Differenz zweier Ordinaten. Betrachte man die Abscissendifferenz immer als die gleiche, so komme es also nur auf die Ordinatendifferenz an. Er bezeichne durch dy die Differenz zweier nächstliegender Ordinaten, durch dx die Differenz zweier nächstliegender Abscissen. Soll die Differenz etwa von y^2 gesucht werden, so schreibe er dafür $d\overline{y^2}$. Wir bemerken, dass wir, in dieser letzteren Beziehung von unserer Vorlage abweichend, den Horizontalstrich über dem zu differentiirenden Ausdruck durch Klammern ersetzen werden, zwischen denen er stehen

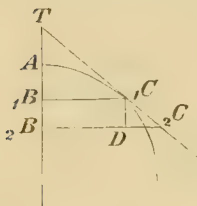


Fig. 33.

[1]) *Curvam geometricam describere quae per data quotcuncta puncta transibit.*
[2]) Leibniz I, 154—162.

soll. Nun sei, sagt Leibniz, $d(y^2) = 2y\,dy$, wie leicht zu beweisen sei. Es sei nämlich $d(y^2)$ die Differenz der Quadrate zweier nächstliegender Ordinaten oder

$$(y + dy)^2 - y^2 = 2y\,dy + (dy)^2.$$

Das Quadrat der unendlich kleinen Grösse dy oder $(dy)^2$ könne weggelassen werden und so sei $d(y^2) = 2y\,dy$. Aehnlicherweise sei $d(y^3) = 3y^2\,dy$ u. s. w. Auch die Differenzen von Produkten seien erhältlich nach der Formel

$$d(xy) = ydx + xdy$$

So sei z. B.

$$d(y^2x) = 2xy\,dy + y^2dx.$$

Leibniz zeigt dann weiter, dass wenn in

$$a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 + \cdots = 0$$

die Grössen x, y durch $x + dx$, $y + dy$ ersetzt werden, man dann die ursprüngliche Gleichung abziehe und die Glieder weglasse, welche höhere Abmessungen von dx und dy als die erste enthalten, das Ergebniss sich zeige

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy + \cdots}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2 + \cdots}.$$

Aber es sei auch

$$-\frac{dy}{dx} = -\frac{{}_1B\,{}_2B}{D\,{}_2C} = -\frac{{}_1CD}{D_2C} = -\frac{T_1B}{{}_1B_1C}$$

und folglich

$$-\frac{T_1B}{{}_1B_1C} = \frac{c + dy + \cdots}{b + dx + \cdots}$$

in Uebereinstimmung mit der Regel von De Sluse. Nur sei die Leibnizische Regel viel umfassender, weil sie Anwendung finde sowohl wenn mehrere unbestimmte Grössen als x und y vorkommen, als auch wenn Irrationalitäten vorhanden seien. Es sei nämlich ganz allgemein $d(x^z) = zx^{z-1}dx$, und wenn etwa $d(\sqrt[3]{a + by + cy^2})$ gesucht werden wolle, setze man $a + by + cy^2 = x$; dann sei

$$dx = bdy + 2cydy,\quad d(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\,dx = \frac{bdy + 2cydy}{3\sqrt[3]{(a + by + cy^2)^2}}.$$

Bei der letzten hier niedergeschriebenen Formel haben wir allerdings die Treue der Berichterstattung zu Gunsten der Richtigkeit des Ergebnisses verletzt. Bei Leibniz fehlt die Quadraterhebung der im Nenner auftretenden Wurzelgrösse, und der gleiche Fehler kehrt im Verlaufe des Briefes wieder, so dass die Vermuthung eines einmaligen Schreib- oder Druckfehlers ausgeschlossen ist. Leibniz

glaubte augenscheinlich, es sei $d\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x}}$, ohne um den Widerspruch gegen die von ihm erkannte Regel $d(x^z) = zx^{z-1}dx$ sich zu kümmern.

Kehren wir nach dieser nothwendigen Zwischenbemerkung zu Leibnizens weiteren Auseinandersetzungen zurück. Die von ihm angewandte Substitution neuer Buchstaben für zusammengesetzte Ausdrücke genüge auch bei noch viel verwickelteren Irrationalitäten, so z. B. wenn die gegebene Gleichung

$$a + bx\sqrt{y^2 + b\sqrt[3]{1+y}} + hyx^2\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}} = 0$$

heisse. Ich glaube, fährt Leibniz fort, dass was Newton im Betreff der Tangentenziehung verbergen wollte, hiervon nicht abweichen dürfte[1]), und darin bestätigt mich, was er hinzufügt, dass nämlich von der gleichen Grundlage aus die Quadraturen sich leichter gestalten, denn jede Figur ist quadrirbar, die auf eine Differentialgleichung sich zurückführt[2]). Dieses hier zum ersten Male in der Mathematik vorkommende Wort wird sofort erklärt und dabei ein zweites Wort erstmalig benutzt, welches nicht minder Eingang fand, das Wort ableiten, *derivare*. Eine Differentialgleichung sei nämlich eine solche, durch welche der Werth von dx sich ausdrücke, und welche die Derivirte einer anderen sei[3]), durch die der Werth von x sich ausdrücke. Leibniz glaubte z. B., wie unsere oben eingeschobene Bemerkung es ausspricht, es sei

$$d\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \cdots} = \frac{b + cy + dy^2 + \cdots}{z\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \cdots}}\,dy$$

und setzt in Folge dessen

$$\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \cdots}$$

als die Fläche der Curve, deren Gleichung

$$x = \frac{b + cy + dy^2 + \cdots}{z\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \cdots}}$$

sei, beziehungsweise sieht er in der Curve

$$x = \sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \cdots}$$

die quadrirende Curve der vorher genannten. Leibniz bedient

[1]) *Arbitror quae celare voluit Neutonus de tangentibus ducendis ab his non abludere.* [2]) *Quae sunt ad aequationem differentialem.* [3]) *Quaeque ex alia derivata est.*

sich zur Erläuterung dieser Betrachtungsweise einer Figur, welche genau mit Figur 23 übereinstimmt, die wir (S. 145) Tschirnhausens Veröffentlichung von 1683 entnahmen, und so erkennen wir aus dem Briefe Leibnizens an Newton, wie unbefangen Tschirnhaus etwa 6 bis 7 Jahre später über Gedanken verfügte, die er Leibniz schuldete. Die Wissenschaft freilich hat aus ähnlichem Vertrauensmissbrauche nicht selten Nutzen ziehen können, und wie sehr dieses 1683 der Fall gewesen ist, werden wir bald sehen.

Leibniz kommt in seinem Briefe noch auf die inverse Tangentenaufgabe zu reden. Wenn Newton behaupte, sie in seiner Macht zu haben, so sei das offenbar mittels unendlicher Reihen gemeint, er aber habe die Sache anders verstanden. Er wünsche die geometrische Herstellung der betreffenden Curve. Huygens habe z. B. entdeckt, dass die Cycloide durch ihre eigene Evolution entstehe[1]), wie nun, wenn man die Frage stelle: welche Curven werden durch ihre eigene Evolution erzeugt? Das sei eine inverse Tangentenaufgabe und nach seiner Meinung eine sehr schwierige. Andere inverse Tangentenaufgaben entstehen, wenn (Figur 34) in dem Dreiecke TBC, welches er das charakteristische nenne, und von dessen Seiten er $BC = x$ setze, während $AB = y$ sei, eine Beziehung zwischen zwei Seiten gegeben werde. In diesen Fällen sei die Curve auffindbar unter der Voraussetzung, dass man jede analytische Curve zu quadriren verstehe. Ob ausser Newton irgend Jemand die Auffindung zu vollbringen im Stande sei, wisse er nicht, aber durch seine Methode werde die Sache mit einer Zeile Rechnung erledigt. Wenn z. B.

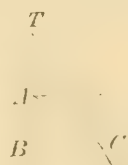


Fig. 34.

$$TB = bx + cx^2 + dx^3 + \cdots - y,$$

so sei die Curve $yx = bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3} + \cdots$. Führen wir mit unseren heutigen Bezeichnungen die Rechnung aus, so ist (da x und y bei Leibniz in jenem Briefe die Rollen gegen die meistgebräuchliche Schreibweise vertauschten) $TB = x \cdot \frac{dy}{dx}$. Die gegebene Beziehung lautet daher $y + x\frac{dy}{dx} = bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$ oder

$$d(yx) = (bx + cx^2 + dx^3 + \cdots)dx,$$

woraus die Integration $yx = \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4} + \cdots$ hervorbringen würde.

[1]) Sollte in dieser Stelle des Leibnizischen Briefes für Newton die Anregung gefunden werden müssen, die Huygens'schen Evolutenuntersuchungen nachträglich in die *Methodus fluxionum* aufzunehmen?

Leibnizens Ergebniss ist mithin falsch und würde voraussetzen

$$TB = b + cx + dx^2 + \cdots - y.$$

Fassen wir den Inhalt des Briefes nochmals zusammen, so sehen wir, dass unsere Behauptung, Leibniz habe eine ebenso klare als ausführliche Schilderung der Auflösung der Tangentenaufgabe mittels Differentialrechnung gegeben, durchaus berechtigt ist, und wenn auch einige Fehler einschlüpften, auf welche hinzuweisen wir nicht unterlassen haben, für welche vielleicht die Eiligkeit des Briefes verantwortlich zu machen wäre, so war doch genug gesagt, um Newton zu überzeugen, hier erwachse ihm ein ebenbürtiger Nebenbuhler. Warum Leibniz, während er das Zeichen der Differentiation preisgab, das der Integration zurückbehielt? Auf diese Frage fehlt uns die Antwort. Vielleicht dachte Leibniz, die Differentiation sei in erhöhtem Grade neu und sein Eigenthum, während die seit Cavalieri vorhandenen Gesammtheiten dem Summenbegriffe vorgearbeitet hatten.

Aber ein Anderes ist hier zu rügen. Leibniz sprach in seinem Briefe die Vermuthung aus, Newtons Tangentenmethode dürfte von der seinigen nicht abweichen. Das war fast mehr als Vermuthung, das konnte mit Rücksicht auf den Inhalt der Analysis per aequationes (S. 151) nahezu als gewiss gelten. Aber warum sagt Leibniz nicht offen, dass er in London jene Abhandlung gelesen habe? In dem Drama des späteren Streites ist hier die erste Schuld Leibnizens erkennbar, die deshalb nicht minder zu verurtheilen ist, dass sie in die Vorgeschichte fällt.

Freilich können wir Leibnizens Schweigen, wenn nicht entschuldigen, doch erklären. Leibniz hatte jene Abhandlung gelesen. In dem, was dort über die Rectification von Curven gesagt war (S. 153), in Verbindung mit den sehr lakonischen brieflichen Aeusserungen Newtons glaubte er seine eigenen Gedanken bis zu einem gewissen Grade wiederzuerkennen, aber er glaubte es nur. Er wusste, selbst mit allen Anlagen zu einem Geschichtsforscher ersten Ranges versehen, dass es für einen solchen keine gefährlichere Klippe gebe als die seiner eigenen Kenntnisse, dass man nur zu geneigt ist, das, was man selbst weiss, in ältere Schriftsteller hineinzulesen. Konnte es ihm nicht ähnlich beim Lesen der Analysis per aequationes und des Newtonschen Briefes gegangen sein? Er wollte, er musste sich Sicherheit verschaffen. Das war sein erster Gedanke, und unter seinem Einflusse schrieb er die Antwort an dem Tage, an welchem Newtons Brief in seine Hände gekommen war. Sein Forschungsgang war mit grösster Wahrscheinlichkeit ein ganz anderer gewesen als der Newtons, aber sie konnten doch auf verschiedenen Wegen zum gleichen

Ziele gelangt sein! Deshalb erörterte er jetzt sein Verfahren und die eine, wie wir vorher gesagt haben, durchaus neue Hälfte seiner Bezeichnungen. Weiteres behielt er vielleicht sich vor, wenn Newton sich entsprechend offen geäussert haben würde.

Dazu freilich kam es nicht. Leibnizens Brief traf nach dem 12. Juli 1677 in London ein. Am 9. August bestätigte Oldenburg dessen Empfang[1]) und bemerkte, auf eine baldige Antwort von Newton oder Collins dürfe Leibniz sich keine Rechnung machen, beide seien von der Stadt abwesend und sehr beschäftigt. Noch im gleichen Monate oder in dem darauf folgenden September starb Oldenburg. Aber konnte Newton, wenn er antworten wollte, nicht später eine andere Mittelsperson suchen, konnte er nicht einen Brief unmittelbar an Leibniz richten? Dass er es nicht that, liegt doch wohl in der gekränkten Eitelkeit Newtons begründet. Er konnte es Leibniz nicht verzeihen, auf eigene Hand gefunden zu haben und offen zu beschreiben, was noch Geheimniss bleiben und nicht über Englands Grenzen hinaus sich verbreiten sollte.

Was Wunder, wenn jetzt Leibniz theils durch die Nichtbeantwortung sich beleidigt fühlte, theils daraus die Muthmassung schöpfen mochte, er habe wirklich Newton mehr, als Recht war, zugetraut? Newton sei in der That in seinen Forschungen lange nicht so weit als er vorgedrungen und scheue sich nur solches einzugestehen? Dass Leibniz so dachte, geht aus seinem ganzen späteren Benehmen hervor.

Die nächsten Jahre waren für Leibniz mit Geschäften so überfüllt, dass er an mathematische Arbeit, geschweige denn an Veröffentlichungen nicht denken konnte. Erst 1682 boten die neu entstandenen A. E. ihm den Anlass, manches zum Drucke zu geben. Dahin gehört die Abhandlung über Zinseszins (S. 50), dahin eine solche über Optik[2]). Das Gesetz, dass das Licht immer den Weg einschlage, der in der kürzesten Zeit zu durchlaufen sei, gibt Veranlassung die Bedingung zu erörtern, unter welcher ein Ausdruck $mp + nq$, in welchem

$$p = \sqrt{c^2 + y^2}, \quad q = \sqrt{g^2 + (h - y)^2}$$

ist, seinen kleinsten Werth erhalte. Nach meiner Methode für die grössten und kleinsten Werthe[3]), sagt Leibniz, welche über die bisher bekannten hinaus die Rechnung wunderbar zusammenzieht, wird sofort beim ersten Anblick, fast ohne jede Rechnung, offenbar, dass np sich zu mq verhalten muss wie y zu $h - y$. Das ist die erste öffentliche Berufung Leibnizens auf eine in seinem Besitze be-

---

[1]) Leibniz I, 167. [2]) A. E. 1682 pag 185—190: *Unicum opticae, catoptricae et dioptricae principium Autore G. G. L.* Diese Abhandlung fehlt in der Gerhardtschen Gesammtausgabe. [3]) *Ex mea methodo de maximis et minimis.*

findliche Methode. Rechnet man nach, so zeigt sich, dass die von Leibniz ausgesprochene Proportion in der That den Mindestwerth von $mp + nq$ liefert.

Der folgende Jahrgang 1683 der A. E. brachte im Octoberhefte jene Abhandlung Tschirnhausens über Quadratur einer Curve mit Hilfe einer anderen Curve, welche die quadrirende genannt werden kann, in der Tschirnhausen Leibnizens Gedanken in kaum gestatteter Weise ausbeutete (S. 183). Leibniz empfand darüber den empfindlichsten Aerger, und dessen Folge war es, dass er nun mit seinen Entdeckungen nicht länger zurückzuhalten sich entschloss. Im Mai 1684 erschien in den A. E. der Aufsatz *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*[1]).

Leibniz begann diesen Aufsatz damit, dass er die Grösse dx als eine beliebige, nicht etwa als eine unendlich kleine Strecke erklärte, zu welcher alsdann eine andere dadurch in ihrer Grösse bestimmte Strecke dv oder dw, dy, dz u. s. w. in demselben Verhältnisse stehe, welches zwischen zwei Seiten des Dreiecks obwalte, das aus einer Berührungslinie an eine Curve, aus der Ordinate des Berührungspunktes und aus der Abscisse zwischen den Fusspunkten der Berührungslinie und der Ordinate gebildet ist. Ist a eine Constante, so sei $da = 0$, $d(ax) = adx$. Ist $v = z - y + w$, so sei $dv = dz - dy + dw$. Ist $y = xv$, so sei $dy = xdv + vdx$. Ist $z = \frac{v}{y}$, so sei $dz = \frac{ydv - vdy}{y^2}$; letzterer Ausdruck sei noch mit ± 1 vervielfacht zu denken, weil je nach der Gestaltung der Curve, welche der Betrachtung unterworfen ist, die einzelnen Strecken bald nach der einen, bald nach der anderen Richtung zu nehmen sind. Im Allgemeinen sei zu bemerken, dass z und dz gleichen Zeichens sein werden, weil sonst die vorhergehende Regel für dv bei $v = z - y + w$ nicht stattfände, dass aber die positive oder negative Bedeutung von dz nur aus der Figur ersichtlich sei. Die Berührungslinie steigt, beziehungsweise fällt, wenn $\frac{dv}{dx}$ positiv, beziehungsweise negativ ist. Sie ist der Axe parallel, und weder ein Steigen noch ein Fallen findet statt, wenn $\frac{dv}{dx} = 0$. Dabei ist die Ordinate v ein Maximum, wenn die Curve gegen die Axe concav, sie ist ein Minimum, wenn die Curve gegen die Axe convex ist. Hier ist zum ersten Male der Unterschied zwischen einem Maximum und einem Minimum erkannt und ausgesprochen! Aber Leibniz ist weiter als das ge-

[1]) Leibniz V, 220—226.

gangen. Er hat der sinnlich sichtbaren Unterscheidung eine analytische an die Seite gestellt. Er hat auf die Differenzen der Differenzen, *differentiae differentiarum*, auf ddv verwiesen, dessen Positiv- oder Negativsein die beiden Krümmungsarten kennzeichne. Das Verschwinden von ddv, ohne dass allgemein $v = 0$ oder $dv = 0$ wäre, lässt den Wechsel von Concavität und Convexität erkennen, einen *punctum flexus contrarii*. Hier finden nicht wie beim Maximalprobleme, zwei, sondern drei gleiche Gleichungswurzeln sich zusammen, was heute in die Worte gekleidet zu werden pflegt, die Inflexionstangente habe drei consecutive Punkte mit der Curve gemeinschaftlich. Leibniz hatte in dieser seiner Behauptung einen Vorgänger an Franciscus van Schooten, welcher das Gleiche schon in seinen Erläuterungen zu der Geometrie von Descartes ausgesprochen hat[1]). Andrerseits dürfte Newton die zweite Erklärung des Inflexionspunktes in der Methodus fluxionum (S. 169) den *Varia Opera* Fermats entnommen haben[2]). Ist diese Vermuthung richtig, wofür im XVII. Abschnitte Anhaltspunkte sich finden werden, so haben Aenderungen an der Methodus fluxionum nicht bloss nach 1673, sondern auch nach 1679 noch stattgefunden.

Weiter gibt Leibniz als Algorithmus des Differentialcalculs, wie er die Methode nenne, $d(x^a) = ax^{a-1}dx$ mit Ausdehnung auch auf negative und gebrochene Exponenten a und zeigt an einer sehr verwickelten Gleichung, wie die Einführung neuer Veränderlichen nothwendig falle. Es ist genau das gleiche Verfahren wie in Newtons Methodus fluxionum (S. 163—164), auf welches auch Leibniz verfallen ist, denn dass er die Methodus fluxionum zu Gesicht bekommen haben könnte ist durchaus unmöglich, ist auch niemals nur vermuthet worden. Bei solchen Substitutionen erscheint zum ersten Male der Doppelpunkt als Divisionszeichen[3]).

Als Beispiel einer Minimalaufgabe ist das optische Gesetz benutzt, über welches der Aufsatz in den A. E. von 1682 sich verbreitet hatte (S. 185), und das damals beweislos ausgesprochene Ergebniss wird abgeleitet. Zum Schlusse kommt Leibniz auf die Beaunesche Aufgabe. Sie führe zur Gleichung $\frac{w}{a} = \frac{dw}{dx}$. Nehme man dx als eine Constante, etwa $= b$, so sei $w = \frac{a}{b}dw$, d. h. die Ordinaten w seien ihren Incrementen oder Differenzen proportional, und wenn die x um Constantes wachsen, in arithmetischer Progression

[1]) Descartes, Geom. I, 258. [2]) Fermat, *Varia Opera* 73, *Oeuvres* I, 166.
[3]) Leibniz V, 223: $x : y$ *quod idem est ac* x *divis. per* y *seu* $\frac{x}{y}$.

stehen, so seien die entsprechenden w die Glieder einer geometrischen Progression. Wenn also die w Zahlen darstellen, so seien die x deren Logarithmen, die Curve eine logarithmische.

Leibniz hatte also jetzt der Oeffentlichkeit übergeben, was, wie er befürchten musste, sonst durch Tschirnhausens schrankenlose Veröffentlichungswuth in weniger zutreffender Gestalt der Presse übergeben zu werden drohte, vielleicht gar ohne dass der Name des Erfinders genannt worden wäre. Von der Integralrechnung und dem für ihre Zwecke erfundenen Zeichen war 1684 kaum, wenn man die kurze Erörterung der Beauneschen Aufgabe ausschliesst, gar nicht die Rede.

Wie rasch der Aufsatz bekannt wurde, dafür könnten wir vielleicht auf den Aufsatz über den Contingenzwinkel hinweisen, welchen Wallis 1685 zum Drucke gab, und in welchem (S. 24) man Leibnizische Gedanken wiederfinden kann. Sei aber auch dieser Hinweis anzuzweifeln, so erschien gleichfalls 1685 und gleichfalls in England ein Buch, dem der Leibnizische Aufsatz von 1684 als Grundlage diente. Der Schotte John Craig, den wir (S. 52) als Schriftsteller über die Zuverlässigkeit menschlicher Ueberlieferung kennen gelernt haben, gab als erste Schrift 1685 die *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi* heraus, die sich vollständig auf die Leibnizische Differentialrechnung gründete. Ihre Zeichen sind benutzt, ihre Tangentenmethode wird als diejenige gepriesen, welche Irrationalitäten am besten bewältigte.

Craig lebte, wie wir uns erinnern, in Cambridge gleichzeitig mit Newton. Ist es denkbar, dass Newton den Aufsatz nicht gekannt haben sollte, der Craig als Ausgangspunkt diente? Ist es denkbar, dass Craigs Buch von 1685 ihm unbekannt blieb, dessen Titel schon seine Neugier reizen musste? Und was that Newton, um sich seine eigenen mathematischen Entdeckungen zu sichern? Nichts!

Es ist ja richtig, Newton war damals mit der Abfassung seines grossen Werkes der Principien beschäftigt. Im August 1684 war Halley bei ihm auf Besuch[1]) und erfuhr, der Beweis des Gesetzes der Himmelsbewegungen sei vollendet. Im November schickte Newton vier Lehrsätze und die Auflösung von sieben Aufgaben an Halley nach London. Der Empfang dieses Schriftstückes, welches Newtons Anrecht an die Entdeckung der allgemeinen Anziehungslehre wahren sollte, wurde in das Registerbuch der Royal Society eingetragen. Es wäre zu viel verlangt, wenn man beanspruchte, dass ein mit so um-

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. XXIX und LV.

fassenden und schwierigen Arbeiten Beschäftigter, aus welchem Grunde es auch sei, sich herausreisse und ganz andere Dinge rasch zu Papier bringe. Gewiss, aber die Methodus fluxionum lag doch seit 13 Jahren druckfertig in Newtons Pulte! Warum schickte er sie auch jetzt nicht ein? Wir persönlich können diese Lässigkeit nur auf eine Weise erklären, nur damit, dass Newton den Werth seiner mathematischen Leistung als solcher nicht so sehr hoch anschlug, dass er sich darein fügte, dass Leibniz ihm hier den Rang abgelaufen hatte.

Wir sprachen von der Raschheit, mit der Leibnizens Aufsatz sich bekannt machte. Die Raschheit des wissenschaftlichen Verkehrs nahm überhaupt mehr und mehr zu. Von dem Buche Craigs, welches hervorgerufen durch eine Abhandlung vom Mai 1684 im Jahre 1685 erschien, ist bereits im Jahrgange 1686 der A. E. eine Anzeige vorhanden[1]), welche der Randbemerkung des Heidelberger Exemplars zufolge von **Christoph Pfautz** verfasst war.

Derselbe Jahrgang 1686 der A. E. brachte zwei neue Aufsätze von Leibniz: *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi etc.*[2]) und unmittelbar daran anschliessend: *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*[3]). Der erstere Aufsatz bringt eine neue Frage an die Tagesordnung, von welcher noch nirgend die Rede gewesen war, denn wir dürfen nie vergessen, dass die Methodus fluxionum, selbst wenn sie damals den vollen später bekannt gewordenen Inhalt besass, für die mathematische Welt nicht vorhanden war. In einem Curvenpunkte könne man, sagt Leibniz, ausser der Richtung auch die Krümmung messen. Jene werde durch die grade Berührungslinie, diese am einfachsten durch denjenigen Kreis versinnlicht, der den kleinsten Contingenzwinkel mit der Curve bilde, der im Kusse sich ihr anschmiege, sie osculire. Ein solcher Kreis müsse mit der Curve zwei Berührungen, also vier gleiche Wurzeln gemein haben, und man könne auch Osculationen zweiter, dritter und noch höherer Ordnung sich denken, wo drei, vier und mehr Berührungen stattfinden.

Hier hat Leibniz, vielleicht weil er bei dem allgemeinen Gedanken sich beruhigte, statt ihn in Rechnung umzusetzen, bekanntlich geirrt. Der Osculationskreis beruht auf der Gemeinschaft von drei, nicht von vier consecutiven Punkten, und Newton sah hier viel richtiger (S. 169), wenn jene Stelle dem alten Manuscripte angehörte und Newton nicht etwa, wie nach 1673 und 1679, auch nach 1686 und noch später Zusätze in seine Handschrift einschaltete.

Der zweite Aufsatz von 1686, die *Geometria recondita*, wie er

[1]) A. E. 1686 pag. 169. [2]) Leibniz VII, 326—329. [3]) Ebenda V, 226—233.

gewöhnlich genannt wird, ist ungleich wichtiger. In ihm erscheint zum ersten Male das Integralzeichen im Drucke. Das ist aber durchaus nicht das einzige Bemerkenswerthe. Leibniz geht aus von dem Buche Craigs, welches ihm zugesandt worden sei. Dann kommt eine freundschaftlich gehaltene Polemik gegen Tschirnhaus, in welcher Leibniz sich darauf beruft, dass er seine Methoden schon vor zehn Jahren und länger besessen und sie im Gespräche mit Tschirnhaus, der sich damals in Paris bei ihm befand, frei geäussert habe. Diese Behauptung fand keinen Widerspruch, ist also abermals geeignet, die Datirungen der handschriftlichen Notizen von 1676 zu stützen. Schon in einem Aufsatze *De dimensionibus figurarum inveniendis* in den A. E. von 1684 hatte Leibniz die algebraischen Curven als solche bezeichnet, deren Natur durch eine Gleichung bestimmten Grades ausgedrückt werden könne[1]). Noch früher hatte er in der handschriftlich erhaltenen Abhandlung *Compendium quadraturae arithmeticae* die gleichen Curven analytische genannt und das Wort Parameter für jede in der Gleichung vorkommende Constante eingeführt[2]). In der Geometria recondita öffnet er den Weg zu den Transcendenten. Wir haben gelegentlich (S. 107) auf die Anwendung dieses Wortes bei Gleichungen wie $x^x + x = a$ aufmerksam gemacht, in der Geometria recondita ist es erläutert: Transcendente sind solche Grössen, die durch keinerlei Gleichung bestimmten Grades erklärt werden, vielmehr über jede algebraische Gleichung hinausgehen[3]). Die Tangentenmethode von 1684, behauptet nun Leibniz, mache auch vor transcendenten Curven nicht halt. Dem Differentialcalcul aber stehe ein anderer gegenüber, zu welchem er hier den Zugang eröffnen wolle. Aus einer Differentialgleichung entstehe nämlich eine summirende[4]). So sei $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ eine Folge davon, dass $d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x dx$, und die Gleichung der Cycloide sei

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Bei der Prüfung der letzteren Gleichung ist zu beachten, was schon (S. 183) angemerkt wurde, dass x und y bei Leibniz nicht den gleichen geometrischen Sinn haben, den man diesen Buchstaben heute beizulegen pflegt. Die y sind auf der Grundlinie gemessen, über welche der Erzeugungskreis hinrollt, die x dazu senkrecht, und der Halbmesser

[1]) Leibniz V, 127: *cujus natura per aequationem certi gradus exprimi potest.* [2]) Ebenda V, 103: *Curva analytica est, cujus natura aequatione certi gradus exhiberi potest. Parameter est recta constans aequationem ingrediens.* [3]) Ebenda V, 228: *omnem aequationem algebraicam transcendant.* [4]) *Aequatione differentiali versa in summatricem.*

des Kreises ist überdies als Einheit gewählt. Warum dx gewählt wurde statt der einfachen Buchstaben älterer Schriftsteller ist ausdrücklich gesagt: weil in dx die Aenderung von x zu erkennen ist[1]. Leibniz führte in diesem Aufsatze auch den Namen des charakteristischen Dreiecks in die Oeffentlichkeit ein, allerdings in anderer Bedeutung als in seinem Briefe an Newton. Damals (S. 183) war das Dreieck gemeint, dessen Hypotenuse die Berührungslinie vom Berührungspunkte bis zur Abscissenaxe ist, während die Ordinate des Berührungspunktes und ein Stück Abscissenaxe die Katheten bildeten. Jetzt verstand Leibniz darunter das jenem grossen Dreiecke ähnliche unendlich kleine Dreieck, dessen Hypotenuse ein mit der Curve zusammenfallendes Element der Berührungslinie ist. Wir erinnern uns, dass Leibniz hiermit nur den Rückweg zu seinen anfänglichen Gedanken nahm, denn bei Pascal war ihm grade das unendlich kleine Dreieckchen begegnet und aufgefallen (S. 156). In den A. E. von 1693 hat Leibniz später beide Auffassungen vereinigt. Es gebe zwei einander ähnliche charakteristische Dreiecke, ein angebbares und ein nicht angebbares[2].

Zwischen den mathematisch so hochbedeutsamen Mittheilungen der Geometria recondita ist auch eine geschichtliche Uebersicht bisheriger Leistungen eingeschlossen. Wie Pascal dort zwar nicht genannt, aber mit für uns ausreichender Deutlichkeit als Leibnizens Vorgänger bezeichnet war, haben wir (S. 157) besprochen. An Mercators erste Quadratur mit Hilfe einer unendlichen Reihe wird erinnert, und dann heisst es weiter[3]: „Ein Geometer von tiefstem Geiste, Isaac Newton, hat dieselbe Entdeckung nicht nur selbstständig gemacht, sondern hat sie in ganz allgemeiner Weise zu Ende geführt; würde er die Ueberlegungen, von denen ich vernehme, dass er sie noch verhehlt, herausgeben, so ist kein Zweifel, dass er uns den Zugang zu grossen Vermehrungen der Wissenschaft und zu grossen Abkürzungen eröffnen würde."

Und nun kam in der Zeit vom April 1686 bis etwa zum Juli 1687 die Drucklegung von Newtons *Philosophiae naturalis principia mathematica*, meistens kurzweg die Principien genannt[4]. Unsere Leser erwarten wohl, dass namentlich Leibnizens nicht misszuverstehender Aufforderung von 1686 gegenüber Newton die Gelegenheit gern ergriffen haben werde, bei Veröffentlichung eines mit Spannung erwarteten, von der Royal Society in London schon vor

[1]) *Quia istud dx est modificatio quaedam ipsius x.* [2]) Leibniz V, 298: *assignabile et inassignabile.* [3]) Ebenda V, 132. [4]) Eine sehr ausführliche Berichterstattung über die Principien bei Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* VI, 6—92.

seinem Erscheinen aufs Wohlwollendste befürworteten Werkes nun auch die mathematischen Hilfsmittel zu enthüllen, deren er bei der Ausarbeitung sich bedient hatte.

Keineswegs! Einige Andeutungen über das Werden der Grössen, von welchen gleich die Rede sein soll, finden sich zwar, die Wörter Augenblicksveränderung, Fliessen sind gebraucht, aber das, was bei Leibniz das eigentlich Neue gegen alle früheren Infinitesimalbetrachtungen war, die einheitliche Bezeichnung, also bei Newton das Pünktchen, ist nirgends benutzt, nirgends angedeutet, während es doch nach vorhandenen, wenn auch nicht gedruckten Aufzeichnungen seit 1665 in Newtons Besitze war[1]).

Warum dieses Schweigen? Eine einzige Erklärung scheint dafür möglich, welche auch wiederholt gegeben worden ist. Die Gesetze der allgemeinen Anziehung, deren Darstellung die Principien geben, waren so neu, so überraschend, dass Newton eine um so schroffere Ablehnung derselben befürchten musste, wenn er in der Beweisführung sich im Geringsten von den altgeometrischen Methoden entfernt hätte, welche alle Mathematiker anerkannten. Heisst es doch in einem fast 30 Jahre später geschriebenen Aufsatze[2]): „Newton fand die meisten Sätze der Principien mittels der neuen Analysis, aber er bewies sie synthetisch, damit die Gesetze des Himmels auf guter geometrischer Grundlage ruhten."

Wir haben zugesagt einige leise Andeutungen zu erwähnen. Newton schickte gleich dem ersten Buche eine Reihe von 11 Lemmen oder Lehnsätzen voraus, welche bestimmt waren, die Grundlage des Nachfolgenden zu bilden, und welche wir mittheilen[3]).

1. Grössen wie auch Verhältnisse von Grössen, welche in einer gegebenen Zeit sich beständig der Gleichheit nähern, und einander vor dem Ende jener Zeit näher kommen können, als um jede gegebene Grösse, werden endlich einander gleich.

2. Werden (Figur 35) in der beliebigen Figur $AacE$, welche durch die geraden Linien Aa, AE und die Curve acE begrenzt ist, beliebig viele Parallelogramme Ab, Bc, Cd etc. auf gleichen Grundlinien AB, BC, CD etc. und mit den Seiten Bb, Cc, Dd etc. beschrieben; fügt man hierauf die Parallelogramme $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* XXI, bemerkt zu dem Datum des 20. Mai 1665: *Paper on fluxions, in which the notation of points is used* und zu dem 16. Mai 1666: *Another paper on fluxions.* [2]) P. T. 1715 pag. 206. Vergl. F. Giesel, Entstehung des Leibniz-Newtonschen Prioritätsstreites. Delitzsch 1866. S. 14, Anmerkung 13. [3]) Wir bedienen uns meistens des Wortlautes der Uebersetzung der Principien von J. Ph. Wolfers. Berlin 1872.

etc. hinzu; vermindert man ferner die Breite $AB = BC = CD = \cdots$ dieser Parallelogramme und vermehrt man zugleich ihre Anzahl bis ins Unendliche, so wird zuletzt die eingeschriebene Figur gleich der umschriebenen, gleich der krummlinigen. Der Beweis besteht darin, dass der Unterschied der eingeschriebenen und der umschriebenen Figur aus kleinen Parallelogrammen besteht, welche zu $ABla$ sich summiren. Die Höhe dieses Summenparallelogrammes ist endlich, die Breite nimmt unendlich ab, die Fläche verschwindet alsdann. Sind aber die eingeschriebene und die umschriebene Figur als gleich zu erachten, so fällt mit ihnen auch die zwischen beiden liegende krummlinig begrenzte Figur zusammen.

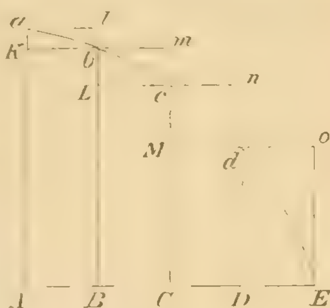


Fig. 35.

3. Die Folgerungen des zweiten Lehnsatzes bleiben bestehen, wenn die Stücke AB, BC, CD etc. auch nicht einander gleich sind, falls sie nur alle unendlich klein werden.

4. Wenn in zwei Figuren wie vorhin zwei Reihen Parallelogramme, deren Anzahl in beiden gleich, eingeschrieben und ihre Breiten ins Unendliche vermindert werden, wenn ferner die letzten Verhältnisse[1]) der einzelnen Parallelogramme in der einen Figur zu den einzelnen in der anderen dieselben sind, so stehen beide Figuren zu einander in demselben Verhältnisse.

5. Alle einander correspondirenden Seiten ähnlicher Figuren sind proportional, sowohl die krumm- als die gradlinigen, und ihre Flächeninhalte verhalten sich wie die Quadrate der Seiten.

6. Wird (Figur 36) ein der Lage nach gegebener Bogen ACB durch die Sehne AB unterspannt und in irgend einem Punkte A, wo die Krümmung ihre Art nicht ändert[2]), durch die grade Linie AD berührt, nähern sich hierauf die Punkte A und B einander und treffen sie endlich zusammen, so wird der Winkel BAD, welchen Sehne und Tangente mit einander bilden, ins Unendliche vermindert und verschwindet zuletzt.



Fig. 36.

7. Bei denselben Voraussetzungen ist das letzte Verhältniss des Bogens, der Sehne und der Tangente das der Gleichheit.

[1]) *rationes ultimae.* [2]) *in medio curvaturae continuae.*

8. Bilden gegebene grade Linien AR und BR mit dem Bogen ACB, der Sehne AB und der Tangente AD die Dreiecke $ACBR$, ABR, ADR, und nähern sich die Punkte A und B einander gegenseitig, so wird die letzte Form der verschwindenden Dreiecke einander ähnlich[1]), und ihr letztes Verhältniss das der Gleichheit.

Fig. 37.

9. Die ihrer Lage nach gegebene Curve ABC und die grade Linie AE (Figur 37) schneiden sich im Punkte A, und auf jene Gerade stützen sich unter gegebenem Winkel die DB, EC, welche der Curve in B, C begegnen; lässt man B und C dem A sich nähern, so stehen die Dreiecke ADB, AEC zuletzt im quadratischen Verhältnisse der Seiten.

10. Die Wege, welche ein Körper in Folge der Wirkung irgend einer endlichen, regelmässigen Kraft beschreibt, mag diese bestimmt und unveränderlich sein, oder mag sie beständig zu- oder abnehmen, stehen beim Anfange der Bewegung im quadratischen Verhältnisse der Zeiten.

11. Die Linie AD sei eine Tangente an der Curve ABC und BD beliebig von B nach D gezogen, alsdann steht BD beim Verschwinden zuletzt im quadratischen Verhältnisse der zugehörigen Sehne AB (d. h. es wird lim. $\frac{BD}{AB^2}$ gleich einer Constanten, und die Curve kann beim Verschwinden als Kegelschnitt gedacht werden).

Man wird, nachdem wir alle 11 Lehnsätze mitgetheilt haben, unsere Kennzeichnung derselben als leise Andeutungen der Infinitesimalbetrachtungen, mittels deren Newton zu seinen Ergebnissen gelangt war, vielleicht als zuvielsagend, keinenfalls als zu eng zurückweisen. Am deutlichsten sprach sich Newton noch in einem längeren Scholium, einer Anmerkung aus, mit welcher er nach Aufstellung der 11 Lehnsätze den ersten Abschnitt beschloss. Die wichtigste Stelle hat folgenden Wortlaut:

„Man kann den Einwurf machen, dass es kein letztes Verhältniss verschwindender Grössen gebe, indem dasselbe vor dem Verschwinden nicht das letzte sei, nach dem Verschwinden aber überhaupt kein Verhältniss mehr stattfinde. Aus demselben Grunde könnte man aber auch behaupten, dass ein nach einem bestimmten Orte strebender Körper keine letzte Geschwindigkeit habe; diese sei, bevor er den bestimmten Ort erreicht hat, nicht die letzte, nachdem er ihn erreicht hat, existire sie gar nicht mehr. Die Antwort

[1]) *Ultima forma triangulorum evanescentium est similitudo.*

ist leicht. Unter der letzten Geschwindigkeit versteht man diejenige, mit welcher der Körper sich weder bewegt, ehe er den letzten Ort erreicht und die Bewegung aufhört, noch die nachher stattfindende, sondern in dem Augenblicke, wo er den Ort erreicht, ist es die letzte Geschwindigkeit selbst, mit welcher der Körper den Ort berührt, und mit welcher die Bewegung endigt. Auf gleiche Weise hat man unter dem letzten Verhältnisse verschwindender Grössen dasjenige zu verstehen, mit welchem sie verschwinden, nicht aber das vor oder nach dem Verschwinden stattfindende. Ebenso ist das erste Verhältniss entstehender Grössen dasjenige, mit welchem sie entstehen, die erste und letzte Summe diejenige, mit welcher sie anfangen oder aufhören zu sein (entweder grösser oder kleiner zu werden). Es existirt eine Grenze, welche die Geschwindigkeit am Ende der Bewegung erreichen, nicht aber überschreiten kann; dies ist die letzte Geschwindigkeit. Dasselbe gilt von der Grenze aller anfangenden und aufhörenden Grössen und Proportionen. Da diese Grenze fest und bestimmbar ist, so ist es eine wahrhaft geometrische Aufgabe sie aufzusuchen."

Man sieht, mit welchen gewundenen Ausdrücken Newton um den Begriff der in einem Augenblicke vorhandenen Geschwindigkeit herumgeht, anstatt grade ihn zu benutzen, um das Wort Fluxion den Lesern klar zu machen. Er wollte damals, am 28. April 1686, als das erste Buch der Principien der Royal Society druckfertig vorgelegt wurde[1], jenes Wort nicht in die Oeffentlichkeit bringen. Seine Meinung in dieser Beziehung änderte sich bis zum 20. Juni, als dem Tage, an welchem das zweite Buch bis aufs Abschreiben fertig war[2]). Im zweiten Abschnitte des zweiten Buches taucht unvermittelt das zweite Lemma auf: *Momentum Genitae aequatur Momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum et coefficientia continue ductis*, oder: die Augenblicksveränderung einer Function ist gleich dem Producte der Augenblicksveränderungen der sie bildenden Veränderlichen in ihre Exponenten und in ihre Coefficienten.

Dass wir nicht allzufrei übersetzt haben, geht aus der Fortsetzung hervor, in welcher Newton noch Einzelnes erläutert. *Genita* sei jede Grösse, welche aus anderen arithmetisch oder geometrisch hervorgehe; *Momentum* sei das augenblickliche positive oder negative Increment der in einem Flusse befindlichen Grössen. „Die Momente", sagt Newton, „hören auf Momente zu sein, sobald sie eine endliche

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. XXX. [2]) Ebenda pag. LVII, Anmerkung 86.

Grösse erhalten. Man hat unter ihnen die eben entstehenden Anfänge endlicher Grössen zu verstehen und betrachtet in diesem Lehnsatze nicht die Grösse der Momente, sondern ihr Verhältniss, wenn sie eben entstehen. Es kommt auf dasselbe heraus, ob man statt der Momente entweder die Geschwindigkeiten der Zu- und Abnahme (welche man auch Bewegungen, Veränderungen und Fluxionen der Grössen nennen kann) oder beliebige endliche Grössen versteht, welche jenen Geschwindigkeiten proportional sind."

Darnach bedeutet in der That der (S. 195) im lateinischen Wortlaute und in freier Uebersetzung abgedruckte Satz nichts anderes als die Regel, nach welcher A mal B differentiirt werden soll, wenn A und B irgend Potenzen der Veränderlichen sind, und sechs Beispiele zeigen die Richtigkeit dieser Auffassung.

Man würde irren, wenn man glaubte, Newton habe, nachdem dieser Lehnsatz ausgesprochen war, von nun an fortwährend Fluxionen angewandt. Dazu wäre im ersten Buche Gelegenheit gewesen, das zweite Buch hat es wesentlich mit Fluenten d. h. mit Integralrechnung zu thun, und ihr Name ist in dem Lehnsatze nicht enthalten. Man sieht daraus deutlich, was Newtons Absicht beim Abdrucke eines Lehnsatzes, von dem er keinen Gebrauch zu machen gewillt war, gewesen sein muss.

Er wollte eine gedruckte Aeusserung schaffen, auf die er sich später einmal zur Datirung beziehen könne, wenn er je daran denken sollte seine Fluxionsrechnung herauszugeben. Das geht noch deutlicher aus einem Scholium hervor, welches hinter dem Lehnsatze und den ihn erläuternden Beispielen steht: „In Briefen, welche ich vor etwa 10 Jahren mit dem sehr gelehrten Mathematiker G. G. Leibniz wechselte, zeigte ich demselben an, dass ich mich im Besitze einer Methode befände, nach welcher man Maxima und Minima bestimmen, Tangenten ziehen und ähnliche Aufgaben lösen könne, und zwar lasse sich dieselbe eben so gut auf irrationale wie rationale Grössen anwenden. Indem ich die Buchstaben der Worte (wenn eine Gleichung mit beliebig vielen Fluenten gegeben ist, die Fluxionen zu finden und umgekehrt), welche meine Meinung aussprachen, versetzte, verbarg[1]) ich dieselbe. Der berühmte Mann antwortete mir darauf, er sei auf eine Methode derselben Art verfallen, die er mir mittheilte[2]), und welche von meiner kaum weiter abwich als in der Form der Worte und Zeichen"[3]). Damit war, schon durch den Gegensatz der beiden Wörter „verbergen" und „mittheilen", die Unabhängigkeit der Erfindung bei dem offen Mittheilenden jeden-

[1]) *celari.* [2]) *communicavit.* [3]) *in verborum et formarum formulis.*

falls zugestanden, für den, der seine Methode verbarg, mindestens beansprucht.

Dieses Scholium hat aber seine Geschichte, die wir vorgreifend gleich hier erzählen wollen. Im Jahre 1709 war das dringende Bedürfniss nach einer neuen Auflage der Principien vorhanden. Die Besorgung derselben übernahm Roger Cotes, der begabteste unter den damaligen jüngeren Mathematikern Englands, und der Briefwechsel zwischen dem jungen Herausgeber und dem wirklichen Verfasser gibt über manche nicht unwichtige Aenderung Aufschluss, durch welche die zweite Ausgabe von der ersten abweicht. Meistens war es Cotes, der mit der erstmaligen Fassung sich nicht einverstanden erklärte und seine Ausstellungen und Verbesserungsvorschläge mit grosser Zähigkeit festhielt, bis Newton in der Regel nachgab, oder doch eine Vermittelung zwischen beiden Ansichten erzielt war. Die neue Ausgabe erschien 1713, aber noch vor dem 15. April 1710 war der Druck bis jenseits des erwähnten Scholium vorgerückt, und dasselbe hatte die vollständig gerechtfertigte Aenderung erlitten, dass als unterscheidend zwischen beiden Methoden, der von Newton und der von Leibniz, noch die Art der Entstehung der Grössen[1]) hervorgehoben wurde. Alles Andere, sogar die „vor etwa 10 Jahren gewechselten Briefe" blieb unverändert, wenn auch inzwischen schon mehr als 20 weitere Jahre dahingegangen waren.

Die Bedeutsamkeit des erwähnten Zusatzes, welcher der beiderseitigen Unabhängigkeit der Gedanken ein unzweideutiges Zeugniss spricht, da ja grade die Art der Entstehung der Grössen durch fliessende Bewegung oder aus in Ruhelage vorhandenen unendlich kleinen Elementartheilen den Kern der Fluxionsrechnung wie der Differentialrechnung bildet, liegt auf der Hand. Von wem ist aber dieser Zusatz? Auch wie gewöhnlich von Cotes, oder von Newton? Darüber wird wohl nie Licht verbreitet werden. Der Briefwechsel zwischen Newton und Cotes zeigt eine Lücke vom 11. October 1709 bis zum 15. April 1710, und grade innerhalb dieser Zeit fand der Druck des Scholium statt[2]). Hier fehlen die, wie aus dem Zusammenhange zu entnehmen ist, sicherlich vorhanden gewesenen Briefe, von deren Abhandenkommen wir im XVII. Abschnitte zu reden haben werden.

Aber wir gehen in der Geschichte des Scholium weiter. Eine dritte Ausgabe der Principien erschien 1726 unter der Leitung von

[1]) *Idea generationis quantitatum.* [2]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 6—7.

Henry Pemberton (1694—1771), und diesesmal, 10 Jahre nach Leibnizens Tode, wurde das ganze Scholium nicht bloss gestrichen, sondern durch folgendes neue ersetzt: „In einem an unseren Landsmann Collins gerichteten Brief[1]) vom 11. December 1672 beschrieb ich eine Methode der Tangenten, welche meiner Vermuthung nach mit der, damals noch nicht veröffentlichten Methode von De Sluse identisch sei. Ich fügte folgende Bemerkung hinzu: Dies ist ein besonderer Fall, oder vielmehr ein Zusatz zur allgemeinen Methode welche sich auf jeden mühevollen Calcul erstreckt, nicht nur auf die Construction von Tangenten an alle geometrische oder mechanische Curven, oder von auf andere Curven sich beziehenden graden Linien, sondern auch auf die Lösung anderer, schwieriger Aufgaben über die Krümmung, Quadratur, Rectification, die Schwerpunkte der Curven u. s. w., und sie beschränkt sich nicht (wie die Methode von Hudde für Maxima und Minima) auf diejenigen Gleichungen, welche frei von irrationalen Grössen sind. Diese Methode habe ich jener anderen eingefügt, nach welcher ich die Gleichungen behandle, indem ich sie auf unendliche Reihen zurückführte. So weit jener Brief. Die letzten Worte beziehen sich auf eine Abhandlung, welche ich im Jahre 1671 über diesen Gegenstand geschrieben habe. Die Grundlage dieser allgemeinen Methode ist im vorhergehenden Lehnsatze enthalten.“

Hier war also der Name Leibnizens in Wegfall gebracht. Dafür war dem Tangentenbriefe (S. 161) und der ersten Niederschrift der Methodus fluxionum eine Bedeutung beigelegt, welche Newton ihnen offenbar weder 1687 noch 1710, weder bei der ersten noch bei der zweiten Auflage der Principien beizulegen wagte. Wir dürfen die ganze Umänderung wohl als Beweis dafür ansehen, dass man jetzt 1726 fühlte, wie das alte Scholium gemeint war, wie es allein verstanden werden konnte. Jetzt sollte man es nicht mehr so verstehen, und deshalb wurde es beseitigt.

Wir möchten noch auf eine weitere Stelle der Principien aufmerksam machen, welche, wie uns scheint, ein geschichtlich wichtiges Eingeständniss enthält. Im 10. Abschnitte des ersten Buches ist die Pendelbewegung genau erörtert. Die 34. Aufgabe verlangt die Geschwindigkeit des Pendels in jedem einzelnen Punkte, durch welchen er bei seinen Schwingungen hindurchgeht, und die Zeiten zu bestimmen, in welchen sowohl die ganzen Schwingungen als einzelne Theile derselben zurückgelegt werden. Der zweite Zu-

---

[1]) Das hier wiederholte Bruchstück des Briefes ist abgedruckt in *Opuscula Newtoni* I, 297—298.

satz zu dieser Aufgabe erwähnt das Cycloidenpendel, seinen Tautochronismus u. s. w. mit der Bemerkung, Huygens habe es bewiesen [1]. Kein Wort gibt zu verstehen, dass Newton zu dem gleichen Ergebnisse selbständig gekommen sei. Wir finden darin die Bestätigung unserer früher ausgesprochenen Ansicht (S. 172), dass Newton die Methodus fluxionum nicht durchaus in dem Zustande der ersten Niederschrift von 1671 liess, sondern wenn auch nicht eine vollkommene Umarbeitung (S. 165) doch spätere Einschaltungen, jedenfalls eine solche nach 1673, vornahm.

Der Hauptinhalt der Principien kann nur in einer Geschichte der Physik oder der Astronomie genau gewürdigt werden. Hier haben wir uns mit der Andeutung zu begnügen, dass es Newton darauf ankam zu beweisen, dass die Kepler'schen Gesetze, deren wirkliche Geltung erfahrungsmässig feststand, sich mathematisch als Folge einer allgemeinen Anziehung ergeben, vorausgesetzt dass diese Anziehung im umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Entfernungen wirke. Anziehung nannte Newton, wie er in der letzten Anmerkung des 11. Abschnittes des ersten Buches ausdrücklich sagt, jeden Versuch der Körper sich einander zu nähern. Ob eine thatsächliche Fernwirkung, ob fortgesetzte Nahewirkungen diesen Versuch beeinflussen, liess er unbestimmt. Das Gesetz, nach welchem die Anziehung stattfindet, war ihm am wichtigsten, und an den verschiedensten Stellen der Principien sind Einwirkungsannahmen der verschiedensten Natur gemacht und ihre Folgen in Erwägung gezogen.

Einer der wichtigsten Sätze der im umgekehrten Quadrate der Entfernung sich ändernden Anziehung ist der von der sich aufhebenden Beeinflussung eines inneren Punktes einer Kugel, welcher den 12. Abschnitt des ersten Buches eröffnet (Figur 38). P sei der im Inneren der Kugel liegende Punkt. Sind HI und KL unendlich kleine Bögen, so ist $\triangle HIP \sim LKP$, und ein beliebig kleines Oberflächentheilchen um HI verhält sich zu einem um KL gelegenen wie $HI^2 : KL^2 = PI^2 : PK^2$. Die Entfernungen jener Flächen von P sind aber PI und PK, die Anziehung nimmt also ab im Verhältnisse von $\frac{1}{PI^2} : \frac{1}{PK^2}$, und beide Verhältnisse verbinden sich zu $\frac{PI^2}{PI^2} : \frac{PK^2}{PK^2} = 1 : 1$, d. h. entgegengesetzte Anziehung von genau

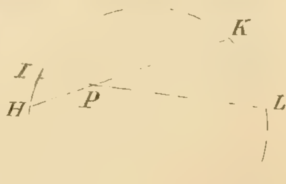


Fig. 38.

[1] *ut demonstravit Hugenius.*

gleicher Grösse treibt den Punkt nach beiden Seiten, d. h. nicht stärker nach der einen als nach der ihr entgegengesetzten Seite, und er verbleibt in Ruhe.

Von mancherlei geometrisch fesselnden Sätzen erwähnen wir den 1. Satz des 5. Abschnittes des ersten Buches dass, wenn von irgend einem Punkte eines Kegelschnittes nach den vier Seiten eines Sehnenvierecks Gerade unter gegebenen Winkeln gezogen werden, die Producte der nach je zwei Gegenseiten gezogenen Strecken in constantem Verhältniss stehen. Ueberhaupt beschäftigt sich der ganze 5. Abschnitt mit merkwürdigen Eigenschaften der Kegelschnitte, mit deren Bestimmtheit durch fünf Punkte, während durch vier Punkte mehr als nur ein Kegelschnitt gelegt werden kann u. s. w., Fragen, mit welchen sich einst auch Pascal beschäftigt hatte (Bd. II, S. 623), wenn auch ohne dass wir wissen, wie weit er gelangte. Eine Erinnerung an Desargues (Bd. II, S. 619) darf wohl in dem 22. Lemma des ersten Buches vermuthet werden, wo es heisst: Parallellinien seien solche, welche nach einem unendlich entfernten Punkte gerichtet sind[1]).

91. Kapitel.

Leibniz 1687—1699. Jakob und Johann Bernoulli bis zu ihrem Streite.

Mit den Principien war Newtons schriftstellerische Thätigkeit, wenigstens soweit sie an die Oeffentlichkeit trat, für einige Zeit beendigt. Der Mathematiker hat von seinen Leistungen, so weit sie uns bisher gegenüber traten, hauptsächlich diejenigen zu schätzen, welche in der Analysis per aequationes niedergelegt waren, von denen aber brieflich auch Leibniz Kenntniss hatte. Das war vor allen Dingen die Binomialreihe, das war die Anwendung von sowohl numerischen als nach steigenden oder fallenden Potenzen einer allgemeinen, kleiner oder grösser als die Einheit angenommenen Grösse verlaufenden Reihen zur Auflösung von Gleichungen. In den Principien war es die Mechanik der Kräfte, welche im umgekehrten Quadrate der Entfernungen ihre Wirksamkeit ausüben. Anderes hatte Newton da und dort versprochen, hatte er als in seinem Besitze zu

[1]) *Lineae parallelae sunt, quae ad punctum infinite distans tendunt.* Weniger deutlich ist das Gleiche auch schon in dem an das 18. Lemma sich anschliessenden Scholium ausgesprochen: *E punctis quatuor A, B, C, D possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figurae, quae ad puncta illa convergunt, evadere parallela.*

verstehen gegeben und die Glaubwürdigkeit seiner Aussage durch Beispiele unantastbar gemacht, aber bekannt gemacht hatte er es nicht, weder im grossen noch im kleinen Kreise, und dass er nun gar über einen Algorithmus der Infinitesimalrechnung verfüge, konnte kein Mensch ahnen. Erst 1693 änderte sich dieses, wie wir im 92. Kapitel sehen werden.

Leibnizens Veröffentlichungen dagegen nahmen einen nur immerfort beschleunigten Gang an, und es ist noch Eines, was zu betonen ist. Leibniz hat eine Schule hervorgebracht. In England können wir ihr Craig (S. 188) beirechnen. In Deutschland und in Frankreich jubelte man den neuen Entdeckungen zu, drängte man sich heran, das neue Arbeitsmittel der Differential- und Integralrechnung gebrauchen zu lernen, gab man demselben durch diesen vielseitigen Gebrauch immer grössere Vollkommenheit.

Machen wir uns mit den Leibnizischen Veröffentlichungen bekannt. Sie liessen zunächst etwas auf sich warten. Wir wissen (S. 28), dass Leibniz im October 1687 jene grosse Studienreise nach Italien antrat, welche ihn bis 1690 von Hannover fernhielt, und welche jeder Arbeit auf einem anderen Gebiete als dasjenige war, dem zu Liebe er seine Reise von Bibliothek zu Bibliothek, von Archiv zu Archiv machte, sich mindestens nicht förderlich erweisen konnte. Ob Leibniz auf dieser Reise das Exemplar der Principien erhielt, welches Newton ihm sofort nach dem Erscheinen zuschicken liess[1]), wissen wir ebensowenig als wir den Grund kennen, warum Newton fortgesetzt Vermittler für solche Sendungen in Anspruch nahm. Möglicherweise war es das vom Verfasser ihm geschenkte Exemplar, welches Leibniz in Rom erhielt, wo er 1688 sich aufhielt[2]). Vorher kannte er nur eine Besprechung der Principien in den A. E. vom Juni 1688. Die kurzgefasste Sprache dieses Berichtes[3]), welcher, ohne ein lobendes oder tadelndes Urtheil beizufügen, die Hauptpunkte deutlich hervorhebt, hat zur Vermuthung geführt, es sei hier eine Selbstanzeige aus Newtons Feder zum Abdrucke gebracht. Eine Randnote des Heidelberger Exemplars der A. E. nennt freilich Christoph Pfautz als den Berichterstatter, aber eine Vereinigung beider Ansichten ist nicht unmöglich. Pfautz gehörte zu dem engsten Redactionskreise der A. E. Er war 1680 mit Mencke

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 309: *Quam primum Liber Newtoni lucem vidit, exemplar ejus D. Nicolao Fatio datum est, ut ad Leibnitium mitteretur* (aus einem von Newton herrührenden Aufsatze). [2]) Leibniz VI, 189: *Après avoir bien considéré le livre de M. Newton, que j'ai vu à Rome pour la première fois, j'ai admiré comme de raison quantité de belles choses qu'il y donne.* [3]) A. E. 1688 pag. 303.

in England und Holland gewesen, um Mitarbeiter für die Zeitschrift zu werben, zu deren Herausgabe damals die ersten Vorbereitungen getroffen wurden. Vielleicht waren damals unmittelbare oder mittelbare Beziehungen zu Newton angeknüpft worden, vielleicht fügte dieser deshalb dem Buche, welches er zur Besprechung einsandte, schriftliche Bemerkungen bei, was er für neu und wichtig halte, und Pfautz dachte dem Verfasser des Werkes wie den Lesern der Zeitschrift sich gleichmässig gefällig zu erweisen, indem er von jenen Bemerkungen umfassenden Gebrauch machte.

Aber gleichviel! Jedenfalls las Leibniz auf der Reise jenen Bericht, den er also früher als das Werk selbst erhalten haben muss. Das geht aus einem Aufsatze *De lineis opticis et alia*[1]) hervor, den Leibniz im Januarhefte 1689 der A. E. veröffentlichte, und der mit der Erklärung anfängt, er sei schon lange auf der Reise und mit Durchstöbern von Archiven beschäftigt, da habe ihm ein Freund einige Monatshefte der A. E. geschickt. Im Juniheft 1688 sei ihm der Bericht über die Principien Newtons aufgefallen, den er heisshungrig verschlungen habe. Eine weitere Bestätigung ist in dem Aufsatze *Tentamen de motuum coelestium causis*[2]), der im Februarhefte 1689 der A. E. Abdruck fand, zu finden. In ihm gelangte Leibnitz zur Behauptung, die Planeten würden von der Sonne in verschiedenem Maasse, aber jedesmal im quadratischen Verhältnisse ihrer Sonnennähe angezogen[3]), eine Wahrheit, welche, wie er aus dem Berichte in der Zeitschrift ersehe, auch von Newton erkannt worden sei, wenn der Bericht auch darauf die Auskunft schuldig bleibe, wie Newton zu jenem Satze gelangte[4]).

Leibniz bediente sich zur Ableitung seiner Sätze hier der Differentialrechnung und benutzte die Gelegenheit, sich über deren Grundgedanken zu äussern[5]): „Ich nahm beim Beweise unvergleichbar kleine Grössen an, z. B. den Unterschied zweier nahezu übereinstimmender Grössen[6]), der mit den Grössen selbst unvergleichbar ist. So kann nämlich solches, wenn ich nicht irre, am deutlichsten auseinandergesetzt werden. Will also Jemand Unendlichkleines nicht anwenden, so kann er so Kleines annehmen, als ihm genügend scheint, damit es unvergleichbar werde, und einen Fehler hervorbringe, der nicht ins Gewicht falle, oder kleiner sei als ein gegebener.

[1]) Leibniz VII, 329—331. [2]) Ebenda VI, 144—161. [3]) *Planeta idem attrahitur a Sole diversimode, et quidem in duplicata ratione viciniarum.* [4]) Ebenda VI, 157: *Vides hanc propositionem jam tum innotuisse viro celeberrimo Isaaco Newtono, ut ex relatione Actorum apparet, licet inde non possum judicare quomodo ad eam pervenerit.* [5]) Ebenda VI, 151. [6]) *duarum quantitatum communium.*

Wie die Erde für einen Punkt, der Erddurchmesser für eine unendlich kleine Linie gehalten wird, sofern man den ganzen Himmel betrachtet, so kann bewiesen werden, dass ein Winkel, dessen Schenkel eine Basis zwischen sich haben, die gegen sie selbst unvergleichbar klein ist, ein unvergleichbar kleiner sein muss, und dass der Unterschied der beiden Schenkel mit den Schenkeln, die den Unterschied aufweisen, nicht vergleichbar ist.“ Etwas später nennt er einander entsprechende Sehnen, Bogen, Tangenten als Grössen mit ihnen selbst nicht vergleichbaren Unterschieden. „Sind sie selbst unendlich klein, so sind ihre Unterschiede unendlich mal unendlich klein[1]) ... Es gibt unendlich viele Grade sowohl des Unendlichen als des Unendlichkleinen.“

Das Aprilheft 1689 der A. E. brachte abermals einen Aufsatz des nun, nachdem er wieder angefangen hatte mathematisch zu arbeiten, unermüdlichen Reisenden. Es war der vierte seit vier Monaten, denn im Januarhefte hatte sich an den schon erwähnten über optische Linien ein solcher über das widerstehende Mittel angeschlossen. Der Aufsatz im Aprilhefte beschäftigte sich mit der Isochrone. Wir wissen (S. 134), dass dieser Name durch Pardies der Cycloide beigelegt worden war, weil ein Körper, von welchem Punkte der nach unten gewölbt gezeichneten Cycloide aus er längs derselben in fallende Bewegung geräth, genau in der gleichen Zeitdauer den Weg bis zum Tiefpunkte durchmisst. Das ist nicht die Bedeutung, in welcher Leibniz sich des gleichen Wortes bediente. Er wollte unter Isochrone diejenige Curve verstanden wissen[2]), in welcher ein schwerer Körper in dem Sinne gleichförmig fällt, dass er in gleichen Zeiträumen dem Erdboden um einen gleichen senkrechten Abstand sich nähert. Er hatte die Aufgabe, die Curve zu finden, welche die genannte Eigenschaft besitze, im Septemberhefte 1687 einer anderen Zeitschrift, der *Nouvelles de la Republique des Lettres*, gestellt, und Huygens hatte sofort im Octoberhefte die Auflösung nachfolgen lassen, die gesuchte Curve sei die semicubische Parabel[3]). Auch Leibniz gab nun in den A. E. die damit übereinstimmende eigene Auflösung sammt deren Beweis[4]), was Huygens unterlassen hatte. Infinitesimalbetrachtungen kommen hier nicht vor. Schon im Januar 1688 hatte übrigens Leibniz die Nummer mit der von Huygens eingerückten Auflösung erhalten und sofort von Pilsen aus, wo er sich grade befand, einen Beweis an die Nouvelles de la Republique des Lettres abgehen lassen, der nicht aufgenommen wurde, vielleicht nicht angekommen ist[5]).

[1]) *infinities infinite parvae.* [2]) Leibniz V, 234. [3]) Ebenda V, 237.
[4]) Ebenda V, 234—237. [5]) Ebenda V, 238—240.

Wir überspringen die in den Jahrgängen 1690 und 1691 der A. E. enthaltenen Aufsätze Leibnizens, um unter den acht Veröffentlichungen von 1692 bei nur dreien zu verweilen.

Der Aufsatz von der Curve, welche aus den Durchschnittspunkten unendlich vieler, nach einem bestimmten Gesetze gezogener Curven entsteht und sie alle berührt, *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente*[1]) führte zwei neue folgewichtige Begriffe in die Geometrie ein, den der krummlinigen Coordinaten und den der Einhüllenden. Die ersteren sind allerdings nur beiläufig erwähnt, aber deshalb nicht mit geringerer Deutlichkeit. „Unter Coordinaten“[2]), sagt Leibniz, „verstehe ich nicht nur Gerade, sondern beliebige Curven, wenn nur ein Gesetz vorhanden ist, nach welchem, sofern ein bestimmter Punkt einer als Coordinate gegebenen Linie gleichfalls gegeben ist, diesem Punkte entsprechend eine Linie gezogen werden kann, welche dem anderen Systeme der als Coordinaten gewählten angehört.“ Hauptgegenstand ist aber die Einhüllende[3]), als Ort der Durchschnittspunkte für je zwei nächste Linien[4]). Sei die Gleichung einer Curve gegeben, welche nicht blos x und y als Ordinate und Abscisse, die man gemeinschaftlich Coordinaten nennen könne, sondern auch Parameter a, b enthalte, so müsse man, um zur Berührungslinie zu gelangen, diese Gleichung differentiiren[5]) und die Parameter dabei als constant[6]) betrachten. Beim Uebergang von einer Curve zu einer anderen müsse man aber einen Parameter, a oder b, als differentiirbar[7]) betrachten, und zwar immer nur je einen, wenn auch in der Curvengleichung mehrere Parameter vorkommen. So finde sich die Linie, welche alle Curven, jede in dem ihr entsprechenden Punkte berühre[8]). Deutlicher, sollten wir meinen, spreche kein modernes Lehrbuch der Differentialrechnung sich aus.

Aus einem zweiten Aufsatze, der über Krümmungsverhältnisse, Osculation und dergleichen handelt, erwähnen wir nur einen Satz, nämlich den[9]), dass von einer Evoluten andere und andere Curven sich abwickeln, je nachdem der Faden, dessen Endpunkt die Curve beschreibt, von verschiedener Länge ist. Alle diese Curven seien

[1]) Leibniz V, 266—269. [2]) *Ego sub ordinatim ductis non tantum rectas, sed et curvas lineas qualescunque accipio, modo lex habeatur, secundum quam dato lineae cuiusdam datae (tanquam ordinatricis) puncto, respondens ei puncto linea duci possit, quae una erit ex ordinatim ducendis seu ordinatim positione datis.* [3]) *linea concursuum.* [4]) *lineae proximae.* [5]) *opus est aequationem ejus curvae differentiare.* [6]) *magnitudine constantes.* [7]) *differentiabilis.* [8]) *tangens unica infinitarum curvarum ordinatim ductarum unicuique in suo puncto respondenti occurrens.* [9]) Leibniz V, 280.

parallel, d. h. der Abstand je zweier sei überall derselbe, und die Gerade, welche zu der einen Curve senkrecht stehe, verhalte sich ebenso zu den anderen, was als allgemeinste Definition des Parallelismus zu gelten habe[1]).

Drittens gehört dem Jahre 1692 die Auflösung einer Aufgabe an, welche viel von sich reden machte. Vincenzo Viviani (Bd. II, S. 607) hatte unter angenommenem Namen von Florenz aus diese Aufgabe in die Welt geschickt, welche nach dem Orte ihrer Herkunft als Florentiner Aufgabe bezeichnet zu werden pflegt. Der Name, unter welchem ihr Urheber sich verbarg, lautete *autore D. Pio Lisci Pusillo geometra*, ein Anagramm von *autore postremo Galilei discipulo*, und als letzten Schüler Galilei's liebte Viviani sich zu bezeichnen. Die Aufgabe selbst bestand darin, aus einer Halbkugel (Figur 39) rings an der Grundfläche herum vier gleiche Oeffnungen herauszubrechen, so dass die noch übrige krumme Oberfläche genau quadrirbar sei[2]). Das Flugblatt, welches die gedruckte Aufgabe in alle Länder hinaustrug, war vom 4. April 1692 datirt, Leibnizens gleichfalls gedrucktes Antwortschreiben trägt das Datum des 28. Mai 1692. Rascher kann man die Erledigung sich kaum denken, und wirklich war Leibnizens Auflösung die erste, welche zur Veröffentlichung kam, und dass er so schnell damit fertig wurde, verdankte er seiner Infinitesimalrechnung, die hier erstmalig zur Flächenbestimmung einer gekrümmten Oberfläche verwerthet wurde. Viviani's eigene Auflösung, welche aber die Allgemeinheit der Leibnizischen Untersuchung[3]) nicht erreicht, ist folgende.

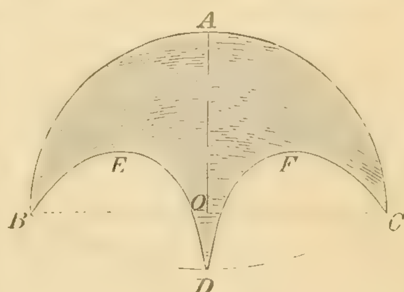


Fig. 39.

Durch den Kugelmittelpunkt O ist der Durchmesser BC gezogen, ebenso der Halbmesser OA senkrecht zur Grundebene $BDCO$. In der Ebene $BACO$ wird über BO und CO als Durchmesser je ein Halbkreis beschrieben, und durch jeden derselben ein grader Halbcylinder bestimmt. Diese Halbcylinder schneiden auf der vorderen Ansicht der Halbkugel die Oeffnungen BDE, CDF heraus, und ganz ähnliche Oeffnungen entstehen selbstverständlich auf der Rückseite. Der übrig bleibende Theil der Halbkugeloberfläche ist quadrirbar.

---

[1]) *quae dudum mihi fuit definitio parallelismi in genere sumti.* [2]) *ut his detructis superstes curva superficies tetragonismi vere geometrici sit capax.* [3]) Leibniz V, 270—278.

War diese Aufgabe als geistreiche geometrische Spielerei zu betrachten, so brachte Leibniz im nächstfolgenden Jahre, 1693, die Wissenschaft wieder um einen gewaltigen Schritt vorwärts, indem er das wirklich ausführte, was bisher sowohl durch ihn selbst als durch Newton brieflich nur als ausführbar bezeichnet zu werden pflegte: die Integration von Differentialgleichungen in Reihenform[1]. Leibniz bedient sich dazu der Methode der unbestimmten Coefficienten. Ein Beispiel bietet die Entwickelung der Sinusreihe. Sei y ein Kreisbogen vom Halbmesser a und x dessen Sinus, so nimmt Leibniz an, die Reihenentwicklung heisse $x = by + cy^3 + ey^5 + \cdots$. Warum in der Reihe nur Potenzen von y mit ungraden Exponenten angenommen werden sollen, begründet Leibniz nicht weiter. Vermuthlich stand er dabei unter dem Einflusse der Thatsache, dass er die Reihe schon kannte, zu welcher er gelangen wollte, denn dass er gewusst hätte, es sei $\sin(-y) = -\sin y$ und daraus geschlossen hätte, nur Glieder mit Potenzen von ungradem Exponenten dürften vorkommen, weil nur dann die ganze Reihe das entgegengesetzte Vorzeichen annehme, wenn y in $-y$ übergehe, daran ist nicht zu denken. Nun finde, sagt Leibniz, die Differentialgleichung statt:

$$a^2dy^2 = a^2dx^2 + x^2dy^2.$$

Auch ihre Ableitung schenkt sich Leibniz. Von ihrer Richtigkeit kann man sich durch Differentiation der Gleichung $\frac{x}{a} = \sin\frac{y}{a}$ überzeugen, in welcher x, y, a Längen bedeuten, als deren Einheit a gewählt wird. Die gleichviel woher bekannte Differentialgleichung differentiirt Leibniz abermals, indem er bei dieser neuen Differentiation dy als constant annimmt. So erhält er $0 = 2a^2dx\,ddx + 2x\,dx\,dy^2$ und $a^2ddx + x\,dy^2 = 0$, beziehungsweise $x + a^2\frac{ddx}{dy^2} = 0$. Aber die Differentiation der für x angenommenen Reihe liefert

$$\frac{dx}{dy} = b + 3cy^2 + 5ey^4 + \cdots \quad \text{und} \quad \frac{ddx}{dy^2} = 2\cdot 3cy + 4\cdot 5ey^3 + \cdots.$$

Folglich muss stattfinden

$$[by + cy^3 + \cdots] + a^2[2\cdot 3cy + 4\cdot 5ey^3 + \cdots] = 0.$$

Für b fehlt es an Mittel zur Bestimmung, und Leibniz hilft sich mit einem: man nehme an[2] $b = 1$. Dann ist aber

$$c = \frac{-b}{2\cdot 3\cdot a^2} = -\frac{1}{2\cdot 3a^2}, \quad e = \frac{-c}{4\cdot 5\cdot a^2} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^4} \text{ u. s. w.},$$

also

$$x = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3a^2} + \frac{y^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^4} - \cdots.$$

---

[1]) Leibniz V, 285—288. [2]) *assumatur.*

Das Wichtigste an diesem Aufsatze ist neben der schon hervorgehobenen thatsächlichen Ausführung des vorher nur theoretisch für ausführbar Gehaltenen die hier vorgenommene abermalige Differentiation einer gegebenen Differentialgleichung. Daneben machen wir aufmerksam darauf, dass Leibniz trigonometrische Functionen differentiiren konnte, und in der Bezeichnung, in welcher Leibniz stets Meister war, auf das Ueberspringen der Coefficienten von c nach e, offenbar weil d ausschliesslich als Differentiationszeichen in Anwendung kommen sollte. In einer geometrisch ausgesprochenen Aufgabe, deren Differentialgleichung $a\frac{dz}{dy} + z - y = 0$ heisst, welche alsdann wieder integrirt wird, indem die Annahme $z = by + cy^2 + ey^3 + fy^4 + \cdots$ als Ausgangspunkt dient, kommt das Wort Subtangente[1]) vor, welches als Huygens eigenthümlich bezeichnet wird und in der That vor Kurzem von diesem eingeführt worden war (S. 142).

Ein anderer Aufsatz von 1693 brachte wieder eine neue geometrische Aufgabe auf die wissenschaftliche Tagesordnung[2]). Claude Perrault (1613—1688), ein vielseitig gebildeter Pariser Arzt, der als Musiker, als Mechaniker, als Architekt, als Herausgeber des Vitruvius (S. 9) bekannt ist, stellte vielen Mathematikern, zuletzt auch Leibniz, die von ihm selbst, wie er eingestand, nicht bewältigte Aufgabe, die Curve zu finden, welche ein an dem Ende B eines Fadens AB befestigtes Gewicht beschreibt, während das andere Fadenende A längs einer geraden Linie hingeführt wird. Als Beispiel benutzte Perrault dabei seine silberne an einer Kette befestigte Taschenuhr, welche er in der vorgeschriebenen Art über den Tisch zog. Leibniz erkannte im Septemberhefte 1693 der A. E. die geometrische Definition der Curve in der Eigenschaft, dass die Berührungslinie, von der Curve bis zum Durchschnitte mit einer gegebenen Geraden gemessen, einen unveränderlichen Werth habe, und er sah darin eine inverse Tangentenaufgabe. Er erkannte auch die logarithmische Natur der Curve, versagte sich aber ein weiteres Eingehen auf die Aufgabe, weil Huygens, wie aus einem Briefe desselben hervorgehe, mit Aehnlichem sich beschäftige. Es war auch an dem. Huygens fasste die Aufgabe allgemeiner und gab der erzeugten Curve den Namen *Tractoria*, weil sie als Weg eines gezogenen Punktes auftritt, während der Endpunkt des den Zug vermittelnden Fadens einen selbst vorgeschriebenen Weg durchläuft. Wir werden noch Gelegenheit haben, von den Tractorien zu reden.

---

[1]) *subtangentialis.* [2]) Leibniz V. 294—301. Vergl. Klügel, Mathematisches Wörterbuch V. 90—91.

Wir kommen zu einem Aufsatze von 1694: *Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione*[1]). Er ist die Fortsetzung jenes Aufsatzes von 1692, in welchem (S. 204) die Einhüllenden erklärt waren. Leibniz ging jetzt über die damals allein gegebene theoretische Erklärung hinaus, indem er das erste wirkliche Beispiel berechnete. Die Kreisgleichung $(x-b)^2+y^2=ab$ enthält den als veränderlich angesehenen Parameter b. Differentiirt man sie nach b, so wird $2b=2x+a$ und setzt man $b=x+\frac{a}{2}$ in die Kreisgleichung ein, so verwandelt sie sich in $y^2=a\left(x+\frac{a}{4}\right)$ d. h. in eine Parabelgleichung. Die Parabel ist also die Einhüllende jener Schaar von Kreisen.

Die hier genannten Aufsätze sind bei weitem nicht alle, welche Leibniz in der Zeit bis zum Jahre 1700 dem Drucke übergab. Es sind vielmehr nur diejenigen ausgewählt, in welchen er den Anstoss zu Betrachtungen gab, die sich als folgewichtig erwiesen.

Wir haben (S. 201) auf den Schule machenden Einfluss der Leibnizischen Arbeiten zum Voraus hingewiesen. Wir müssen diesem Einflusse nachgehen. Da bietet zuerst und von selbst die Frage sich dar: wie stellte sich Huygens zu der neuen Lehre? Er war in Paris Leibnizens Ermunterer, sein erster Berather in mathematischen Dingen gewesen. Als die Ereignisse sie körperlich trennten, blieben beide grossen Männer geistig zusammen. Nicht weniger als 61 zwischen ihnen gewechselte Briefe sind bekannt[2]), und sie reichen bis zu Huygens Tode. Nur eine grosse Lücke von dem Jahre 1680 bis zu 1688 ist ohne solchen veröffentlichten Brief. Gerade in die Mitte dieser Zeit fällt Leibnizens Aufsatz von 1684. Zwar hatte Leibniz schon in dem letzten Briefe vom Januar 1680 dem Freunde an einem Beispiele den Nutzen seiner Methode der Tangenten oder der grössten und kleinsten Werthe zu beweisen gesucht[3]), aber eine Antwort ist nicht erfolgt, uns wenigstens nicht bekannt.

Hat Huygens nicht antworten mögen, und hat Leibniz dieses Schweigen übel genommen, oder ist irgend Anderes Schuld an dem zeitweisen Abbruche des Briefwechsels, jedenfalls fand er statt, und erst nach acht Jahren, im Januar 1688, schrieb Leibniz neuerdings, um seinen Dank auszusprechen, dass Huygens es der Mühe werth gefunden hatte, sich mit der Aufgabe der Isochronen (S. 203) zu beschäftigen. Huygens unterliess — er sagt selbst, er wisse nicht weshalb — auch dieses Mal zu antworten, bis zum 8. Februar 1690. Dann dauerte es etwa ein halbes Jahr, bis Leibniz wieder schrieb,

[1]) Leibniz V, 301—306. [2]) Ebenda II, 11—208. [3]) Ebenda II, 38.

und in diesem Briefe stellte er gradezu die Anfrage, was Huygens von seiner Differential- und Integralrechnung denke?

Binnen Monatsfrist erfolgte diesmal die Antwort. Huygens gesteht zu[1]), er habe bisher die Aufsätze in der Leipziger Zeitschrift nicht so genau studirt, dass er in ihr Verständniss eingedrungen sei; er habe immer geglaubt, mit seinen eigenen Methoden ebensoweit zu kommen. Jetzt habe aber Leibniz durch seine Schilderung dessen, was er zu leisten im Stande sei, ihm Lust gemacht, sich mehr dem neuen Calcul zuzuwenden.

Im October hat er es gethan[2]). Er gibt zu, die Differentialrechnung sei gut und nützlich, aber er beharrt dabei, sie sei nicht unentbehrlich. Habe er doch ohne dieselbe vielfach die gleichen Ergebnisse erzielt wie Leibniz. Gewiss, antwortet nun Leibniz im October 1690, die Zeichen dx oder dy seien nicht unentbehrlich. Huygens sei voll berechtigt, sie durch irgend welche Buchstaben zu ersetzen. Aber auf Eines wolle er doch aufmerksam machen[3]). Würde man wohl, wenn man statt x^2 und x^3 etwa m und n schriebe, ebenso durchsichtig mit diesen letzteren Buchstaben als mit dem, wofür sie gesetzt sind, rechnen? Genau in derselben Weise verhalte es sich mit dx, mit ddx.

Diese feine Bemerkung blieb wirkungslos. Im Mai 1691 verwahrt sich Huygens[4]) gegen den Calculus differentialis und wünscht, Leibniz solle ihm nicht wie an einen darin Eingeweihten schreiben. Am 1. September 1691 bezeugt er Neigung, ihn nun wirklich kennen zu lernen[5]). Am 17. September 1693 nennt er sich mässig eingeweiht[6]), mit Ausnahme der ddx, die er noch nicht verstehe. Ja, am 27. December 1694, in dem letzten Briefe, den Huygens überhaupt an Leibniz richtete, erklärt er noch einmal[7]), die ganze Methode bleibe ihm nie gegenwärtig, wenn er eine Zeit lang aufgehört habe sich mit ihr zu beschäftigen. Wir werden den fremden Einfluss noch kennen lernen, unter welchem sich Huygens im Ganzen so abweisend verhielt. Jedenfalls hat er an der Fortbildung der Leibnizischen Lehre nicht theilgenommen.

Ganz anders stellten sich dazu die Brüder Jakob und Johann Bernoulli (S. 85). Der Leibnizische Aufsatz von 1684 hatte deren Wissbegier geradezu auf die Folter gespannt. Es ist nicht an dem, was Johann in einem nachgelassenen Abrisse des eigenen Lebens erzählt hat[8]), dass beide Brüder erst 1687 durch einen Zufall mit

[1]) Leibniz II, 45. [2]) Ebenda II, 47. [3]) Ebenda II, 49. [4]) Ebenda II, 93. [5]) Ebenda II, 100. [6]) Ebenda II, 162. [7]) Ebenda II, 203—204. [8]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz II, 71—94. Die hier beigezogene Stelle S. 72.

jener Abhandlung bekannt geworden seien und binnen weniger Tage das ganze Geheimniss ergründet hätten. Es dauerte im Gegentheil Jahre, bis Jakob zuerst, dann unter dessen Leitung Johann jenes mit orakelhafter Kürze verfasste Schriftstück verstehen lernten. Hat doch Leibniz 1696 in einem Briefe an Johann[1]) es Jakob zum Ruhme angerechnet, diesen seinen Bruder der Mathematik zugeführt zu haben, und Johann verwahrte sich mit keinem Worte gegen diese Bemerkung, so ihre Wahrheit anerkennend.

Im December 1687 wandte Jakob sich brieflich an Leibniz und bat um Auskunft über eine andere Abhandlung von 1684 über den Widerstand fester Körper, bat zugleich um Einführung in jene höhere Geometrie, welche er besitze[2]). Aber Leibniz war damals schon von Hannover abgereist, und der lange Zeit verlegte Brief kam ihm erst spät in die Hände, so dass die Antwort bis zum September 1690 auf sich warten liess. Grade diese lange mangelnde Unterweisung gereichte zum Glück der neuen Rechnungsarten. In der Zwischenzeit war es Jakob Bernoulli gelungen, von sich aus zum Verständniss zu gelangen, und diese Anstrengung befähigte ihn sowie den Bruder auch weiter auf selbstgebahnten Wegen fortzuschreiten.

Schon im Maiheft 1690, mithin vier Monate vor Leibnizens Antwortschreiben, brachten die A. E. Jakob Bernoullis Beantwortung der Aufgabe von den Isochronen[3]). Sie ergänzte das, was Leibniz selbst 1689 in seinem Beweise verschwiegen hatte, die eigentliche analytische Herleitung des Ergebnisses. Jakob Bernoulli stellte die Differentialgleichung der Isochrone in der Form

$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$$

her, welche er mittels folgenden ganz im Leibnizischen Geiste sich bewegenden Gedankenganges sich verschaffte. Ist (Figur 40) BFG die gesuchte Curve, und sind FH und DG zwei zu gleichen unendlich kleinen Zeiten durchlaufene Bögen, so muss nach der Definition der Isochrone $LH = IG = dy$ sein, während $LF = dx$,

$$FH = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ist. Nach den Fallgesetzen verhalten sich die Fallhöhen, wie die Quadrate der erreichten Geschwindigkeiten, d. h.

Fig. 40.

$$CG : EH = DG^2 : FH^2 = DG^2 \times LH^2 : FH^2 \times IG^2.$$

1) Leibniz II, 276. 2) Ebenda III, 13. 3) Jac. Bernoulli *Opera* I, 421—424.

Nun verhält sich

$$DG^2 : IG^2 = MG^2 : CG^2, \quad LH^2 : FH^2 = CG^2 : GP^2,$$
$$DG^2 \times LH^2 : IG^2 \times FH^2 = MG^2 : GP^2,$$

also

$$CG : EH = MG^2 : GP^2.$$

Bei

$$CG = a, \quad MG = b, \quad EH = y, \quad AE = x$$

ist

$$a : y = b^2 : GP^2,$$

mithin

$$GP^2 = \frac{b^2 y}{a}.$$

Daneben ist

$$LH : FH = CG : GP,$$

also

$$GP = \frac{CG \times FH}{LH} = \frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} \quad \text{und} \quad GP^2 = a^2 \frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}.$$

Die beiden Werthe von GP^2 liefern einander gleichgesetzt eben jene Differentialgleichung

$$dy\sqrt{b^2 y - a^3} = dx\sqrt{a^3}.$$

Mithin, schloss Bernoulli dann weiter, sind auch die Integrale jener Ausdrücke einander gleich[1]):

$$\frac{2b^2 y - 2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2 y - a^3} = x\sqrt{a^3}.$$

Das ist das erste Vorkommen des Wortes Integral. Johann hat zwar in der erwähnten Selbstbiographie den Anspruch auf die Erfindung des Wortes erhoben, aber es fällt schwer ihm zu glauben. Jakob hat in Veröffentlichungen von 1689, von 1691, von 1692 den jüngeren Bruder bei jeder thunlichen Gelegenheit genannt, er hätte es auch 1690 gethan, wenn der damals neue Name Integral, in welchem man schliesslich keine Erfindung von irgend welcher Tragweite erkennen kann, von Jenem hergerührt hätte.

Jakobs Aufsatz schloss mit einer Gegenaufgabe: die Gestalt eines biegsamen an zwei Punkten frei aufgehängten Seiles zu finden. Die neue, oder auch nicht neue Aufgabe, denn Galilei hatte sich ihr schon wenn auch ohne Erfolg zugewandt (Bd. II, S. 639), fand verschiedene Bearbeiter. Leibniz, Huygens, Johann Bernoulli lösten sie. Johann Bernoulli, der inzwischen Basel verlassen hatte, machte mit dieser Auflösung[2]) im Junihefte 1691 der A. E. den ersten ganz selbständigen Schritt in die Oeffentlichkeit, welche von nun an von beiden Brüdern durch mit bewundernswerther Schnelligkeit auf einander folgenden Untersuchungen von grösster

[1]) *Ergo et horum Integralia aequantur.* [2]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 48.

Tragweite überrascht wurde. Der Name *catenaria*, französisch *chainette*, für die von Jakob Bernoulli verlangte Curve scheint von Leibniz herzurühren.

Unter denen, welche die Curve ermittelten, haben wir Huygens zu nennen gehabt, ein Beweis, dass hier auch mit anderen Hilfsmitteln als denen der Differentialrechnung auszukommen war. Das war bei den Segelcurven nicht mehr der Fall, mit welchen sich Jakob und Johann Bernoulli befassten, und über welche fast ein Streit zwischen beiden Brüdern hätte entstehen können. Jakob hatte, das wissen wir durch Johann, mit letzterem Briefe über die Segelcurve gewechselt. Im April 1692 veröffentlichte Johann im Journal des Sçavans von Paris (wo er sich gerade aufhielt) eine Notiz[1]) über die Identität der Segelcurve mit der Kettenlinie. Johann machte dabei nicht gerade einen Ausfall gegen Jakob, aber er gab doch zu verstehen, dass dieser daran verzweifelte, mit der Differentialgleichung der Segelcurve $a \cdot ds \cdot ddx = dy^3$, wo s wie später immer die Bogenlänge bedeutete, etwas anfangen zu können, während aus seiner Arbeit über die Kettenlinie jene Gleichung unschwer herauszulesen gewesen sei. Jakob gab auf diese Aeusserung fürs erste keine Antwort, und als Johann Ende 1692 nach Basel zurückkehrte, fand er bei dem Bruder das liebevollste Entgegenkommen. Wir erwähnen die Sache nur, um die wachsende Selbstschätzung Johanns dem älteren Bruder und früheren Lehrer gegenüber schon jetzt zu kennzeichnen, eine Selbstschätzung, welche fast als Ueberhebung zu bezeichnen wäre, da Jakobs grosse wissenschaftliche Verdienste Johann nicht unbekannt sein konnten.

Sie waren von mannigfaltiger Natur. Ein Aufsatz im Junihefte 1691 der A. E. beschäftigte sich mit der logarithmischen Spirale[2]), und im Maihefte 1692 kam Jakob auf eben diese Curve zurück[3]), welche er die wunderbare Spirale, *spira mirabilis*, nannte. Er erkannte ihre Eigenschaft, durch verschiedene optische und geometrische Entstehungsarten Curven derselben Gattung hervorzubringen, und er wünschte deshalb, man solle sie dereinst auf seinem Grabsteine anbringen und ihr die Umschrift geben *Eadem mutata resurgo*, als dieselbe stehe ich verwandelt wieder auf. Dieser letztere Wunsch wurde buchstäblich erfüllt[4]). Eine andere Untersuchung, mit welcher Jakob Bernoulli sich beschäftigte, war die der elastischen Curve[5]). Kurz darauf erfand er die Lemniscate[6]). Eine andere Arbeit galt

---

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 59. [2]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 442 sqq. [3]) Ebenda I, 491. [4]) A. E. 1706, pag. 43. [5]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 576 sqq. und 639 sqq. [6]) Ebenda I, 609.

der Complanation conoidischer und sphäroidischer Oberflächen[1]), und in ihr scheint der Kunstausdruck Complanation zum ersten Male gebraucht worden zu sein.

Ueber die Reihenlehre hat, wie wir uns erinnern (S. 87—92), Jakob Bernoulli sich mehrfach verbreitet. Die wichtigeren Ergebnisse, zu welchen er gelangte, sind diejenigen, zu welchen er keiner Differentialrechnung bedurfte, aber er hat auch von dieser letzteren Gebrauch gemacht und in den Endabschnitten jener Untersuchungen Quadraturen und Rectificationen mittels Reihen vollzogen.

Zu Leibniz trat Jakob Bernoulli zweimal in einen Gegensatz. Im Januarhefte 1691 der A. E. sprach er die Meinung aus[2]), Leibniz dürfte wohl seine grundlegenden Gedanken aus Barrow haben, aber schon im Junihefte des gleichen Jahrganges[3]) nahm er den Ausspruch wieder so weit zurück, dass er neben der Aehnlichkeit beider Auffassungen auch deren Verschiedenheit hervortreten liess und Leibniz dabei hoch über Barrow stellte.

Der zweite Gegensatz war sachlicher Natur. Leibniz hatte (S. 189) 1686 die irrige Meinung ausgesprochen, Osculation bestehe aus zwei Berührungen. Dagegen wandte sich Jakob Bernoulli im Märzheft 1692 der A. E. und widerlegte Leibniz[4]). Zu dessen Ehre dürfen wir weiter berichten, dass er im Septemberhefte seinen Irrthum unumwunden eingestand und seine Dankbarkeit für die Belehrung aussprach[5]). Im Juni 1694 gab dann Jakob Bernoulli[6]) wieder in den A. E. die Formel für den Krümmungshalbmesser $z = ds^3 : dy \cdot ddx$, wo also im Anschlusse an Leibniz y die Abscisse und x die Ordinate bezeichnet.

Aber noch bleiben zwei grosse Arbeitsgebiete zu erwähnen, auf welchen Jakob Bernoulli seine bestverdienten Lorbeeren sich erwarb. Wir haben (S. 87) das eine beiläufig genannt, das der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Jakob Bernoulli hat ein Lehrbuch derselben, *Ars conjectandi*, in nahezu druckfertigem Zustande hinterlassen, dessen Herausgabe sein Neffe Niclaus I Bernoulli 1713 besorgte. Aber gerade deshalb dürfen wir noch nicht darüber reden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat am Anfange des achtzehnten Jahrhunderts, bevor die Ars conjectandi bekannt wurde, Bearbeiter gefunden, deren Leistungen nicht im richtigen Lichte erscheinen würden, wenn wir den Bericht über das mustergiltige Werk von Jakob Bernoulli vorausschickten. Dieser muss daher für den 17. Abschnitt aufgespart bleiben.

---

[1]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 739 sqq. [2]) Ebenda I, 431. [3]) Ebenda I, 453. [4]) Ebenda I, 473 sqq. [5]) Leibniz V, 279—285. [6]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 578.

Das zweite Arbeitsgebiet, welches wir meinen, ist das der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen in einem erweiterteren Sinne, als sie bisher behandelt worden war. Hier ist aber zugleich den einschlagenden Arbeiten von Johann Bernoulli Rechnung zu tragen, und deshalb wenden wir uns diesem, dem jüngeren, vielleicht nicht eben so gründlichen, aber rascher fassenden, mit unglaublicher Leichtigkeit schaffenden Bruder zu.

Allerdings sind in den Jahren, mit welchen wir uns grade hier beschäftigen, die Veröffentlichungen Johanns nicht sehr zahlreich gewesen. Rufen wir uns ins Gedächtniss zurück, dass Johann Bernoulli im Juli 1667 geboren am Ende des Jahrhunderts erst $32\frac{1}{2}$ Jahre alt war, dass er die ersten 23 Jahre bis zum September 1690 in unmittelbarer Nähe und geistiger Abhängigkeit von Jakob Bernoulli zubrachte, und dass, wenn dieser auch nie versäumte, wo es anging, des jüngeren Bruders lobend zu gedenken, doch erst nach 1691 in Paris ein Feld freier, uneingeschränkter Arbeit für den jungen Gelehrten sich öffnete. Dort aber war er durch mannigfaltige Thätigkeit in Anspruch genommen. Förderte der Verkehr mit Pierre Varignon (1654—1722), der an der Redaction des Journal des Sçavans betheiligt war, die Anfertigung wissenschaftlicher Aufzeichnungen für den Druck, so war ein anderer Verkehr von entgegengesetzter Wirkung, der mit dem Marquis de l'Hospital (S. 105). Wir wissen, dass dieser seit 1692 in Briefwechsel mit Leibniz stand. In einem Schreiben vom letzten November 1694 hat er ihm seinen mathematischen Bildungsgang auseinandergesetzt[1]).

Vor etwa 6 Jahren, das wäre also 1688 gewesen, sei ihm die Abhandlung von 1684 in die Hände gekommen und habe ihm so ungemein gefallen, dass er sofort sich daran machte Einiges niederzuschreiben, um jene Lehren ausführlicher darzustellen und zu beweisen. Freunde, unter Anderen Pater Malebranche, hätten die Entwürfe gesehen und zur Veröffentlichung gedrängt. Eben diese Freunde hätten dem Abbé Catelan davon erzählt, der nun, um zuvorzukommen, in aller Eile ein Büchelchen verfasste: *Science generale des lignes courbes*, in welchem Leibniz gar nicht genannt war, die ganze Methode vielmehr als eine Fortsetzung Descartes'scher Gedanken sich darstellte. Aber Catelan hatte die ganze Sache gar nicht verstanden und Schnitzer begangen, welche nun de l'Hospital in einem Briefe im Journal des Sçavans ihm vorwarf. Darüber entspann sich ein öffentlicher Streit in jener Zeitschrift, den de l'Hospital unter dem von ihm angenommenen Buchstaben G. führte, seinen wahren

[1]) Leibniz II, 250—252.

Namen zurückhaltend. Malebranche, fährt der Erzähler fort, habe seit lange ein kurzes von ihm verfasstes Lehrbuch der Kegelschnitte in Händen, welches er jetzt herauszugeben wünsche. Malebranche habe dazu seine, de l'Hospitals, Erlaubniss erbeten, wie nicht minder auch dazu, am Schlusse beifügen zu dürfen, was er über Differentialrechnung niedergeschrieben habe. Ist dieser Bericht vollständig wahrheitsgetreu, so war demnach de l'Hospital im Herbste 1691, als er mit Johann Bernoulli bekannt wurde, bereits im Besitze der Differentialrechnung, und sein Lehrbuch, von welchem weiter unten die Rede sein wird, war das Ergebniss eigenen Nachdenkens, wenn auch eigenen Nachdenkens über fremde Erfindungen.

Ganz anders erzählt Johann Bernoulli den Lehrgang de l'Hospitals in dem schon einmal von uns erwähnten Abrisse seines Lebens[1]). Johann Bernoulli will 1691 durch Pater Malebranche in Beziehung zu de l'Hospital gekommen sein. Er will ihm den Zugang zu den neuen Methoden geöffnet haben, will ihm schriftliche Aufzeichnungen darüber gegeben haben, ohne vorauszusehen, dass jener beabsichtigen könne sie eines Tages herauszugeben[2]).

Nun ist unzweifelhaft wahr, dass in der Basler Bibliothek eine Handschrift einer Integralrechnung von Johann Bernoulli aufbewahrt wird, welche die Bemerkung trägt[3]), sie sei in Paris zum Gebrauche durch den Marquis de l'Hospital zusammengestellt worden; es ist ferner wahr, dass de l'Hospital ein Lehrbuch der Analysis der unendlich kleinen Grössen, wie der Titel lautete, verfasste; es steht fest, dass Johann Bernoulli sich im Februar 1698 über das Erscheinen dieses Buches als eines an ihm begangenen Plagiates brieflich gegen Leibniz beschwerte[4]); dass er 1704 die Auswerthung von Quotienten, deren Divisor und Dividend zugleich verschwinden, und welche in de l'Hospitals Lehrbuche vorgetragen ist, für sich in Anspruch nahm[5]), dass er endlich 1742, als er die erwähnten Vorlesungen über Integralrechnung im Drucke herausgab, in einer Fussnote[6]) erklärte, die vorausgehenden Vorlesungen über Differentialrechnung unterdrückt zu haben, weil de l'Hospital sie in seine in allen Händen befindliche *Analyse des infiniments petits* aufgenommen habe.

Wenn diese lauten Beschuldigungen geeignet sind de l'Hospital in üblen Ruf zu bringen, so fehlt es doch auch nicht an Vertheidigungsgründen für denselben. Leibniz, der sonst gewohnt war, die

---

[1]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz II, 74—76. [2]) *ne prévoyant pas le dessein qu'il aurait de les publier un jour.* [3]) Rud. Wolf l. c. II, 76 Fussnote 8. [4]) Leibniz III, 480. [5]) A. E. August 1704 und Joh. Bernoulli *Opera* I, 401. [6]) Joh. Bernoulli *Opera* III, 387.

Briefe, welche er erhielt, Punkt für Punkt zu beantworten, ging über die Anklage von 1698 stillschweigend hinweg. Er wollte, kann man sagen, in einen Streit zwischen zwei wissenschaftlichen Freunden nicht hineingezogen werden. Das ist ja möglich, aber jedenfalls nahm er nicht Partei für Johann Bernoulli. Als der Artikel in den A. E. von 1704 erschien, war de l'Hospital soeben gestorben, überdies handelte es sich dabei um eine Einzelheit, welche Johann Bernoulli ganz gut de l'Hospital und anderen Franzosen um 1694, wie er es behauptet, mitgetheilt haben kann. Als die schärfste Form öffentlicher Beschuldigung liegt die Fussnote von 1742 vor. Aber damals war de l'Hospital bereits 38 Jahre, Malebranche, der ihn am ersten hätte vertheidigen können, 27 Jahre todt und begraben, wer konnte die Widerlegung übernehmen?

War es ausserdem unmöglich, dass die Analyse des infiniments petits auf die Abhandlung von 1684 als erste Grundlage sich stützte? Auch Jakob Bernoulli war es gelungen, ihr ohne weitere Anleitung so viel von der Differentialrechnung zu entnehmen, dass er selbstständig weiter gelangen konnte, und de l'Hospital hatte zu seiner Belehrung doch auch die Arbeiten, welche nach 1684 in den A. E. erschienen waren.

Wir bemerken weiter, dass de l'Hospital ausschliesslich eine Differentialrechnung schrieb. Auf eine Integralrechnung verzichtete er, weil, wie er in seiner Vorrede sagte, er Leibniz nicht vorgreifen wolle, der brieflicher Mittheilung zufolge eine Integralrechnung vorbereite. Wir stellen nicht in Abrede, dass Johanns Lehren bei dem Verzichte auf eine Integralrechnung auch von Einfluss gewesen sein können, dass sie der Differentialrechnung ebenfalls zu gut kamen, aber de l'Hospital äussert sich in dem gleichen Sinne. Wieder in seiner Vorrede sagte er ausdrücklich, dass er Vieles den Brüdern Bernoulli zumal dem jüngeren verdanke; er habe ihre Entdeckungen ebenso wie die Leibnizens ohne Umstände benutzt[1]). Wir müssten uns sehr täuschen, wenn das die Sprache eines Räubers geistigen Eigenthums wäre.

Ist die Frage, ob de l'Hospital unredlich oder nicht gehandelt habe, nicht mit voller Gewissheit zu behandeln, so haben wir persönlich doch den Eindruck, als gehe Bernoullis Anklage zu weit, als habe ihre Schroffheit nur zugenommen mit der Sicherheit, nicht widerlegt werden zu können. Man kann leider Johann Bernoulli so viele Unwahrheiten nachweisen, dass seiner Ruhmredigkeit auch eine mehr zuzutrauen ist.

[1]) *Je me suis servi sans façon de leurs découvertes et de celles de Mr. Leibnis* (sic!).

Wir betonen einen letzten Umstand. Wo ist die Handschrift von Bernoullis unterdrückten Vorlesungen[1]) über Differentialrechnung? Hat er Sorge dafür getragen, dass die Handschrift der Integralrechnung erhalten blieb, trotzdem sie unter seinem Namen gedruckt ist, so hätte er doppelt für die Erhaltung der ihm entwendeten Differentialrechnung sorgen müssen, wenn sie wirklich vorhanden war.

Gesichert bleibt für uns als einziges Ergebniss unserer Untersuchung, dass im Verkehre mit de l'Hospital in Paris jene Vorlesungen über Integralrechnung, oder wie man sie nun nennen will, entstanden, welche 1742 noch zu Lebzeiten Johann Bernoullis gedruckt wurden[2]), und deren Niederschrift einen guten Theil der Zeit des jungen Lehrers in Anspruch genommen haben muss. *Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque*, mathematische Vorlesungen über die Methode der Integrale und Anderes ist die Ueberschrift. Eine Integralrechnung in dem Sinne, welcher heute mit dem Worte verbunden zu werden pflegt, ist es nicht. Von Integrationen selbst sind nur wenige vorhanden, welche ihren Ursprung in der Formel

$$ax^p dx = d\left(\frac{a}{p+1}\, x^{p+1}\right)$$

besitzen. Ihr entnimmt Johann Bernoulli[3]) auch das Integral von

$$\frac{dx}{x} \quad \text{als} \quad \frac{1}{0}\, x^0 = \infty \cdot 1 = \infty\,.$$

Das Integral von $\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$ kannte er so wenig wie das von $\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$, keines von beiden Integralen besitzt man[4]). Das Integral ihrer Summe $\frac{a\,dx + x\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$ kennt man dagegen, es ist $\sqrt{2ax + x^2}$. Manchmal helfen Substitutionen, zu deren Auffindung ähnliche Methoden führen, wie sie bei der Auflösung von Diophantischen Gleichungen im Gebrauch seien. Will man z. B. das Integral von $\frac{a^3 dx}{x\sqrt{ax - x^2}}$ sich verschaffen[5]), so befreit man sich von der Irrationalität des Ausdruckes durch $ax - x^2 = \frac{a^2x^2}{m^2}$. Dann ist nämlich

$$x = \frac{am^2}{a^2 + m^2}, \quad \sqrt{ax - x^2} = \frac{ax}{m} = \frac{a^2 m}{a^2 + m^2},$$

$$dx = \frac{2a^3 m\,dm}{(a^2 + m^2)^2}, \quad \frac{a^3 dx}{x\sqrt{ax - a^2}} = \frac{2a^3 dm}{m^2},$$

---

[1]) *Lectiones in calculum differentialem quae praecesserunt, quasque (autor) supprimendas duxit.* [2]) Joh. Bernoulli *Opera* III, 385—558. [3]) Ebenda III, 388 lin. 12 v. u. [4]) Ebenda III, 389: *neutrius habetur integrale.* [5]) Ebenda III, 393.

und dessen Integral ist $-\frac{2a^3}{m}$ oder $2a^2\sqrt{\frac{a-x}{x}}$. Das Minuszeichen ist bei der Rückeinsetzung der Quadratwurzel verloren gegangen.

Bei der Integration von Differentialgleichungen ist Johann Bernoulli, dadurch, dass er über das Integral von $\frac{dx}{x}$ irriger Meinung war, zu sehr unbequemen Umwegen gezwungen. Er will z. B.

$$axdy - ydx = 0$$

integriren[1]). Er multiplizirt die Gleichung mit $\frac{y^{a-1}}{x^2}$ und erhält so

$$\frac{ay^{a-1}}{x}dy - \frac{y^a}{x^2}dx = 0,$$

welches das Differential von $\frac{y^a}{x} = b$ ist, wo b irgend eine Constante[2]) bedeutet. Noch umständlicher wird die Integration[3]) von

$$dx : dy = \frac{3x^3 - 2axy}{3x^2 - ay} : y$$

oder

$$3x^3dy - 2axydy = 3x^2y\,dx - ay^2dx.$$

Bernoulli setzt

$$y = mx, \quad dy = mdx + xdm$$

und erhält:

$$3x^2dm - 2amxdm = am^2dx.$$

Er setzt weiter

$$x = mn, \quad dx = mdn + ndm$$

und erhält

$$3n^2dm - 3andm = amdn.$$

Aber noch immer kann er die Trennung der Veränderlichen nicht vollziehen, denn $\frac{3dm}{am} = \frac{dn}{n^2 - an}$ wäre für ihn genau ebenso räthselhaft wie die ursprüngliche Differentialgleichung. Erst muss er oben $n = \frac{a^2}{r}$, $dn = -\frac{a^2dr}{r^2}$ einsetzen, um $3adm - 3rdm = -mdr$ zu erhalten, dann $r - a = t$ mit $dr = dt$, damit die Gleichung in $3tdm = mdt$ übergehe, und jetzt erst liefert die Multiplikation mit $\frac{m^2}{t^2}$ ihm die Gleichung

$$\frac{3m^2dm}{t} - \frac{m^3dt}{t^2} = 0 \qquad \text{oder } d\left(\frac{m^3}{t}\right) = 0,$$

welche er zu $m^3 = bt$ integriren kann. Setzt er rückwärts die Werthe

$$t = r - a, \quad r = \frac{a^2}{n}, \quad n = \frac{x}{m}, \quad m = \frac{y}{x}$$

ein, so kommt endlich $y^3 + bax^3 = a^2byx$ heraus. Er wünscht aber

---

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* III, 416. [2]) = *quantitati constanti b.* [3]) Ebenda III, 422—423.

eine in allen Gliedern gleiche Dimension[1]) und wählt deshalb die willkürliche Constante $b = \frac{1}{a}$. Dann ist die Gleichung $y^3 + x^3 = axy$ gefunden. Wir haben den ganzen Gang der Rechnung wiedergegeben, damit der Leser um so bereitwilliger uns die Ausführung anderer Beispiele erlasse, um so mehr solcher, in welchen auch zweite Differentiale vorkommen.

Johann Bernoulli geht dann auf die Lehre vom Krümmungshalbmesser und von den Evoluten ein und zeigt den engen Zusammenhang dieser Lehre mit der von der Rectification[2]), der daraus hervorgehe, dass $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, welches nichts anderes als ds sei, in der Gleichung für den Krümmungshalbmesser erscheine. Auch alle die halb der Geometrie halb der Physik angehörenden Aufgaben der damaligen Zeit: die Brennlinien, die Segelcurve, die Kettenlinie, letztere auch unter der Annahme, dass die Kette an verschiedenen Stellen verschieden dick sei u. s. w., finden die ausführlichste Behandlung und machen die Zusammenstellung noch heute lesenswerth, wenn wir auch wiederholen dürfen, eine Integralrechnung ist sie nicht.

Am Schlusse des Jahres 1692 kehrte Johann Bernoulli nach Basel zurück, um dort seine medizinischen Studien zu beendigen, aber der Mathematik war er deshalb doch nicht ungetreu. Im Journal des Sçavans wie in den A. E. erschienen kleinere und grössere Aufsätze, die Doctordissertation über die Muskelbewegung[3]) brachte Anwendungen der Differentialrechnung auf anatomisch-physiologische Fragen, seit December 1693 eröffnete sich ein Briefwechsel mit Leibniz, der voll der bedeutsamsten Mittheilungen beider Gelehrten ist. Johann Bernoulli war noch selbst dafür besorgt, dass dieser Briefwechsel 1745 gedruckt wurde, und nur persönliche Bemerkungen, vertraulich ausgesprochene, unbewiesene, mitunter wohl auch unbeweisbare Anklagen gegen Diesen und Jenen blieben weg[4]).

Von den Veröffentlichungen erwähnen wir einen kurzen Aufsatz über die Construction der Differentialgleichungen ersten Grades[5]) — *primi gradus*, gemeint sind aber die Differentialgleichungen erster Ordnung — im Novemberhefte 1694 der A. E. Dort kommt der Ausdruck der Trennung der Veränderlichen[6]) vor, welcher der Wissenschaft verblieben ist, den Johann Bernoulli auch schon am 9. Mai 1694 in einem Briefe an Leibniz gebraucht hatte[7]). In

[1]) *ut aequatio ubique aequales dimensiones habeat.* [2]) Joh. Bernoulli *Opera* III, 444. [3]) Ebenda I, 93—118. [4]) Der volle Inhalt wurde aus Leibnizens brieflichem Nachlasse durch C. J. Gerhardt 1855 wiederhergestellt. [5]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 123—125. [6]) *separatio indeterminatarum.* [7]) Leibniz III, 139.

demselben Jahrgange der A. E. findet sich *Additamentum effectionis quadraturarum et rectificationum per seriem quandam generalissimam*[1]), welche anschliessend an die Leibnizische Integration mittels Reihen von 1693 (S. 206) eine Reihenentwicklung ganz anderer Art und durchaus neuer Entstehungsweise liefert. Sei ndz das Differential einer Fläche, wobei n irgendwie aus Veränderlichen und Constanten zusammengesetzt ist. Die Identität

$$ndz = ndz + zdn - zdn - \frac{z^2 d^2 n}{1 \cdot 2 \cdot dz} + \frac{z^2 d^2 n}{1 \cdot 2 \cdot dz} + \frac{z^3 d^3 n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dz^2} - \frac{z^3 d^3 n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dz^2}$$

liegt auf der Hand und ebenso deren Fortsetzbarkeit durch beliebig viele Paare von gleichlautenden positiven und negativen Gliedern, in welchen bald das positive bald das negative Glied voraussteht. Bernoulli bedient sich allerdings noch nicht der Zahlenzeiger für die höheren Differentialien, sondern des wiederholt geschriebenen Buchstaben d, der bis zu viermaliger Schreibung (in $ddddz$) in dem Aufsatze vorkommt. Sind die Gliederpaare so geordnet, wie wir es erklärten, so finden sich in der den Ausgangspunkt bildenden Identität rechts vom Gleichheitszeichen erst zwei positive, dann zwei negative Glieder, dann wieder zwei positive u. s. w. in gleichmässiger Wiederkehr des Zeichenwechsels. Jedes dieser Gliederpaare, die aber augenscheinlich von dem, was oben Gliederpaar genannt wurde, verschieden sind, bildet ein vollständiges Differential

$$\frac{z^\lambda d^\lambda n}{1 \cdot 2 \cdots \lambda dz^{\lambda-1}} + \frac{z^{\lambda+1} d^{\lambda+1} n}{1 \cdot 2 \cdots \lambda(\lambda+1) dz^\lambda} = d\left(\frac{z^{\lambda+1} d^\lambda n}{1 \cdot 2 \cdots \lambda(\lambda+1) dz^\lambda}\right).$$

Man kann daher die unendlich gedachte Reihe integriren und erhält:

$$\text{Integr.}\, ndz = nz - \frac{z^2}{1 \cdot 2}\frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{d^2 n}{dz^2} - \cdots.$$

Es ist fast überflüssig darauf hinzuweisen, dass Johann Bernoulli hier gleichwie in den früheren Aufsätzen ein eigentliches Integralzeichen noch entbehrt, und, was allerdings von ungleich höherer Wichtigkeit ist, dass er die Reihe ohne jedes Bedenken ins Unendliche fortsetzte. Ob sie gegen einen bestimmten Werth convergire, macht ihm genau so wenig Sorgen als der Umstand, dass wegen der vorerwähnten Verschiedenheit der die Identität fortsetzenden und der bei der Integration zusammengefassten Gliederpaare stets ein unpaares Glied überschiesst, das bei der Integration unberücksichtigt blieb. Etwas hat aber Johann Bernoulli seit seiner Pariser Zeit hinzugelernt, vielleicht durch einen Brief von Leibniz[2]) vom Juni 1694, das Diffe-

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 125–128. [2]) Leibniz III, 141.

rential eines Logarithmus. Ist, sagt er, um ein Beispiel seiner Methode zu bilden, $y = a \log (a + z) = a \log r$, so ist $dy = \frac{a\,dr}{r}$ oder wegen $dr = dz$ auch $dy = \frac{a\,dz}{a + z}$. Hier ist demnach

$$u = \frac{a}{a + z} \text{ und } a \log (a + z) = \frac{az}{a + z} + \frac{az^2}{2(a + z)^2} + \frac{az^3}{3(a + z)^3} + \cdots$$

eine ganz andere Entwicklung als diejenige logarithmische Reihe, welche man bis dahin kannte.

Die Mängel in der Bezeichnung, welche wir erwähnten, verschwanden 1695 und 1696. Im letzteren Jahre einigten sich Leibniz und Johann Bernoulli brieflich[1]) über die Benutzung des Zeichens $\int$. Der Brief Leibnizens vom October 1695 aber, in welchem die Zahlenzeiger höherer Differentiation vorkommen[2]), ist allzuwichtig, als dass wir nicht einen Augenblick bei ihm verweilten.

Die Differenzen, sagt dort Leibniz, sind den Potenzen vergleichbar[3]). Wie

$$(x + y)^m = x^m y^0 + \frac{m}{1} x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} y^2 + \cdots,$$

so, kann man schliessen, wird auch

$$d^m(xy) = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x \cdot d^1 y + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-2} x \cdot d^2 y + \cdots$$

sein. Man kann auch das Differentiationszeichen in das der Integration verwandeln und die Gleichung $d^m = \int^n$ aufstellen, wenn $n = -m$ ist. So entsteht

$$\int^n d(zy) = \int^{n-1} z d^0 y - \frac{n}{1} \int^n z d^1 y + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \int^{n+1} z d^2 y - \cdots.$$

Die Uebereinstimmung zwischen der Potenzirung einer Summe und der Differenzirung eines Produktes hat Leibniz erst mehrere Jahre später in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie[4]) dem Drucke übergeben, den Vergleich der Integration mit einer negativ indicirten Differentiation liess er aber weg. In dem Briefwechsel allein blieben auch Gedanken über Differentiation mit gebrochenem Index erhalten, welche Leibniz hegte[5]).

Und wieder in dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli wurde von ersterem der Keim eines Verfahrens niedergelegt, welches eines der bedeutsamsten der ganzen Analysis geworden ist. Leibniz hatte 1692 die Möglichkeit eingesehen, eine Curvengleichung nach einem in ihr auftretenden Parameter zu differenziren (S. 204).

[1]) Leibniz III, 262 und 272. [2]) Ebenda III, 221. [3]) *Potentiis analogae sunt differentiae.* [4]) Leibniz V, 377–382. [5]) Ebenda III, 228.

Er hatte 1694 an einem bestimmten Beispiele die Ausführung des Verfahrens gezeigt (S. 208). Im August 1697 ging er den grossen Schritt weiter, auch dann nach einem Parameter zu differenziren[1], wenn derselbe innerhalb eines Integrals vorkommt. *Differentiare de curva in curvam*, Differentialübergang von einer Curve zur anderen nannten das die beiden Freunde, und Johann Bernoulli weiss seiner Bewunderung keinen besseren Ausdruck zu geben, als indem er sich entrüstet, dass der Geist Leibnizens ihn höher geführt habe, als er vorzudringen im Stande gewesen sei.

Was die Darstellung einzelner Integrale betrifft, so war Leibniz seit December 1696 im Besitze der Formel[2])

$$\frac{1+x}{x}(\log(1+x))^2 = 2\int \frac{\log(1+x)}{x}\,dx - \int \frac{(\log(1+x))^2}{x^2}\,dx,$$

welche zwar schon aus der Regel für die Differentiation eines Produktes hervorgeht, aber immerhin hergeleitet werden musste.

Man glaube indessen ja nicht, in dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli sei ersterer immer der Geber gewesen. Im Juni 1695 erwähnt Johann Bernoulli[3]) einen Gegenstand, über den er jüngst[4]) mit de l'Hospital Briefe gewechselt habe. Curven mit Rückkehrpunkten[5]) seien vorhanden, wie die semicubische Parabel, wo ein grösster oder kleinster Werth eintrete, während das Differential unendlich gross werde. In jenem Briefwechsel seien sie auch zur Ueberzeugung gekommen, dass es Wendepunkte von Curven gebe, in welchen der Krümmungshalbmesser nicht ∞ sondern 0 sei; einen dritten endlichen Werth für den Krümmungshalbmesser in einem Wendepunkte gebe es allerdings nicht. Wir kommen hierauf im nächsten Kapitel zurück.

Im August 1697 spricht Johann Bernoulli von der Aufgabe[6]), eine Curve zu finden, welche gegebene Curven unter gegebenem, unveränderlichem oder nach einem bestimmten Gesetze veränderlichem Winkel schneide. Ein Jahr später[7]) gibt er der gesuchten Curve den Namen der Trajectorie, und damit ist der Infinitesimalgeometrie ein neues schwieriges Kapitel eingefügt, an dessen Bearbeitung zahlreiche Kräfte ersten Ranges sich versuchten.

Noch bedeutsamer ist ein Gegenstand, den Johann Bernoulli bereits 1694 in den Briefwechsel warf[8]). Er meinte, man könne von percurrenten Curven sprechen. Der Gipfel der Geometrie, sagt er, wäre es, wenn die transcendenten Curven auf percurrente zurück-

[1]) Leibniz III, 453 und 462. [2]) Ebenda III, 351. [3]) Ebenda III, 185. [4]) *non ita pridem*. [5]) *points de rebroussement*. [6]) Leibniz III, 464. [7]) Ebenda III, 539 und Joh. Bernoulli *Opera* I, 266. [8]) Leibniz III, 139, 201, 323 und öfter.

geführt werden könnten, d. h. auf solche, deren Gleichungen Glieder in sich schliessen, welche zu unbestimmten Abmessungen aufsteigen[1]). Der Name der percurrenten Grössen ist freilich aus der Mathematik verschwunden; Johann Bernoulli selbst hat ihn gegen den von Leibniz vorgeschlagenen Namen der Exponentialgrössen vertauscht, aber er hat im Märzheft 1697 der A. E. die Grundzüge der Rechnung mit den Exponentialgrössen für alle Zeiten festgestellt[2]). In der dort mitgetheilten Formel

$$d(m^n) = m^n \log m\, dn + n m^{n-1} dm$$

besass Bernoulli allerdings einen Vorgänger in Leibniz, der dieselbe schon im Jahrgange 1695 der A. E. abgeleitet hatte[3]). Ein wesentliches Versinnlichungsmittel bildet bei allen diesen Untersuchungen die logarithmische Curve von der Gleichung $y = \log x$. Wer diese zuerst betrachtete, wissen wir nicht zu sagen. Huygens gab ihr in seiner Abhandlung *De la cause de la pésanteur* den Namen, fügte aber hinzu, die Curve sei schon von Anderen beachtet worden.

Wir würden nicht einen Theil eines Kapitels, wir würden mehrere Kapitel verwenden müssen, wollten wir Alles angeben, was in Johann Bernoullis frühen Aufsätzen oder in seinem Briefwechsel mit Leibniz an Wissenswürdigem enthalten ist. Wir erwähnen aus der Fülle hier nur noch einen einzigen im Märzhefte 1697 der A. E. mitenthaltenen Aufsatz[4]), in welchem unter anderem eine Differentialgleichung integrirt ist, welche nicht selten die Bernoullische Differentialgleichung genannt wird. Jakob Bernoulli hatte sie im Decemberhefte 1695 der A. E. in der Gestalt

$$a dy = y p dx + b y^n q dx$$

zur Bearbeitung vorgelegt und dabei bestimmt, a und b sollten Constante bedeuten, p und q irgendwie von x abhängen ohne y zu enthalten. Johann Bernoulli trat an die Aufgabe so heran, dass er y als Produkt zweier Variabeln auffasste, d. h.

$$y = mz, \quad dy = mdz + zdm$$

setzte. So erhielt er

$$amdz + azdm = mzpdx + bm^n z^n q dx.$$

Nun waren aber m und z beide unbekannt, und es schien gestattet zur Bestimmung einer dieser Grössen eine Bedingungsgleichung einzuführen. Johann Bernoulli wählte dazu $amdz = mzpdx$, welche auch $\frac{a dz}{z} = pdx$ geschrieben werden konnte, und aus ihr ergibt sich

[1]) *terminis ad dimensiones indeterminatas ascendentibus.* [2]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 179—187. [3]) Leibniz V, 325. [4]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 175—176.

z in seiner Abhängigkeit von x, etwa $z = \xi$. Nun blieb von der früher viergliedrigen Differentialgleichung nur noch

$$azdm = bm^n z^n qdx \text{ oder } \frac{adm}{m^n} = bz^{n-1}qdx,$$

und hieraus ergibt sich m in seiner Abhängigkeit von x, etwa $m = X$, worauf $y = \xi X$ sich anschliesst. Es ist sehr gleichgiltig, ob Johann Bernoulli diese Integration wirklich, wie er behauptet, in einer halben Viertelstunde gefunden hat oder nicht. Jedenfalls hat er die Methode dabei erfunden, eine Variable durch das Produkt zweier Variablen zu ersetzen, welche bei der Behandlung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung beibehalten worden ist.

Wir verlassen hiermit die Arbeiten, durch welche noch im XVII. Jahrh. die beiden Brüder Bernoulli sich auszeichneten ohne in Zwiespalt mit einander zu gerathen. Die Geschichte ihres grossen Streites fordert ein besonderes Verweilen.

92. Kapitel.

Streit der Brüder Bernoulli. De l'Hospital. Newtons Briefe von 1693. Leibnizens Gegner.

Wir erinnern uns (S. 85), dass Johann Bernoulli 1695 einem Rufe nach Groeningen Folge leistete. Es war, als wenn diese Berufung eine Feindschaft entfesselt hätte, deren wahre Gründe kaum zu ermitteln sein dürften, deren Folge aber eine Reihe von öffentlich ausgetragenen Streitigkeiten bildete, deren Erzählung man am liebsten auswiche, wenn nicht neben der hässlichen Form ein hochbedeutender Inhalt ausführlichen Bericht forderte[1]).

Die Eröffnung der Feindseligkeiten verschuldete Jakob Bernoulli durch einen Aufsatz im Decemberhefte 1695 der A. E., in welchem sich Johann an mehreren Stellen zum mindesten gereizt fühlen konnte[2]), denselben Aufsatz, in welchem am Schlusse die Bernoullische Differentialgleichung aufgegeben war, von deren Integration wir gesprochen haben. Zunächst ist die Rede vom Krümmungshalbmesser, von welchem ausser Jakob Bernoulli fast ausschliesslich solche Leute etwas wüssten, denen der Bruder dieses mitgetheilt habe[3]). Nach diesem ersten Stiche kommt ein zweiter empfindlicherer, es war die Antwort auf Johanns 1692 an den Tag gelegte Ueberhebung (S. 212).

---

[1]) Giesel, Geschichte der Variationsrechnung I. Theil (Torgauer Gymnasialprogramm für 1857). [2]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 639—663. [3]) *quibuscum frater nostra communicaverat.*

Er selbst habe Johann die Differentialgleichung der Segelcurve zugeschickt, er sei so wenig an der Integration derselben verzweifelt, wie Johann im April 1692 im Journal des Sçavans sich ausdrückte, dass er vielmehr einen Monat vorher im März die volle Auflösung nach Leipzig habe abgehen lassen. Später habe Johann die eigene Auflösung verbessern und eine andere von de l'Hospital beifügen wollen, aber es seien noch immer Irrthümer darin geblieben. Der giftigste Stich war ein dritter. Johann habe im Octoberhefte 1694 der A. E. über die Isochrone geschrieben. Darüber sei nicht viel zu bemerken. Er habe, wie man zu sagen pflege, nach dem Frühstück Eier aufgetragen[1]) und nichts mitgetheilt, was nicht einfacher in Jakobs Aufsatze im vorangehenden Septemberhefte gestanden habe.

Man kann ja, wie wir es andeuteten, diese verschiedenen kleinen Bosheiten als die Antwort auf die vierthalb Jahre früher begangene Taktlosigkeit Johanns betrachten; allein unter Brüdern, welche inzwischen in persönlichem Umgange sich auszusprechen volle Gelegenheit gehabt hatten, war es gehässig, jetzt erst und so zu antworten. Es müssen hier Dinge gespielt haben, von welchen wir nichts wissen.

Johann schwieg öffentlich und äusserte nur gegen Leibniz seine Empfindungen über die ihm widerfahrene Kränkung mit der allerdings erfolglosen Bitte, Leibniz möge doch gelegentlich erklären, was er von jedem der beiden Brüder halte[2]). Im Juni 1696 brachten dann die A. E. eine von Johann gestellte Aufgabe, zu deren Auflösung innerhalb des laufenden Jahres die Mathematiker aufgefordert wurden. Man solle den Weg bestimmen, auf welchem ein bewegter Punkt von einem Orte A zu einem in derselben Vertikalebene tiefer liegenden Orte B in der kürzesten Zeit gelange; die grade Linie AB sei es nicht, vielmehr eine den Geometern wohlbekannte Curve. Das Decemberheft der A. E. verlängerte die gestellte Frist bis Ostern 1697, und das Maiheft 1697 brachte die Auflösung durch Jakob[3]), ihr vorausgedruckt aber die Auflösung durch Johann[4]) selbst, der hier zum ersten Male den Namen der Brachistochrone für die gesuchte Curve einführte.

Auch von Leibniz erschien damals eine Notiz[5]). Er hatte allerdings bereits viel früher, nämlich sofort im Juni 1696, die Aufgabe gelöst und seine Auseinandersetzung brieflich an Johann eingesandt, wogegen ihm dieser gleichfalls brieflich seine Methode zuschickte[6]). Schon in diesem Briefe war von einem Namen für die

[1]) *Nobis hic ova, quod aiunt, post prandium apponit.* [2]) Leibniz III, 269. [3]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 768—778. [4]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 187—193. [5]) Leibniz V, 331—336. [6]) Ebenda III, 288, 290—295, 298, 302—309.

Curve die Rede. Leibniz schlug Tachystoptota vor, fand aber selbst alsdann den Gegenvorschlag Brachistochrone besser. In dem gedruckten Aufsatze der A. E. begnügte sich Leibniz mit der Bemerkung, das Brachistochronenproblem, welches er ganz ähnlich wie die Brüder Bernoulli behandelt habe, weshalb seine Auflösung hier wegbleibe, sei so recht geeignet, die Vorzüge der Differentialrechnung erkennen zu lassen. In ihr seien die drei Mathematiker bewandert, von welchen jetzt Auflösungen vorhanden seien. Ausser diesen seien es aber nur wenige, denen zuzutrauen gewesen, dass sie dem Gegenstande gewachsen sein würden. Er habe an den Marquis de l'Hospital gedacht, ausserdem an Huygens, wenn er noch lebte, Hudde, wenn er von solchen Untersuchungen sich nicht längst zurückgezogen hätte, Newton, wenn er sich die Mühe gegeben hätte[1]); das seien die Männer dazu gewesen.

Von Newton ist auch in der That ein Brief im Januarhefte der P. T., dann in den A. E. veröffentlicht[2]), der aber nur die beweislos ausgesprochene Behauptung enthält, die gesuchte Curve sei eine Cycloide. Aehnlich war es mit einer Auflösung von de l'Hospital, in Bezug auf welche nur zu bemerken ist, dass er die Aufgabe in einen eigenthümlichen Zusammenhang mit der der Kettenlinie zu bringen wusste[3]).

Jakob hat allein den Grundgedanken deutlich ausgesprochen, von welchem die Auffindung der Curve des kürzesten Falles und so mancher anderen abhängt, und deshalb verdient sein Aufsatz mehr als die anderen, dass man darüber berichte. Jener Grundgedanke besteht darin, dass eine Curve, welche als Ganzes ein Maximum oder Minimum darstellt, auch in ihren noch so kleinen Theilen die gleiche Eigenschaft besitzen muss. Auf die Aufgabe der Brachistochrone angewandt, heisst dieses, dass, wenn (Figur 41) $ACMGDB$ die Brachistochrone ist, ein unendlich kleines Stück $CMGD$ derselben in kürzerer Zeit durchfallen werden muss, als das Curvenstückchen einer anderen Curve, welche in endlicher Entfernung von der ersteren gleichfalls von C nach D verläuft. Die übrigen Bestandtheile der Figur sind die Horizontale AH mit ihren Parallelen EI und FD,

Fig. 41.

[1]) *si operam hanc in se reciperet.* [2]) *Opuscula Newtoni* I, 289. [3]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 199—200.

senkrecht dazu HF und ID; E liegt in der Mitte zwischen C und F. Die LM und NG sind Kreisbögen, welche von C und D als Mittelpunkten aus mit CL und DG als Halbmesser beschrieben sind. Wenn die Curve $CLND$ der $CMGD$ unendlich nahe gedacht ist, so muss LG gegen EG unendlich klein sein. Nennt man nun die auf einen Weg verwandte Zeit t, mit nachfolgender Angabe des Weges, also beispielweise tCG, so wird wegen der unendlichen Nähe der beiden von C nach D führenden Wege, und nur unter dieser Bedingung, $tCG + tGD = tCL + tLD$ sein und

$$1.\quad tCG - tCL = tLD - tGD.$$

Während so unendlich kleiner Zeiträume als diejenigen sind, um die es sich handelt, ist jede Bewegung gleichförmig, und dann verhalten sich die Räume wie die Zeiten, in welchen sie durchlaufen werden, also $CE : CG = tCE : tCG$, $CE : CL = tCE : tCL$ und

$$CE : (CG - CL) = tCE : (tCG - tCL)$$

oder wegen $CL = CM$ und $CG - CL = CG - CM = MG$ auch

$$2.\quad CE : MG = tCE : (tCG - tCL).$$

Weil das bei E rechtwinklige Dreieck CEG dem bei M rechtwinkligen LMG ähnlich ist, muss

$$3.\quad MG : GL = EG : CG$$

sein, und Multiplikation von 2. und 3. liefert

$$4.\quad CE : GL = EG \cdot tCE : CG(tCG - tCL).$$

Eine abermalige Anwendung des Satzes von der gleichmässigen Bewegung liefert $EF : LD = tEF : tLD$,

$EF : GD = tEF : tGD$, $EF : (LD - DG) = tEF : (tLD - tGD)$

oder wegen $GD = ND$, $LD - GD = LD - ND = LN$ und $EF = EC$ auch

$$5.\quad EC : LN = tEF : (tLD - tGD).$$

Auch die Dreiecke LNG, GID sind einander ähnlich und deshalb

$$6.\quad LN : LG = GI : GD.$$

Die Multiplikation von 5. und 6. liefert:

$$7.\quad CE : GL = GI \cdot tEF : GD(tLD - tGD).$$

Die Proportionen 4. und 7. führen zur Folgerung

$$EG \cdot tCE : GC(tCG - tCL) = GI \cdot tEF : GD(tLD - tGD)$$

beziehungsweise zu

$$EG \cdot tCE : GI \cdot tEF = GC(tCG - tCL) : GD(tLD - tGD)$$

und unter Berücksichtigung von 1. zu

$$8.\quad EG \cdot tCE : GI \cdot tEF = GC : GD.$$

Weiter verhalten sich beim freien Fall die Zeiten, in welchen gleiche Räume zurückgelegt werden, umgekehrt wie die Quadratwurzeln der überhaupt schon zurückgelegten Räume, also

$$tCE : tEF = \frac{1}{\sqrt{HC}} : \frac{1}{\sqrt{HE}}$$

und deshalb ist

$$9.\quad EG \cdot tCE : GI \cdot tEF = \frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}}.$$

Jetzt zieht endlich 8. und 9. die Folgerung nach sich:

$$\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = CG : GD$$

oder die Curvenelemente stehen in einem Verhältnisse, welches zusammengesetzt ist aus dem der Abscissenelemente und dem der reciproken Quadratwurzel der Ordinate: $\frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{ds}{\sqrt{2r}}$, wobei $\sqrt{2r}$ den Proportionalitätsfactor darstellt. Diese Differentialgleichung geht aber leicht in $dx = dy\sqrt{\frac{y}{2r - y}}$ über, und das ist die Differentialgleichung der Cycloide, deren erzeugender Kreis den Halbmesser r besitzt.

Der Beantwortung der gestellten Frage fügte Jakob Bernoulli sofort seinerseits eine neue Frage hinzu, welche in der Geschichte der Mathematik den Namen der isoperimetrischen Aufgabe erhalten hat, weil es sich darum handelte, gemäss bestimmter Bedingungen eine Curve auszuwählen, deren Umfang zwischen zwei festen Punkten gegeben sei, welches letztere Verlangen naturgemäss durch unendlich viele Curven erfüllt werden kann. Die Aufgabe selbst hatte in deutscher Uebersetzung folgenden Wortlaut[1]): „Unter allen zwischen zwei festen Punkten gelegenen isoperimetrischen Curven diejenige zu finden, welche bewirkt, dass der von einer anderen Curve, deren jede Ordinate ein gewisses Vielfache oder Untervielfache der derselben Abscisse entsprechenden Ordinate oder des entsprechenden Bogens der zu suchenden Curve ist, ferner den Ordinaten ihrer Endpunkte und dem zwischen diesen gelegenen Theile der Abscissenaxe eingeschlossene Flächenraum ein Maximum oder ein Minimum sei.“ Eine zweite Aufgabe verlangte diejenige Cycloide zu finden, deren Basis gegeben und längs deren ein fallender Körper in der kürzesten Zeit an eine gegebene Vertikale gelangte.

Die Aufgaben sollten eine Herausforderung für Johann Bernoulli

[1]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 775

sein, und damit niemand diese Absicht missverstehen könne, sagte Jakob ausdrücklich, es sei jemand, für den er selbst bürge[1]), bereit dem Bruder, falls er die Aufgaben löse, 50 Imperialen auszuzahlen; nur müsse er innerhalb dreier Monate die Erklärung abgeben, dass er sich an die Aufgaben machen wolle, und vor Ende des Jahres 1697 die Auflösung auf Quadraturen zurückgeführt einreichen.

Da die Herausforderung im Mai 1697 gedruckt erschien, so war, wenn man die Verzögerungen der Versendung in Anrechnung bringt, ein volles halbes Jahr Zeit gegeben. Statt dessen nahm Johann, wie er in einem Briefe[2]) sagte, der, wiewohl er von einer Figur begleitet war, die doch erst der Herstellung bedurfte, schon im Junihefte der *Histoire des ouvrages des Savans* gedruckt erschien, nur drei Minuten in Anspruch, um die Aufgaben anzusehen, sich daran zu machen und das ganze Geheimniss zu ergründen. Er habe seine Erörterungen bereits schriftlich an Leibniz gelangen lassen, und er schlage vor, diesem grossen Mathematiker die Entscheidung zu überlassen, ob die Aufgaben durch ihn richtig gelöst seien, dann könne der Herr, welcher die 50 Imperialen als Preis ausgesetzt habe, damit herausrücken; sie sollten den Armen zu Gute kommen; würde man also Ausflüchte suchen, um der Aushändigung des Preises zu entgehen, so sei damit den Armen ein Unrecht zugefügt.

Jakob blieb diesem Briefe gegenüber stumm. Johann stellte nun auch Aufgaben, welche dem Gebiete der grössten und kleinsten Werthe angehören, im Journal des Sçavans vom 26. August 1697. Um nicht die Gegenstände allzusehr zu vermengen, gehen wir auf diese Aufgaben[3]) später ein. Am 15. October ergriff Johann abermals das Wort in einem Briefe an Varignon, der im December 1697 im Journal des Sçavans erschien[4]). Johann wiederholte hier, was er im Monate Juni gesagt hatte, fügte aber die eigentliche Auflösung bei, da er befürchten müsse, man werde ihm sonst den Einwurf machen, seine Auflösung sei nicht rechtzeitig erschienen. Die zweite Aufgabe werde durch diejenige Cycloide gelöst, welche die betreffende Vertikale unter rechtem Winkel erreiche. Ihr erzeugender Kreis müsse also die doppelte Entfernung des Anfangspunktes der allen Cycloiden gemeinschaftlichen Basis vom Anfangspunkte der Vertikalen zum Umfange haben. Wir schalten hier ein, dass an diese Auflösung niemals eine tadelnde Kritik angelegt wurde, sie also als durchaus zutreffend stillschweigend anerkannt worden ist. Die erste isoperimetrische Aufgabe beantwortete Johann dahin, dass wenn (Figur 42)

[1]) *prodit nonnemo, pro quo caveo.* [2]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 202. [3]) Ebenda I, 204—205. [4]) Ebenda I, 206—213.

$PF = y$ die Ordinate der gesuchten Curve BFN ist, welche zur Abscisse x gehört, wenn $PZ = y^n$ die zu der gleichen Abscisse gehörende Ordinate derjenigen Curve ist, welche das Flächenmaximum oder Minimum hervorbringen soll, wenn a eine als Einheit gewählte beliebige Strecke ist, alsdann die Gleichung der BFN als

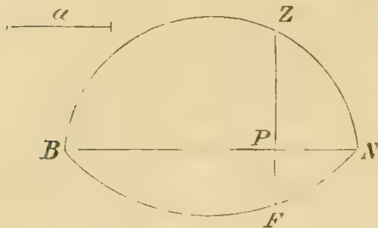


Fig. 42.

$$y = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$$

gefunden werde. Man könne, fuhr er fort, die Aufgabe viel allgemeiner fassen, so dass PZ nicht die $n$te Potenz von PF sei, sondern in irgend einem Abhängigkeitsverhältnisse dazu stehe. Dann werde die gesuchte Gleichung $y = \int \frac{b\,dx}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, wobei $b = \int \frac{PZ \cdot dx}{x}$ bedeute. Er ging dann mit wenigen Worten auch auf den Fall ein, dass PZ nicht von PF sondern von dem Bogen BF abhänge.

Jakob rückte hierauf eine kurze Bemerkung[1]) in das Journal des Sçavans vom 17. Februar 1698 ein. Die gegebene Auflösung der Hauptaufgabe, nämlich der von den isoperimetrischen Curven, sei der Wahrheit nicht ganz entsprechend[2]). Er verpflichte sich dem gegenüber zu drei Leistungen: 1. die Analysis, welche seinen Bruder zu seiner Lösung geführt habe, zu errathen; 2. die sich in ihr vorfindenden Widersprüche aufzudecken, falls sie veröffentlicht würde; 3. die wahre, vollständige Lösung der Aufgabe zu liefern. Wolle jemand eine Wette darauf eingehen und auf jede dieser drei Leistungen einen Einsatz wagen, so sei er bereit, die gleiche, beziehungsweise doppelte, beziehungsweise dreifache Summe zu zahlen, je nach den der Reihe nach genannten Punkten, auf welche die Wette sich beziehe.

Das Journal des Sçavans vom 21. April 1698 brachte Johanns Erwiderung[3]). Er fragt, warum denn der unbekannte Herr Jemand[4]) die ursprünglich zugesagten 50 Imperialen nicht an Leibniz gelangen lasse und diesen als Richter anerkenne, wie er — Johann — es vorgeschlagen habe? Im Uebrigen sei bei der Eile seiner ersten Veröffentlichung ein unbedeutender Fehler vorgekommen, nicht bei der eigentlich gestellten Aufgabe mit $PZ = PF^n$, sondern bei der aus freien Stücken hinzugefügten Verallgemeinerung, zu welcher er keineswegs verpflichtet gewesen sei. Dort sei statt $b = \int \frac{PZ\,dx}{x}$ einfach

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 214. [2]) *pas entièrement conforme à la vérité.*
[3]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 215—220. [4]) *Nonnemo.*

$b = PZ$ zu setzen, es sei also $PF = \int \frac{PZdx}{\sqrt{a^2 - PZ^2}}$. Solle PZ von dem Bogen BF, der t heissen möge, abhängig gemacht werden, und sei v irgendwie von t abhängig, so habe sich ihm bei weiterem Nachdenken die Gleichung $v = \int \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$ ergeben.

Die Zeitungsnummern des Journal des Sçavans fuhren fort, Schriftstücke der beiden Brüder zu bringen. Am 26. Mai 1698 fragt Jakob[1]), ob die Erklärung vom 21. April genau so gemeint sei, wie sie sich abgedruckt finde, damit später keine Uebereilung mehr vorgeschützt werden könne. Am 23. Juni behauptet Johann[2]), die beiden ursprünglich gestellten Aufgaben, die isoperimetrische unter der Bedingung, $PZ = PF^n$ ebensowohl als die von dem Falle durch die Cycloiden, richtig gelöst zu haben, und zu mehr sei er nicht verpflichtet gewesen. Am 4. August sagt Jakob[3]), in der ursprünglichen Fassung der isoperimetrischen Aufgabe sei die Abhängigkeit der Ordinate PZ von dem Bogen BF mit enthalten gewesen, dieser Theil der Aufgabe müsse also mit erledigt werden, und deshalb frage er genauer, ob die Gleichung $dv = \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$ nicht etwa mit einem Druckfehler behaftet sei. Zugleich gibt er sein Einverständniss zu erkennen, dass Leibniz oder auch de l'Hospital und Newton als Richter dienen sollten, vorausgesetzt, dass sie ihr Urtheil erst zu fällen hätten, nachdem er seine Gründe sämmtlich auseinandergesetzt haben werde. In ebenderselben Nummer unmittelbar vor Jakobs Anfrage ist ein Brief[4]) desselben an Varignon abgedruckt, der gleichfalls mit dem Streite zusammenhängt. Jakob spricht nämlich hier Vermuthungen über Fehlschlüsse aus, welche sich Johann bei seiner Behandlung der isoperimetrischen Aufgabe wahrscheinlich habe zu Schulden kommen lassen, und die ihn durch Wiederholung derselben zu einem theilweise richtigen Ergebnisse führen konnten; so sei z. B. in dem Schlusse „Jeder Mensch ist von Stein, jeder Kiesel ist ein Mensch, also ist jeder Kiesel ein Stein" der Schlusssatz wahr, weil die Falschheit des Vordersatzes durch die des Nachsatzes aufgehoben werde. Die Nummer vom 8. December bringt wieder eine Zuschrift von Johann[5]) mit immer verletzenderen Aeusserungen gegen Jakob. Von Thatsächlichem ist nur hervorzuheben, dass Johann die Gleichung $dv = \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$ ausdrücklich wiederholt, wenn auch ohne besonders zu betonen, dass sie richtig sei, dass er sich freut, dass Jakob nunmehr Richter anerkenne,

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 220. [2]) Ebenda I, 221—222. [3]) Ebenda I, 230. [4]) Ebenda I, 222—229. [5]) Ebenda I, 231—239.

und dass er folgenden Vorschlag macht: in erster Linie solle Leibniz sein Urtheil abgeben; falle es gegen ihn, Johann, aus, so werde er sich dabei beruhigen; gegen ein Urtheil zu seinen Gunsten aber gestatte er Jakob die Berufung an den Marquis de l'Hospital und Newton.

Nun war endlich der Augenblick gekommen, dass Jakob Bernoulli seine eigene Auflösung der isoperimetrischen Aufgabe enthüllte, aber zugleich ist damit für uns der Augenblick gekommen, unsere Darstellung zu unterbrechen. Jakobs Abhandlungen erschienen in den A. E. von 1700 und 1701. Johanns Gegenlösung ist in den Veröffentlichungen der Pariser Akademie der Wissenschaften von 1706 enthalten. Sein Eingeständniss eines begangenen Irrthums hat er ebendort erst 1718 gegeben. Das sind lauter Dinge, die gemeinsam berichtet werden müssen, lauter Jahreszahlen, die auf unseren XVII. Abschnitt verweisen. Dort werden wir an dieses Kapitel uns wieder zu erinnern haben.

Wir haben (S. 229) versprochen, auf die Aufgaben zurückzukommen, welche Johann Bernoulli im Journal des Sçavans vom 26. August 1697 den Mathematikern stellte. Es waren deren sechs, welche alle[1] gewisse Minima aufzufinden verlangten oder an Minimalaufgaben anknüpften. Die wichtigste derselben war als erste an die Spitze gestellt, die Aufgabe: die kürzeste Linie auf einer nach aussen gewölbten Oberfläche zu finden[2]) und zwar wird die Auffindung in geometrischer Weise verlangt. Für Kugel, Kegel und Cylinder sei dieses sehr leicht, schwierig dagegen für Conoide und Sphäroide, d. h. also in unserer heutigen Sprache für Umdrehungsflächen zweiten Grades. Johann schlug als Beispiel das Umdrehungsparaboloid vor, bei welchem aber die beiden durch eine kürzeste Linie zu verbindenden Punkte nicht derselben Meridiancurve angehören dürfen, weil diese sonst selbst die gesuchte kürzeste Linie sei. Johann hatte mit seiner Aufgabe offenbar Jakob in Verlegenheit bringen wollen, denn er stellte sie den Mathematikern, welche da glauben Methoden zu besitzen, welche für alle dergleichen Aufgaben ausreichen[3]). Jakob nahm den hingeworfenen Handschuh auf. Im Maihefte 1698 der A. E. veröffentlichte er drei zusammenhängende Aufsätze[4]), deren Inhalt in grösster Kürze angedeutet werden mag. Der erste Aufsatz behandelt den Fall längs einer Cycloide bis zum Treffen einer Vertikalen, der von Johann bereits (S. 229) erledigt

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 204—205. [2]) P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien. Berichte der mathem.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Sitzung vom 3. Juli 1893. [3]) *aux Géomètres qui croyent avoir des méthodes pour toutes les questions de cette nature.* [4]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 253—266.

worden war. Eine Stelle kommt hier vor, welche bemerkt zu werden verdient[1]): „Ich habe bei allen solchen Aufgaben, wo es darauf ankommt, von unendlich vielen Curven der ähnlichen Natur eine herauszufinden, welche irgend eine Function am besten erfülle, bemerkt, dass von zwei Curven, deren Durchschnitt einen der gesuchten Punkte darstellt, die eine immer die Functionslinie ist, wie ich sie nenne, welche bald transcendent, bald algebraisch sein kann, während die andere stets algebraisch ist.“ Im XVII. Abschnitte dürfte eine Nachwirkung der hier benutzten Bezeichnung Functionslinie sich nachweisen lassen. Der dritte Aufsatz behandelt die von Johann, dem Erfinder des Gedankens der Trajectorien (S. 222), gestellte Aufgabe, diejenige Curve zu finden, welche eine unendliche Schaar von logarithmischen Linien rechtwinklig schneide. Der mittlere Aufsatz wendet sich zur Aufgabe der kürzesten Linien und löst sie für jeden Umdrehungskörper durch synthetische Betrachtungen, deren Grundgedanke darin besteht, dass jeder Punkt der kürzesten Linie zugleich auch Punkt einer Meridiancurve sei. Das Integral der Bogenlänge der kürzesten Linie ist beigefügt, aber nicht eigentlich abgeleitet. Die Aufgabe, meint Jakob, führe meistens auf Transcendente, und daher könne von einer geometrischen Ausführung, wie Johann sie verlangt habe, eigentlich nicht die Rede sein, wenn man nicht, der sonstigen Uebung widersprechend, schon solche Auflösungen geometrisch nennen wolle, welche eine Aufgabe bis auf Quadraturen zurückführen. Das war eine kleine Bosheit, wie sie im Charakter der wegen der isoperimetrischen Aufgabe zu derselben Zeit gewechselten Schriftstücke lag, und kleine Bosheiten, allerdings feiner ausgesprochen, finden sich auch in einer Erwiderung Johanns[2]) im Octoberhefte 1698 der A. E. Die Auflösungen, welche Jakob gegeben hatte, werden gebilligt, sie seien in Uebereinstimmung mit denjenigen, welche der Aufgabesteller selbst besitze, nur liessen sie durchweg Allgemeinheit vermissen. Es seien eben besondere Auflösungen besonderer Fälle, über welche nie hinausgegangen sei. Das Wort geometrisch verstehe er natürlich in dem erweiterten Leibnizischen Sinne, dass schon die Zurückführung auf Quadraturen als genügende Auflösung erachtet werde. Er habe es bei der Aufgabestellung überhaupt nur deshalb gebraucht, um die rein mechanische Auflösung auszuschliessen, die darin bestehe, dass

---

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 255: *Observabam in omnibus ejusmodi quaestionibus, ubi ex infinitis Curvis similibus aliqua invenienda est, quae functionem quampiam optime praestet, quod duarum Curvarum, quarum intersectione quaesitum determinatur, altera semper possit esse Linea, quam voco, Functionis, adeoque nunc mechanica, nunc algebraica, dum altera perpetuo est algebraica.* [2]) Ebenda I, 262—271.

man auf der Oberfläche einen Faden durch die beiden mit einander zu verbindenden Punkte lege und fest anziehe, wodurch er von selbst die Gestalt der kürzestmöglichen Linie annehme.

War, wird man fragen, Johann Bernoulli im October 1698 berechtigt, die mangelnde Allgemeinheit in Jakobs Behandlung der Aufgabe der kürzesten Linien zu rügen? War er selbst, der doch die Aufgabe in der engen auf Conoide und Sphäroide beschränkten Form gestellt hatte, in Besitz einer allgemeinen Behandlung? Sein Briefwechsel mit Leibniz gibt darüber Auskunft.

Am 4. December 1697 schickte Johann Bernoulli an Leibniz einen Ausschnitt des Journal des Sçavans mit der dort gestellten Aufgabe der kürzesten Linien. De l'Hospital sei mit derselben nicht fertig geworden, er aber habe sie auf eine Differentialgleichung zurückgeführt, und sofern die Veränderlichen in ihr getrennt werden könnten, sei die Sache erledigt[1]). Leibniz antwortete am 17. December, er habe schon früher über die kürzesten Linien auf gegebenen Oberflächen nachgedacht, aber ohne Befriedigung. Bei Gelegenheit der Brachistochrone habe er die Verwandtschaft beider Aufgaben erkannt, und eine Methode erfunden, die er aber nie erprobt habe[2]). Als im Maiheft 1698 der A. E. die Arbeit Jakobs, über die wir (S. 233) berichtet haben, erschienen war, machte Leibniz am 29. Juli Johann darauf aufmerksam[3]) und bemerkte zugleich, wie er selbst früher die Behandlung der Frage sich vorgestellt habe. In der Ebene seien Gerade, auf der Kugel Kreisbögen die kürzesten Linien. Nun denke man sich die gegebene Oberfläche aus ebenen oder auch aus kugelförmigen Elementen zusammengesetzt. In zwei sehr benachbarten Oberflächepunkten R, S seien solche Elemente vorhanden, welche einander schneiden. Ihrer Durchschnittslinie müsse ein Punkt T angehören, der $RT + TS$ zu einem Minimum mache. Könne man die Lage von T durch eine Gleichung bestimmen, so sei diese die Gleichung der kürzesten Linie. Gegen Ende August antwortete Johann[4]). Was Leibniz als Grundlage einer Methode vorschlage, sei ja ganz richtig und habe ihm selbst sich auch zunächst dargeboten, aber es führe nicht zur Erzielung der kürzesten Linien auf der Oberfläche. Er habe dagegen eine andere Methode gefunden, welche sich darauf gründe, dass die Ebene durch drei consecutive Punkte einer kürzesten Linie senkrecht zur Berührungsebene an die Oberfläche in einem jener drei Punkte stehe[5]). Mit Hilfe

[1]) Leibniz III, 470: *Hospitalius de eo desperavit; Ego vero illud reduxi ad aequationem differentialem, quae, si separentur indeterminatae, construi poterit.* [2]) Ebenda III, 475: *Sed ad praxin methodi non accessi.* [3]) Ebenda III, 526. [4]) Ebenda III, 532. [5]) *quod planum transiens per tria quaelibet puncta proxima*

dieses Satzes habe er die Gleichung der kürzesten Linie für alle Oberflächen ganz allgemein dargestellt, welche in besonderen Fällen, wie bei Conoiden und Sphäroiden, leicht zur Construction führen. Leibniz lobte in seiner sofortigen Antwort[1]) den Gedanken, der zur allgemeinen Gleichung, wenigstens zur allgemeinen Differentialgleichung führen werde. Damit hört der Briefwechsel über die kürzesten Linien auf, abgesehen von einer kurzen Bemerkung Johanns in einem im September geschriebenen Briefe, er habe eine Antwort auf Jakobs Auflösung an die A. E. abgehen lassen, womit jedenfalls der Aufsatz im Octoberhefte 1698 der A. E. gemeint war.

Es steht also fest, dass Johann Bernoulli damals wirklich die Haupteigenschaft der kürzesten Linien kannte. Wie die allgemeine Gleichung hiess, zu welcher er gelangt war, ob sie der Hauptsache nach mit den Ergebnissen der Abhandlung übereinstimmte, welche Johann Ende 1728 an Professor Klingenstierna von Upsala mitgetheilt haben will, welche er aber erst 1742 in der Gesammtausgabe seiner Werke zum Drucke gab[2]), dürfte kaum zu entscheiden sein. Wäre es der Fall, so wäre damit allerdings der Beweis erbracht[3]), dass Johann Bernoulli schon 1698 Oberflächengleichungen mit Hilfe von drei Raumcoordinaten aufzustellen und zu behandeln wusste. Wir kommen auch hierauf im XVII. Abschnitte wieder zurück.

Wir haben (S. 214—217) von dem persönlichen Verkehre, der zwischen Johann Bernoulli und dem Marquis de l'Hospital 1692 in Paris stattfand und von einem Buche des letzteren gesprochen, welches, wenn es nicht als geistiger Diebstahl an dem ersteren aufzufassen ist (eine Meinung, der wir uns nicht anzuschliessen vermögen), jedenfalls unter seinem Einflusse entstanden ist. Die *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des Lignes courbes* ist zuerst 1696, dann (nach des Verfassers 1704 erfolgtem Tode) in wiederholten Auflagen 1716, 1720, 1768 gedruckt werden. Der Erfolg des Buches ist um so begreiflicher, als es das erste, lange Zeit das einzige, fast noch längere Zeit das am leichtesten lesbare Lehrbuch der Differentialrechnung war. Die Differenzen — denn nur dieses Wort wird angewandt — sind als unendlich kleine Grössen erklärt, welche ebenso gegen Endliches verschwinden, wie ihre höheren Potenzen gegen sie selbst. Sie entstehen, indem ein früherer Zustand von einem nachfolgenden abgezogen wird, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass bei Constanten, welche durch einen der ersten Buch-

---

lineae quaesitae debeat esse rectum ad planum tangens superficiem curvam in aliquo istorum punctorum.

[1]) Leibniz III, 555. [2]) Joh. Bernoulli *Opera* IV, 108—128. [3]) Stäckel l. c. S. 448.

staben des Alphabetes bezeichnet werden, während die letzten für die Variablen aufbewahrt bleiben[1]), der frühere Zustand mit dem nachfolgenden genau übereinstimmt. Die Differenz von $a + x + y - z$ ist also

$$(a + x + dx + y + dy - z - dz) - (a + x + y - z) = dx + dy - dz.$$

Die Differenz von xy ist

$$(x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy = xdy + ydx$$

wegen des Verschwindens von $dxdy$ neben ersten Potenzen von dx und dy. Die Differenz von xyz findet man als

$$xydz + xzdy + yzdx,$$

indem man zunächst xy als einfache Variable betrachtet u. s. w. Ist $z = y = x$, so erhält man die Differenz von x^3, nämlich

$$xxdx + xxdx + xxdx = 3x^2dx$$

und ähnlich die Differenz von x^n als $nx^{n-1}dx$, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Um die Differenz von $\frac{x}{y} = z$ zu finden, geht man zur Gleichung

$$x = yz, \quad dx = zdy + ydz$$

über, woraus

$$dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Ganz ähnlich ist die Ableitung der Differenz von $x^n = z$, wenn n keine ganze positive Zahl ist. Multiplikation oder Potenzirung führt zu einer neuen Gleichung, in welcher nur ganze positive Exponenten vorkommen, und diese zu differentiiren hat man schon gelernt. Das Differentiiren algebraischer Functionen ist damit vollständig erledigt, aber das Differentiiren irgend welcher Transcendenten wird nicht gelehrt. De l'Hospital kümmert sich weder um Logarithmen noch um Exponentialgrössen, weder um trigonometrische noch um cyclometrische Functionen, welche hier in Frage kommen könnten.

Der ganze weitere Inhalt des Lehrbuches besteht vielmehr aus Anwendungen des Differentiirens auf Curven, die theils algebraisch sind, theils so behandelt werden, dass man wenigstens nur mit algebraischen Gleichungen zu thun hat. Der Punkt der Curve, an welchen eine Berührungslinie gelegt wird, heisst regelmässig M, der Fusspunkt seiner durch y bezeichneten Ordinate[2]) heisst P, der Fusspunkt der Berührungslinie T. Die Abscisse x wird mit ins Französische übersetztem Namen *la coupée* genannt[3]). Heute klingt uns allerdings diese Uebersetzung ebenso fremdartig wie die von *cercle baisant* für

---

[1]) *Quantités constantes, quantités variables.* [2]) *appliquée.* [3]) *Analyse des infiniment petits* Nr. 9, pag. 11.

den Osculationskreis[1]). Im Laufe der Untersuchungen kommen sehr verschiedene Curvengattungen vor: solche, welche mit Benutzung mehrerer Brennpunkte entstanden sind[2]), Brennlinien durch Zurückwerfung[3]), ebensolche durch Brechung[4]), einhüllende Linien[5]), Parallelcurven[6]) u. s. w., lauter Entstehungsweisen, welche theils an Tschirnhaus, theils an Leibniz uns erinnern, und an den letzteren denken wir auch sofort, wenn die Abscissen nicht auf einer geraden Linie, sondern auf einer Curve abgenommen werden[7]). Bei der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen, welche einen ganzen Abschnitt[8]) einnimmt, ist besonders hervorgehoben[9]), die Differenz der Ordinate müsse vor und nach dem Punkte, in welchem das Maximum oder Minimum eintritt, verschiedenen Zeichens sein, aber die Veränderung des Zeichens müsse nicht grade den Durchgang durch Null voraussetzen, sie könne auch bei dem Durchgang durch das Unendlichgrosse entstehen, was nicht so zu verstehen ist, als wolle de l'Hospital behaupten, die definitionsgemäss unendlich kleinen Differenzen könnten plötzlich unendlich gross werden, sondern Differenz bedeutet hier so viel als Differentialquotient, wenn etwa dx als constant, d. h. als Einheit betrachtet wird. Das ist einer jener Gegenstände, über welche, wie wir wissen (S. 222) de l'Hospital 1695 mit Johann Bernoulli in Briefwechsel stand. War er damals, wie nicht bezweifelt werden kann, für beide Briefschreiber neu, so kann er unmöglich 1692 in den Lehrvorträgen Johann Bernoullis vorgekommen sein, und wir haben hier eine Stelle, die unbedingt später hinzugearbeitet, den erhobenen Vorwurf einfachen Abdruckes des alten Heftes vernichten hilft. Noch Anderes entstammt ersichtlich dem erwähnten Briefwechsel von 1695, wenn wir auch, da jener Briefwechsel leider verloren ging, nicht immer im Stande sind zu sagen, was jedem der beiden sich wissenschaftlich Unterhaltenden angehörte. Die Benennung *point de rebroussement*[10]) für den Rückkehrpunkt hat Bernoulli Leibniz gegenüber für sich in Anspruch genommen. Wir haben keinen Grund diesen Ausspruch zu verdächtigen. Dann war zwischen beiden von dem Krümmungshalbmesser in einem Wendepunkte die Rede, und dass dieser bald ∞, bald 0 sei. Dieser Gegenstand ist in der Analyse des infiniment petits des Weiteren erörtert[11]), und zwar im Zusammenhange mit der Evolute. Die Curve BAC (Figur 43) habe in A einen Wendepunkt, dessen Berührungslinie in der Figur ge-

[1]) *Analyse des infiniment petits* Nr. 203, pag. 174. [2]) Ebenda Nr. 32, pag. 27. [3]) Ebenda Nr. 110, pag. 104. [4]) Ebenda Nr. 132, pag. 120. [5]) Ebenda Nr. 146, pag. 131. [6]) Ebenda Nr. 167, pag. 147. [7]) Ebenda Nr. 15, pag. 16. [8]) Ebenda pag. 41—54. [9]) Ebenda Nr. 46, pag. 42. [10]) Ebenda Nr. 65, pag. 59. [11]) Ebenda Nr. 82 pag. 80 und Nr. 88, pag. 86.

zeichnet ist, und ebendort den Krümmungshalbmesser von unendlicher Grösse. Nun denke man zur Curve BAC als Evolute die DAE als Evolvente derart gezeichnet, dass A mit A zusammenfallend einander so entsprechen, dass der Punkt A, sofern er der DE angehört, seinen Krümmungsmittelpunkt in A, als einem Punkte der BC, besitzt. Dann hat die DE in A den Krümmungshalbmesser $AA = 0$. Zugleich hat sie aber in A einen Wendepunkt. Der CA als Evolute gehört die EA mit der gegen C gekehrten Hohlseite als Evolvente an, der BA als Evolute die mit der Hohlseite gegen B gekehrte Evolvente DA. In A müssen also die zwei entgegengesetzten Wölbungsarten der EA und DA in einander übergehen, d. h. A ist Wendepunkt von DE. Es wird dabei bemerkt, auch der Zeichenwechsel des zweiten Differentials könne durch ∞ anstatt durch 0 vermittelt werden. Als Beispiele von Curven mit Wendepunkten, in welchen das zweite Differential der Ordinate durch ∞ hindurch das Vorzeichen ändert, werden $a^2x = y^3$ und $a^2x^3 = y^5$ genannt. Für beide Curven sei der Coordinatenanfangspunkt Wendepunkt. In der erstgenannten Curve sei dort der Krümmungshalbmesser ∞, in der zweiten sei er 0. Die Rechnung selbst ist bei de l'Hospital nicht geführt, allein es ist nicht schwer, sich von der Richtigkeit seiner Behauptung zu überzeugen. Jakob Bernoulli hat im Septemberhefte 1697 der A. E. den gleichen Gegenstand in Erörterung genommen[1]) und dadurch zu erklären gesucht, dass er statt der Curve $a^2x^3 = y^5$ zunächst $a^2x^3 = y^5 - b^2y^3$ betrachtete und dann die Constante b zum Verschwinden brachte. Durch Inanspruchnahme der Evolution gelangte de l'Hospital aber auch zu einer weiteren Bemerkung, die, wie er sagt, bisher noch nicht gemacht worden sei[2]). Die Curve BAC (Figur 44) habe wieder in A einen Wendepunkt und werde als Evolute behandelt. Zum Curvenstücke BA gehört die Evolvente EF, zum Stücke AD die ED, zum Stücke DC endlich die DG. Nun ist E ebenso wie D ein Rückkehrpunkt, aber beide sind doch verschiedener Natur. Während in D die DE ihre Hohlseite gegen A, die DG ihre Hohlseite gegen C kehrt, sind

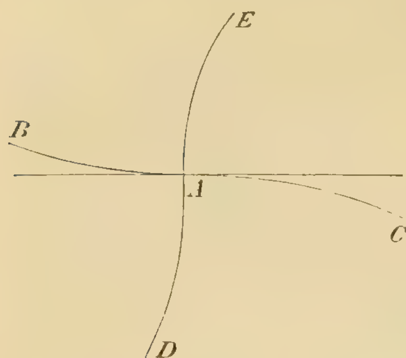


Fig. 43.

---

[1]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 779—782. [2]) *Analyse des infiniment petits* Nr. 109, pag. 102: *que personne, que je sçache, n'a encore consideré.*

in E die Hohlseiten von ED und von EF gegen A (beziehungsweise B) gekehrt. Sollten wir de l'Hospital noch immer vom Verdachte vollständigen Diebstahles reinigen müssen, so ist grade dieser Rückkehrpunkt zweiter Art, der Schnabel, wie man ihn wohl im Gegensatze zur Spitze genannt hat, geeignet, seine wenigstens zeitweilige Selbständigkeit zu erweisen.



Fig. 44.

Wir haben bei noch einer Aufgabe zu verweilen, welche in der Analyse des infiniment petits zuerst an die Oeffentlichkeit trat[1]), bei der Auswerthung unbestimmter Formen, genauer gesagt bei der Auswerthung von Brüchen, deren Zähler und Nenner durch die Annahme $x = a$ in Null übergehen. Jener Bruch $= y$ gesetzt, mag (Figur 45) die Gleichung einer Curve AMD sein, während ANB, COB die Curven sind, deren Ordinaten der Zähler und der Nenner jenes Bruches sind. Als Einheit der Zeichnung diene $AB = a$, so dass z. B. $\frac{MP}{AB} = \frac{NP}{OP}$. Man sucht also DB unter der in der Figur zur Anschauung gebrachten Annahme, dass die beiden Curven ANB, COB sich in B auf der Abscissenaxe bei

$$x = a = AB$$

schneiden. De l'Hospital schreibt vor, man solle zu dem benachbarten Punkte b der Abscissenaxe übergehen. In ihm sind die Ordinaten bf, bg die Differenzen der Ordinaten der Zähler- und der Nennercurve, und deren Quotient liefert db, welches von DB sich nicht angeblich unterscheidet. Dadurch ist aber die Regel begründet, welche darin besteht, den Zähler und den Nenner des in

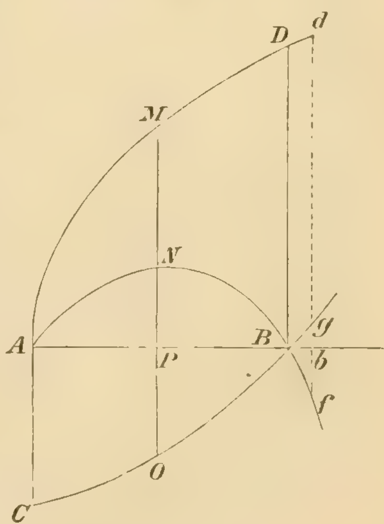


Fig. 45.

[1]) *Analyse des infiniment petits* Nr. 163, pag. 145.

unbestimmter Form erscheinenden Bruches jeden für sich zu differenziren und dann erst $x = a$ einzusetzen. Ist etwa

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}},$$

so findet man

$$\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^2dx}{3\sqrt[3]{a^2x}}$$

als Differenz des Zählers, $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ als Differenz des Nenners, und diese dividirt man durch einander unter Einsetzung von $x = a$. Das gibt

$$-\frac{4a}{3}dx : -\frac{3}{4}dx = \frac{16}{9}a.$$

In einem zweiten Beispiele $y = \frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}}$ findet man $y = 2a$, wenn $x = a$. Hier sei, setzt de l'Hospital hinzu, die Differentialrechnung zu umgehen. Aus der für y gegebenen Gleichung folge unter Rationalisirung derselben:

$$a^2x^2 + 2a^2xy - axy^2 - 2a^3x + a^4 + a^2y^2 - 2a^3y = 0.$$

Diese Gleichung durch $x - a$ dividirt, liefere

$$a^2x - a^3 + 2a^2y - ay^2 = 0,$$

und hier $x = a$ eingesetzt bringe $y = 2a$ hervor.

Kaum war de l'Hospital im Jahre 1704 gestorben, so veröffentlichte Johann Bernoulli[1]) in Augusthefte 1704 der A. E. einen Aufsatz, in welchem er die Methode jener Auswerthung ebenso wie das bestimmte Beispiel für sich in Anspruch nahm. Letzteres habe er vor etwa zehn Jahren[2]) de l'Hospital und anderen französischen Mathematikern vorgelegt, welche nichts damit anzufangen wussten, bevor er ihnen den Weg gezeigt habe. Dann habe de l'Hospital die Regel neben Anderem, was Bernoulli angehörte[3]), in der Analyse des infiniment petits veröffentlicht. Ganz vollkommen, setzte Bernoulli hinzu, sei die Regel jedoch nicht, denn sie führe unter Umständen zu einem neuen Bruche, der $x = 0$ abermals in $\frac{0}{0}$ übergehen lasse; dann müsse man eben die schon benutzte Methode zum zweiten Male anwenden. So werde

$$y = \frac{a\sqrt[3]{4a^3 + 4x^3} - ax - a^2}{\sqrt{2a^2 + 2x^2} - x - a}$$

erst nach wiederholter Differentiation des Zählers und des Nenners zu $2a$.

---

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 401—405. Darin die Worte: *Marchioni Hospitalio cujus nunc suprema fata lugemus.* [2]) *ante hos decem circiter annos.* [3]) *juxta alia mea.*

Man kann eben nicht sagen, dass die Ausdrucksweise, deren Johann Bernoulli sich bei dieser Gelegenheit mit Bezug auf einen Verstorbenen bediente, während er, so lange de l'Hospital lebte, acht Jahre lang geschwiegen hatte, sehr hübsch gewesen sei, und in Frankreich verübelte man ihm sein Benehmen in hohem Grade. Besonders erzürnt war Josef Saurin (1659—1737), ein Freund des Verstorbenen, und Varignon schrieb dieses auch an Johann Bernoulli, der seinerseits unter dem 11. Juli 1705 Leibniz davon Mittheilung machte[1]). Aber, sagte er, an der nachträglichen Abfertigung trage Saurin selbst die Schuld, der die angeblich de l'Hospitalsche Methode über alle Gebühr gepriesen habe. Das habe er erst ganz neuerdings erfahren und sich selbstverständlich nicht gefallen lassen.

Diese wenigen Bemerkungen knüpften sich allzunatürlich an den Bericht über die Analyse des infiniment petits an, als dass wir sie nicht hätten anschliessen sollen. Nun kehren wir aber bis vor die Zeit der Herausgabe dieses Lehrbuches, bis in das Jahr 1693 zurück, in welchem Auszüge von Briefen Newtons an Wallis durch diesen in der Ausgabe seiner eigenen Werke zum Drucke gegeben wurden[2]), in denen die erste Enthüllung über die Fluxionsrechnung stattfand. Das Datum der Briefe[3]) ist vom 27. August und 17. September 1692. Sie sind also geschrieben, nachdem Leibniz den Algorithmus der Differentialrechnung 1684, den der Integralrechnung 1686 herausgegeben hatte, nachdem Craig 1685 der bewundernde Dolmetscher Leibnizischer Ideen in England geworden war, nachdem Jakob Bernoulli in einer grossen Reihe von Aufsätzen in den A. E. von 1691 und den ersten Monaten 1692 seine Gewandtheit in der neuen Methode und dadurch zugleich deren grosse Verwendbarkeit offenbart hatte.

In jenen Briefauszügen also, welche Wallis angefertigt hat, und in denen Newton immer in der dritten Person redend vorkommt, so dass man nicht einmal mit aller Bestimmtheit sagen kann, Newtons Meinung sei überall genau richtig ausgesprochen, heisst es, der Kern der Newtonschen Lehre sei der Satz: Data aequatione fluentes quotcunque quantitates involvente fluxiones invenire et viceversa, jener Satz also, der im zweiten Briefe an Leibniz (S. 178) als Anagramm enthalten war. Unter Fluenten verstehe Newton unbestimmte Grössen, d. h. solche, welche bei der Erzeugung von Curven durch eine Ortsbewegung beständig vermehrt oder vermindert werden, und unter deren Fluxion verstehe er die Geschwindigkeit der Zu- oder Abnahme[4]). Das sei, wie alles Neue, beim ersten Anblick

[1]) Leibniz III, 765. [2]) Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge* pag. 62. [3]) *Opuscula Newtoni* I, 359—370. [4]) *Per fluentes quantitates intelligit indeterminatas, id est, quae in generatione curvarum per*

etwas schwierig zu verstehen, aber doch halte Newton dafür, ihr Begreifen sei immer noch leichter als das von Augenblicksveränderungen[1]) oder kleinsten Theilen oder unendlich kleinen Differenzen, weil Entstehung von Figuren und Grössen durch stetige Bewegung naturgemässer sei als die aus Theilen, doch vernachlässige er auch die Theorie solcher Theile keineswegs, sofern sie zur Abkürzung des Geschäftes diene, oder es durchsichtiger mache, oder zur Erforschung der Verhältnisse der Fluxionen unter einander führe. Für eine Fluente, z. B. für die Abscisse einer Curve nehme er gleichmässige Vermehrung in Anspruch und setze deren Fluxion der Einheit gleich, die Fluxionen anderer Fluenten v, x, y, z bezeichne er durch punktirte Buchstaben $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Die Fluxionen selbst verändern sich aber auch, und die Geschwindigkeit ihrer Veränderungen können als ihre Fluxionen betrachtet und durch abermalige Punktirung bezeichnet werden. So entstehe $\ddot{v}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, und nun sei ersichtlich, was unter $\dddot{v}$, unter $\ddddot{v}$ u. s. w. zu verstehen sei. Die erste Aufgabe, die Fluxion einer Fluente zu finden, wird nun gelöst und als Grundlage genommen, dass die Fluxion von x^n als $nx^{n-1}\dot{x}$ sich darstelle, wenn n ganz und positiv sei. Der Beweis wird geführt, indem eine unendlich kleine Grösse o gewählt wird, welche mit den Fluxionen $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}$ vervielfacht die Augenblicksveränderungen[2]) der Fluenten x, y, z darstellen. Dann geht x^n über in

$$(x + o\dot{x})^n = x^n + nx^{n-1}o\dot{x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}o^2\dot{x}^2 + \cdots$$

und die Fluxion der x^n wird nach Division durch o als

$$nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}o\dot{x}^2 + \cdots$$

erkannt oder als $nx^{n-1}\dot{x}$, indem die Glieder, welche das unendlich kleine o noch enthalten, wegfallen. Ist n nicht ganz und positiv, so werden die Substitutionen gelehrt, von welchen schon an zu vielen Stellen dieses Bandes die Rede war, als dass wir vielfach Gesagtes nochmals wiederholten.

Wallis berichtet dann weiter über die zweite in jenem Newtonschen Briefe von 1676 anagrammatisch enthalten gewesene Stelle (S. 178), welche eine doppelte Art der Auflösung der Aufgabe, von der Fluxion zur Fluente aufzusteigen, in Aussicht stelle. Die eine Art bestehe in einer Anwendung von Reihen mit unbestimmten Coefficienten für die Unbekannten, deren Fluxionen alsdann gebildet werden und zu einer Gleichung führen, in welcher die homologen

motum localem perpetuo augentur vel diminuuntur; et per earum fluxionem intelligit celeritatem incrementi vel decrementi.

[1]) *momenta.* [2]) *incrementa momentanea.*

Glieder einander aufheben, so dass die vorher unbekannten Coefficienten dadurch erkannt werden. Diese Methode sei aus den sie schildernden Worten deutlich zu verstehen. Die andere Art sei von der Gattung, welche man bei der Reihenentwicklung der einen Unbekannten einer Gleichung nach Potenzen der zweiten in der Gleichung auftretenden Unbekannten kennen gelernt habe. Die Aehnlichkeit der beiden Aufgaben leuchte ein, wenn man bedenke, dass man von einer Gleichung ausgehe, welche y, z, $\dot y$, $\dot z$ enthalten solle. Nun betrachte man z als einförmig veränderlich, so dass dessen Fluxion $\dot z$ als Einheit gewählt werden könne. Dann sei die Absicht, y in Gestalt einer nur z enthaltenden convergenten unendlichen Reihe[1]) kennen zu lernen. Manchmal sei dieses allerdings unmöglich, manchmal sei ein Zurechtstutzen der gegebenen Gleichung erforderlich. Wie Newton diese Methode, welche von der anderen sich eigentlich nur durch einmalige statt durch zweimalige Anwendung von Reihen mit vorläufig unbekannten Coefficienten unterscheidet, verstanden haben will, geht aus dem Beispiele

$$y^2\dot z^2 - z^2\dot z\dot y - d^2\dot z^2 + dz\dot z^2 = 0$$

hervor. Durch $\dot z = 1$ geht sie in

$$y^2 - z^2\dot y - d^2 + dz = 0$$

über, und nun nimmt man an, es sei

$$y = kz^\lambda + \cdots, \qquad \dot y = \lambda kz^{\lambda-1} + \cdots.$$

Diese Werthe in die vorher gewonnene, von $\dot z$ schon freie Gleichung eingesetzt geben

$$-d^2 + dz + k^2z^{2\lambda} + \cdots - \lambda kz^{\lambda+1} - \cdots = 0,$$

und ist $\lambda = 0$, so findet man $k = d$, d. h. man findet $y = d + p$, wo p neuerdings unbekannt ist, und $\dot y = \dot p$. Die Fluxionsgleichung geht dadurch über in

$$2dp + p^2 - z^2\dot p + dz = 0.$$

Sie setzt voraus, dass dz gegen $2dp$ sich aufhebe, d. h. dass

$$p = -\frac{z}{2} + q$$

sei, nebst

$$\dot p = -\frac{1}{2} + \dot q,$$

weil ja $\dot z = 1$ angenommen wurde. Fahre man so fort, so gelange man zu

$$y = d - \frac{z}{2} - \frac{3z^2}{8d} - \frac{9z^3}{16d^2} - \text{etc.}$$

Es ist keinem Zweifel unterworfen, dass Newton im Stande ge-

[1]) *in serie infinita convergente quae solum z involvet.*

wesen wäre, diese beiden Briefe, beziehungsweise deren Auszüge, spätestens 1676 bekannt zu machen, und dass sie damals ein Aufsehen der Bewunderung erregt haben müssten. Ganz anders 1693. Wenn die Briefe jetzt Aufsehen machten, so konnte es nur ein solches der Verwunderung sein, und wenn diese nicht laut wurde, so geschah es darum, weil die hohe Achtung, die man dem Verfasser von Abhandlungen über die Farbenlehre in den P. T. von 1672, dem Verfasser der Principien von 1687 auf dem europäischen Festlande nicht minder als in Grossbritannien verdientermassen zollte, den Spöttern den Mund schloss.

Mussten die Leser sich nicht sagen, was Johann Bernoulli im August 1696 darüber an Leibniz schrieb[1]), dass Newtons Methode der Sache nach sich ganz und gar nicht von der Differentialrechnung unterscheide, wie dieser selbst in seinem Werke der Principien eingestehe, dass er nur ein, beziehungsweise mehrere Pünktchen statt *d*, *dd* u. s. w. schreibe? Klingt es so ungerecht, wenn Bernoulli fortfährt[2]): Ich weiss nicht, ob nicht Newton seine Methode erst bildete, nachdem er Dein Rechnungsverfahren gesehen hatte? Woher sollte Bernoulli anderer Meinung gewesen sein? Leibniz freilich wusste es besser und antwortete[3]), Newton habe schon vor zwanzig Jahren — das war 1676 — ihm Andeutungen gemacht, denen zufolge er damals schon Bedeutendes besessen haben müsse.

Und betrachtet man nicht das Datum der Briefe, sondern das ihrer Drucklegung, so musste letztere nun gar unbegreiflich erscheinen, denn inzwischen hatte das Aprilheft 1693 der A. E. Leibnizens Integration von Differentialgleichungen in Reihengestalt gebracht, von welcher — auch das sagt Johann Bernoulli in dem erst angeführten Briefe — die Newtonsche sich nur durch grössere Mühseligkeit unterschied.

Nicht eben lange nachdem durch Wallis jene Auszüge aus Newtonschen Briefen veröffentlicht waren, trat 1695 in den A. E. ein grundsätzlicher Gegner der Leibnizischen Differentialrechnung auf: Bernhard Nieuwentijt[4]) (1654—1718), praktischer Arzt und gleichzeitig Bürgermeister in Purmerend in Nordholland. Er war nicht Gegner der Person, sondern der Sache, und er richtete deshalb seine Angriffe in gleicher Weise wie gegen Leibniz auch gegen die Brüder Bernoulli und den Marquis de l'Hospital[5]). Er hat auch besondere Schriften in der gleichen Absicht verfasst: *Considerationes circa ana-*

---

[1]) Leibniz III, 316—317. [2]) *Nescio annon Newtonus, Tuo calculo viso, suam demum Methodum fabricaverit.* [3]) Leibniz III, 320. [4]) Poggendorff II, 289. [5]) Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwicklung von Leibniz bis auf Lagrange S. 123—138.

lyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia (1694) und ***Analysis infinitorum*** (1695).

Die Angriffe, welche Nieuwentijt gegen die logische Grundlage der Differentialrechnung gerichtet hat, sind scharfsinniger als die Versuche, welche er veranstaltete, jene Grundlagen fester zu sichern. Er hat dreierlei an der Differentialrechnung auszusetzen. Erstens sei sie der mit anderen Methoden gemeinsamen Schwierigkeit unterworfen, dass Grössen als Nichts bei Seite gelassen werden, welche nur unendlich klein seien. Zweitens fehle eine Anwendung der Differentialrechnung auf Exponentialgrössen. Drittens sei, selbst wenn man mit den ersten Differentialen sich befreunden könnte, den folgenden Differentialen d^2x, d^3x u. s. w. ein Sinn nicht abzugewinnen. Der erste Einwurf insbesondere ist immer und immer wiedergekehrt bis tief in das 19. Jahrhundert, und damit ist dessen zum mindesten theilweise Berechtigung nachgewiesen. Aber wie findet sich denn Nieuwentijt mit der unleugbar vorhandenen Schwierigkeit ab? Er nimmt ein Unendlichgrosses[1]), welches er durch m bezeichnet, und nennt den m ten Theil eines Endlichen ein Unendlichstel[2]). Dieses ist noch nicht Nichts, aber sein Unendlichstel oder $\frac{b}{m^2}$ ist Nichts, denn dieses liefert mit dem unendlichgrossen m vervielfacht noch nicht Endliches, sondern erst ein Unendlichstel. Aber ist das nicht Wortspielerei? Besagt es nicht im Grunde das Gleiche, was Leibniz und die Seinen in die Worte kleideten, höhere Potenzen eines Unendlichkleinen verschwänden neben dessen niedrigeren Potenzen und das Unendlichkleine selbst neben Endlichem und das Endliche neben Unendlichgrossem?

Leibniz beantwortete[3]) die Nieuwentijtschen Angriffe in den A. E. von 1695. Er gab dort, wenn auch in gewundener Weise, zu, dass indirekte Beweisführungen von der Art, wie die griechischen Geometer, insbesondere Archimed, sie anwandten, am geeignetsten seien, die Wahrheit der Sätze festzustellen, bei welchen man auch des Unendlichkleinen sich bedienen könne, aber schliesslich sei es nicht mehr als ein Wortstreit, wenn Jemand die Gleichheit von Grössen, welche um ihnen selbst gegenüber Unendlichkleines sich von einander unterscheiden, verwerfe[4]). Dazu komme noch Eines: dass solchen Figuren, welche aus Linienelementen bestehen, immer andere endliche Figuren ähnlich seien, so dass man Verhältnisse von nicht Angebbarem durch Verhältnisse angebbarer Grössen zu ersetzen im Stande sei.

---

[1]) *quantitas infinita.* [2]) *infinitesima.* [3]) Leibniz V, 320—328. [4]) *Et si quis talem aequalitatis definitionem rejicit, de nomine disputat.*

Der zweite Einwand hatte der Differentiation von Exponentialgrössen gegolten. Auch hier begann Leibniz mit einem Zugeständnisse. Wenn $y^x = z$, so sei

$$dz = (y + dy)^{x+dx} - y^x = y^{x+dx} + xy^{x+dx-1}dy - y^x,$$

sofern alle Glieder wegbleiben, welche Produkte von Differentialen einschliessen. Diese Gleichung leide aber an dem Fehler, dass in ihr die Homogeneität der Differentiale nicht gewahrt sei[1]) und dass sie vermöge dessen untauglich sei, das wirklich Gesuchte, nämlich das Verhältniss von dx zu dy[2]), zu liefern. Nach den Principien der Differentialrechnung müsse man, wenn Differentiale mit endlichen Grössen gemischt vorkommen, erstere als Null betrachten. Dadurch gehe die erhaltene Gleichung über in

$$0 = y^{x+0} + xy^{x+0-1}0 - y^x \quad \text{oder in } 0 = y^x - y^x,$$

und das sei zwar wahr, führe aber nicht weiter. Dagegen könne man folgenden Weg einschlagen. Es sei $\int \frac{dx}{x} = \log x$. (Das wusste Leibniz durch die Quadratur der Hyperbel.) Ferner gehe aus $x^v = y$ die Gleichung $v \cdot \log x = \log y$ hervor oder unter Anwendung der Integralform für die vorkommenden Logarithmen $v \cdot \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$. Differentiire man diese Gleichung, so entstehe

$$v \cdot \frac{dx}{x} + dv \cdot \log x = \frac{dy}{y}.$$

Daraus aber wird[3])

$$d(x^v) = x^v \cdot \frac{v}{x}\, dx + x^v dv \log x.$$

An diese Stelle erinnerten wir, als wir (S. 223) Leibniz einen Vorgänger von Johann Bernoulli in der Differentiation der Exponentialgrössen nannten.

Nun wendet sich Leibniz drittens zu den höheren Differentialen. Er nimmt an, die x verlaufen in geometrischer, die y in arithmetischer Progression. Alsdann findet das Verhältniss $dx : dy = x : a$ statt, wo a eine Constante bedeutet und auch dy als constant gilt. Hieraus folgt $dx = \frac{x\,dy}{a}$ und durch Differentiation

$$ddx = \frac{dx \cdot dy}{a} = \frac{dx \cdot dx}{x}, \quad \text{beziehungsweise } \frac{ddx}{dx} = \frac{dx}{x},$$

d. h. ddx verhält sich zu dx wie dx zu x, das höhere Differential

[1]) *Non servat leges homogeneorum calculi differentialis.* [2]) *Non exhibet quaesitum, nempe rationem dx ad dy.* [3]) Da Leibniz die Rechnung bis hierher richtig geführt hat, so kann es nur ein Druckfehler sein, wenn bei ihm die Schlussgleichung anders lautet als es sein muss, und deshalb weichen wir hier im Texte von ihm ab.

ist dem niedrigeren gegenüber ebenso ein Unendlichkleines, wie das erste Differential der endlichen Grösse gegenüber. So die Antwort Leibnizens. Dass in dem über die zweiten und höheren Differentiale Gesagten sehr viel unstatthafte Willkür mit einlief, wird man gegenwärtig nicht in Abrede stellen.

Auf Nieuwentijts Zweifel wegen der Differentiation von Exponentialgrössen kam Johann Bernoulli, der dieses mathematische Gebiet fast mit Eifersucht als sein eigenstes vertheidigte, im Märzheft 1697 der A. E. zurück[1]), in jenem Aufsatze, der, wie wir (S. 223) sagten, die Grundzüge der Rechnung mit den Exponentialgrössen für alle Zeiten festsetzte. Wir haben ebendort bemerkt, dass Bernoulli als wesentliches geometrisches Hilfsmittel von der logarithmischen Linie Gebrauch machte. Von einer selbständigen Gegenschrift gegen Nieuwentijt aus der Feder eines jungen Mathematikers, Jakob Hermann, den wir nur ganz im Vorbeigehen (S. 87) einmal zu nennen Gelegenheit hatten, wird im XVII. Abschnitte die Rede sein.

Vor Abschluss des Jahrhunderts trat noch ein persönlicher Feind Leibnizens in die Schranken der Oeffentlichkeit, mit welchem wir uns zum Schlusse dieses Abschnittes beschäftigen müssen. Es war Nicolas Fatio de Duillier[2]) (1664—1753). Die Familie hatte sich 1635 in Basel eingebürgert, und dort ist Fatio geboren, aber als er wenige Jahre alt war, kaufte der Vater die Herrschaft Duillier bei Genf an und wurde 1678 Genfer Bürger. Schon mit 18 Jahren war Fatio 1682 in Paris, um an der dortigen Sternwarte unter Cassini sich als praktischen Astronomen auszubilden. Von 1684 bis 1686 lebte er in Duillier, dort die in Paris begonnenen Beobachtungen fortsetzend. Ende 1686 ging er nach Holland, wo er zu Huygens in persönliche Beziehungen trat. Im Jahre 1687 wandte er sich nach England und wurde 1688 Mitglied der Royal Society in London. Ein neuer kurzer Abstecher nach Holland zu Huygens fällt in den Anfang des Jahres 1691, ein vielleicht etwas längerer Aufenthalt in Duillier in die Jahre 1700 und 1701, aber Fatios eigentlicher Wohnsitz blieb in England. Dort betheiligte er sich 1707 an Umtrieben religiöser Fanatiker, welche ihm eine Verurtheilung zum Pranger und zu einer Freiheitsstrafe zuzogen, dort starb er in einem Alter von fast 90 Jahren, ohne von seiner Begeisterung für die Propheten zurückgekommen zu sein. Wir können uns der Auffassung nur anschliessen, man habe Fatio etwa von 1706 an als geisteskrank zu betrachten, und in der That sind von da an keine

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 179 sqq. [2]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz IV, 67—86.

wissenschaftlichen Arbeiten von ihm bekannt. Er scheint nach seiner Verurtheilung den Studien für immer Lebewohl gesagt zu haben.

Wir haben Fatios Lebensgeschichte aus mehreren Gründen ausführlicher erzählt. Einmal können wir nun an der Hand der Jahreszahlen feststellen, dass, als Johann Bernoulli in den Jahren 1691 bis 1693 erst in Genf, dann in Paris lebte und am ersteren Orte den älteren Bruder Fatios unterrichtete, er selbst, ein schon geschätzter Gelehrter, in England sich aufhielt, also gewiss nicht durch Johann Bernoulli in die neuen Methoden eingeführt werden konnte und ebensowenig von 1700 an durch seinen eigenen Bruder. Zweitens wird begreiflich, dass Fatio, Engländer von Neigung — und Neigung thut in solchen Fällen mehr als die Geburt — allen Gemüthsstimmungen der neuen Landsleute in Hass und Liebe sich anschloss. Drittens möchten wir das frühe Erwachen, den vorzeitigen Todesschlaf seines Geisteslebens nachträglich in einen gewissen Zusammenhang gebracht wissen.

Fatio war unzweifelhaft eine hochbegabte Natur. Das Urtheil von Huygens, das von Jakob sowohl als von Johann Bernoulli, das von Leibniz, die ihn alle theils persönlich, theils aus Briefen, theils aus den Aussagen Anderer kannten, stimmt vollgiltig überein und wird dadurch nicht zurückgenommen, dass von 1700 an wenigstens Leibniz und Johann Bernoulli sich ganz anders äusserten. Aber immerhin dürfen wir Fatio doch nur denjenigen begabten Menschen zurechnen, welche mehr versprachen als sie geleistet haben. Er fasste, wie es scheint, rasch, war schnell bereit undeutlich Geahntes für mehr als zur Hälfte Vollendetes anzusehen und anzugeben, und auch bedächtigere Gelehrte glaubten an diese Aeusserungen auf blosse Hoffnung gegründeter Zuversicht. Wir möchten Fatio am liebsten mit Tschirnhaus vergleichen, wenn dieser nicht einestheils bewusster geflunkert, anderntheils doch entschieden mehr geleistet hätte.

Einmal freilich war grade Fatio in der Lage, einen Irrthum Tschirnhausens zu bemerken und zu verbessern. Es handelte sich um die Berührungslinien an die mehrbrennpunktigen Curven, deren von Tschirnhaus 1686 in der Medicina mentis angegebene Construction mit einem Mangel behaftet war. Wir erinnern uns (S. 148—149), dass Fatio zunächst ein geistreiches, rein geometrisches Verfahren einschlug, welches auf der Zurückführung auf Widersprüche beruhte und daher von den Tangentenmethoden der Infinitesimalrechnung durchaus verschieden war.

Fatio will diese überhaupt, und insbesondere Leibnizens beide Abhandlungen von 1684 und 1686 damals nicht gekannt haben, denn das ist doch der Sinn einer im December 1691 an Huygens ge-

richteten Briefstelle[1], er habe Leibnizens Schriften über den Differentialcalcul erst gelesen, nachdem er die gleichen Dinge anderswoher kannte. Bei Huygens fand Fatio mit seinen Herabsetzungen der Differentialrechnung ein geneigtes Ohr. Wir wissen (S. 208—209), wie sehr dieser sich sträubte in Leibnizens Gedankenfolge einzutreten, wie er fest bis zu seinem Tode dabei beharrte, man könne zu den gleichen Ergebnissen auch anders gelangen. Wir haben, als wir damals von einem fremden Einflusse sprachen, der bei Huygens sich geltend machte, an Fatio gedacht. Ursache und Wirkung ergänzten einander hier gegenseitig. Huygens' Voreingenommenheit hatte zur Folge, dass er Fatio hörte und ihm bereitwillig Glauben schenkte. Fatios Einflüsterungen hatten zur Folge, dass Huygens sich mehr und mehr in der Ueberzeugung von der Ueberflüssigkeit der Differentialrechnung befestigte.

Als Fatio in Holland war, theilte er im März 1687 Huygens mit, dass er bei Tschirnhaus den erwähnten Fehler gefunden habe und besprach mit ihm die Verbesserung, welche er vorhabe. Als er im Juni 1687 von England aus schrieb, kam er auf seine eigene Methode zurück, es sei eine wahre Methode, bequem und von einer sehr einfachen und leicht im Gedächtnisse zu behaltenden Erwägung ausgehend. Er habe sie deshalb ins Reine geschrieben und Anwendungen davon gemacht. Nun geht er aber weiter und behauptet, er habe auch die umgekehrte Tangentenaufgabe behandelt, und er habe gewissermassen das Mittel gefunden, sie zu lösen, wenn es überhaupt möglich sei[3]).

Von jetzt an trat diese so kühn und zuversichtlich angekündigte Auflösung der umgekehrten Tangentenaufgabe einigermassen in den Vordergrund, und als Huygens gegen Leibniz Einiges darüber laut werden liess, fragte dieser im Januar 1691, in welcherlei Fällen Fatios Verfahren sich als durchführbar zeige, damit er aus dieser Angabe entnehmen könne, ob Aehnlichkeit mit seinen eigenen Untersuchungen vorhanden sei[3]). Inzwischen war Fatio nach Holland gereist, und Huygens konnte am 23. Februar 1691 Leibnizens Frage dahin beantworten[4]), Fatio finde allerdings in den Fällen einen Anstoss, in welchen der Werth der Subtangente Wurzelgrössen aus mehrgliedrigen Ausdrücken enthalte, z. B. wenn die Subtangente $\frac{y^2\sqrt{a^2-x^2}}{ax}$.

[1]) Der Brief ist abgedruckt in Uylenbroek, *Chr. Hugenii aliorumque seculi XVII. virorum celebrium Exercitationes Mathematicae et Philosophicae.* Haag, 1833. Die Stelle heisst: *c'est que je n'ai étudié ce qu'il en a écrit que depuis que j'ai eu d'ailleurs les memes choses.* [2]) *J'ai trouvé en quelque sorte le moyen de le resoudre toutes les fois qu'il est possible.* [3]) Leibniz II, 77. [4]) Ebenda II, 81—82.

sein solle, wo x die Abscisse, y die zu ihr senkrechte Ordinate bedeute. Eine Woche später schickt Leibniz[1]) die Auflösung der ihm mitgetheilten Aufgabe: $a^2x^2 = a^4 - \frac{y^4}{4}$ oder auch $4a^2x^2 = 4a^2y^2 - y^4$ seien Curven, welche jene Subtangente besitzen. Er schlägt vor, er wolle Fatio diese Auflösungen erklären, wenn jener ihm die Wege offenbare, auf welchen er zur Behandlung von zwei inversen Tangentenaufgaben gelangt sei.

Fatio weicht zurück[2]). Er verzweifle nicht daran, selbst mit den Wurzelgrössen fertig zu werden. Ueberdies sei, was er über jene Aufgaben niedergeschrieben habe, so lang und ausführlich und so schwer zu lesen, dass er sich nicht entschliessen könne, es zu schicken. So am 26. März, aber am 5. Mai scheint Fatio doch nachgrade zur Ueberzeugung gekommen zu sein, er werde nicht allein mit den Wurzelgrössen fertig, denn nun schlug er selbst den Tausch vor[3]).

Mag sein, dass Leibniz, nachdem Fatio auch mit der durch ihn erhaltenen Kenntniss des zu erwartenden Ergebnisses in zwei Monaten nicht vom Flecke gelangt war, von seiner früheren guten Meinung über dessen Methode zurückgekommen war, was nicht unbegreiflich erscheint, jedenfalls zog er jetzt die Sache unter Angabe von Gründen welche blossen Ausflüchten sehr ähnlich sehen, so lange hinaus, bis sie sich ganz zerschlug.

Fatio war inzwischen nach England zurückgekehrt. Er hatte jetzt Leibnizens gedruckte Abhandlungen studirt und äusserte sich über dieselben im December 1691 in einem Briefe, dessen grade hierauf bezügliche Stelle wir oben (S. 249) angeführt haben. Ja, er ging noch viel weiter. Er behauptete, Newton sei der erste Erfinder der Differentialrechnung. Derselbe habe so viel und mehr als Leibniz gegenwärtig wisse zu einer so weit zurückliegenden Zeit besessen, dass Leibniz damals noch nicht an diese Rechnung dachte. Der Gedanke scheine vielmehr bei Leibniz erst durch Newtons briefliche Mittheilungen erzeugt worden zu sein. In einem Briefe vom Februar 1692 an Huygens ist noch weiter von den Newtonschen Briefen von 1676 die Rede, deren Abdruck Leibniz sicherlich sehr unangenehm wäre. Newtons Leistungen verhielten sich zu denen Leibnizens wie ein vollendetes Original zu einer verkrüppelten und sehr unvollkommenen Copie[4]).

Huygens theilte allerdings diese beleidigenden Ausdrücke Leibniz nicht mit, unterrichtete ihn aber doch im März 1692 davon, dass

[1]) Leibniz II, 83—84 und 90, wo ein Schreibfehler des früheren Briefes verbessert wird. [2]) Ebenda II, 86. [3]) Ebenda II, 93. [4]) *comme d'un original achevé et d'une copie estropiée et trez imparfaite.*

Fatio glaube, Newton wisse von dem umgekehrten Tangentenprobleme mehr, als er selbst und Leibniz zusammen, und dass eine Abhandlung darüber werde geschrieben werden[1]). Zugleich bot er in Fatios Auftrage abermals dessen Methode zum Tausche an.

Leibniz lehnte im April 1692 endgiltig ab[2]). Dass Newton recht weit vorgedrungen sei, glaube er ohne Mühe, aber Jedermann besitze seine ihm eigenen Wege, und so sei er vielleicht auf Bahnen, die jenem noch unbekannt seien, fortzuschreiten begriffen.

Die Gemüther fingen an sich gegen einander zu erhitzen. Wusste Newton von diesen Briefen, welche Fatio und Huygens wechselten? Es ist kaum denkbar, dass er gar nichts davon erfahren haben sollte. Und grade in dieser Zeit, im Sommer und Herbst 1692, schrieb er seine zwei Briefe an Wallis, deren früher (S. 244) betonter geringfügiger Inhalt uns jetzt nur um so dürftiger erscheint, als wir in den zuletzt erzählten Ereignissen eine Veranlassung erkennen dürfen, welche zum Schreiben jener Briefe führte.

Fatio selbst schwieg Jahre hindurch, bis er 1699 in einer kleinen Schrift mit dem Titel: Zwei geometrische Untersuchungen über die Brachistochrone[3]) Leibniz öffentlich die Anklage ins Gesicht schleuderte, welche er bis dahin nur brieflich ausgesprochen hatte. Wir wissen (S. 226), dass Leibniz im Mai 1697 die Lösung der Aufgabe der Brachistochrone als einen Probestein für die Vortrefflichkeit der Differentialrechnung gerühmt hatte. Nur Kenner dieses Rechnungsverfahrens seien zur Lösung fähig gewesen, und ausser diesen einige ganz wenige Persönlichkeiten. Unter letzteren nannte er Newton, aber Fatio nannte er nicht! Das bot diesem den Anlass, nun plötzlich das Sprachrohr des Aergers zu werden, den Newton und seine Freunde über ihre Ueberflügelung durch die Leibnizische Schule empfanden. Der Prioritätsstreit war begonnen. Der XVII. Abschnitt wird uns dessen Verlauf kennen lehren.

[1]) Leibniz II, 133. [2]) Ebenda II, 135. [3]) *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex.*

XVII. Die Zeit von 1700—1726.

93. Kapitel.

Geschichte der Mathematik. Klassikerausgaben. Infinitesimalrechnung bis 1704.

Seit wir, mit dem XIV. Abschnitte beginnend, die Gegenstände innerhalb eines bestimmten Zeitraumes nach dem Inhalte der Schriften, über welche wir berichteten, zu ordnen uns gewöhnt haben, stellten wir stets solche Leistungen an die Spitze der Abschnitte, welche der Geschichte der mathematischen Wissenschaften gewidmet waren. Wir wollen auch jetzt dieser Gewohnheit treu bleiben, eine so geringe Ausbeute wir dabei unseren Lesern in Aussicht zu stellen vermögen.

Dass die *Cronica de' Matematici* des Bernardino Baldi 1707 im Drucke erschien (Bd. II S. 505) können wir kaum eine Thätigkeit nennen, und mit einer Notiz[1]), welche besagt, Pierre Rémond de Montmort habe begonnen eine Geschichte der Geometrie zu schreiben, ist nichts anzufangen. Von Adam Andreas Cnollen[2]) (1674–1714) wird einerseits angegeben, er habe *De geometria talmudica* und *De algebra Hebraeorum* geschrieben, während andrerseits der genaueste Kenner hebräischer Literatur nur weiss, dass Cnollen eine *Mathesis Biblico-Talmudica* versprochen habe, ohne Gewissheit darüber zu besitzen, ob er jenes Versprechen auch eingelöst. Ein nordischer Gelehrter Harald Vallerius liess 1716 in Upsala eine wesentlich geschichtliche Abhandlung *Problema Deliacum de duplicatione cubi* erscheinen[3]), aber über deren Werth ist nicht berichtet.

Wir kennen aus eigener Anschauung nur eine zweifellos hierher gehörende Arbeit. De Lagny hat 1723 versucht[4]) den Weg ausfindig zu machen, auf welchem Archimed in seiner Kreismessung die beiden Näherungswerthe gefunden haben mochte, zwischen welche er $\sqrt{3}$ einschloss, indem er behauptete $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$. De Lagny ging dabei von der Theonischen Formel zur Auffindung von $\sqrt{2}$ aus, wenn

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences, année* 1719, pag. 92. [2]) Poggendorff I, 458. – M. Steinschneider in der *Bibliotheca mathematica* 1893 S. 106–107. [3]) Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1889 S. 3. [4]) *Histoire de l'Académie des sciences, année* 1723, pag. 55–69.

er auch Theon so wenig als dessen Kunstausdruck *Diametralzahl* nannte, sondern sich damit begnügte, einen unechten Bruch $\frac{a}{b}$ als erste, den zweiten Bruch $\frac{a+2b}{a+b}$ als engere Annäherung anzugeben. Ganz ähnliche Formeln müsse es, meint De Lagny, auch für andere Quadratwurzeln als die aus 2 gegeben haben, und deren Ermittelung müsse gelingen, sobald man versuchsweise einige Näherungswerthe fände, die zu klein, andere, die zu gross wären. Grösser als $\sqrt{3}$ seien z. B. $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}$ d. h. Brüche von der Form $\frac{a}{b}$, wo $a^2 = 3b^2 + 1$. Kleiner als $\sqrt{3}$ seien $\frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}$ d. h. Brüche von der Form $\frac{A}{B}$, wo $A^2 = 3B^2 - 2$. Die sich näher anschliessenden Brüche seien $\frac{2a+3b}{a+2b}$, beziehungsweise $\frac{2A+3B}{A+2B}$, wie sich durch Erhebung zum Quadrate leicht nachweisen lasse. So entstehen die Fortsetzungen beider Reihen von Näherungswerthen: $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \frac{97}{56}, \frac{362}{209}, \frac{1351}{780}$ und $\frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}, \frac{265}{153}, \frac{989}{571}, \frac{3691}{2131}$. Das sechste Glied der einen, das vierte Glied der anderen Reihe sind die von Archimed benutzten Werthe. Unser Urtheil über De Lagny's Versuch brauchen wir kaum auszusprechen. Er hat in dieser Abhandlung einen Beweis seiner Gewandtheit mit Zahlen umzugehen und Beziehungen zwischen ihnen aufzudecken geliefert, aber seine Gedankenfolge ist so ungriechisch als möglich.

Nächst den eigentlich geschichtlichen Arbeiten pflegen wir mit den Männern uns zu beschäftigen, welche es sich angelegen sein liessen, Werke alter Mathematiker herauszugeben. Ein solches Unternehmen grossartigster Anlage ist hier zu nennen. Edward Bernard[1]) (1638—1696) war ursprünglich Theologe und im Besitze geistlicher Stellen von grosser Einträglichkeit. Seine Neigungen gingen aber vornehmlich auf Mathematik und auf orientalische Sprachwissenschaft und als ihm 1673 eine Savilische Professur in Oxford (Bd. II, S. 609) angeboten wurde, deren Inhaber satzungsgemäss keine geistliche Nebenstellung verwalten durfte, verzichtete er auf letztere. Von jetzt an lebte er in Oxford ausschliesslich seinen beiden Wissenschaften und fasste einen Plan, an dessen Verwirklichung seit Regiomontan (Bd. II, S. 237) Niemand gedacht hatte, den Plan, alle Klassiker der Mathematik neu herauszugeben. Zu diesem Zwecke hatte Bernard bereits früher 1668 in Leiden eine der dortigen Bibliothek angehörende arabische Übersetzung der sieben ersten Bücher der Kegelschnitte des

[1]) *National Biography* IV, 378—380 (London 1883, edited by Leslie Stephen).

Apollonius abgeschrieben, hatte er gleichfalls schon vor seiner Niederlassung in Oxford 1671 und 1672 einen Anlauf genommen, diese Kegelschnitte in Gemeinschaft mit Isaac Barrow herauszugeben. Jetzt erweiterten sich nur seine Pläne. Aber Bernard war der Mann grosser Entwürfe, zögernder Ausführung. Auch eine Ausgabe des Josephus, die er daneben im Sinne führte, blieb stecken, und der Spottvers lief auf ihn um:

> Savilian Bernard is a right learned man,
> Josephus he will finish when he can.

Weder eine Ausgabe des Josephus noch eines Mathematikers kam zu Stande, und das ist der Grund, aus welchem Bernard im 82. Kapitel unerwähnt bleiben durfte. Sein Biograph Smith konnte 1704 nur die Titel jener Schriften nennen, welche Bernard in 14 Bänden herauszugeben beabsichtigte[1]). Der grosse Plan war aber keineswegs mit Bernard zu Grabe getragen worden. David Gregory[2]) (1661—1708), ein Neffe von James Gregory als Sohn dessen ältesten Bruders, war Professor an der Universität in Edinburg gewesen und hatte dort die ersten astronomischen Vorlesungen über den Inhalt von Newton's Principien gehalten. Dass Newton ihm dafür sein Wohlwollen zuwandte, ist begreiflich, und auf dessen Vermittelung, verbunden mit der nicht minder warmen Fürsprache des Greenwicher Astronomen John Flamsteed, wurde Gregory 1691 zu der Savile'schen Professur der Astronomie nach Oxford berufen. Hier war er also Bernard's unmittelbarer Amtsbruder und wurde der Vertraute seiner Absichten.

David Gregory trat nach Bernard's Ableben in dessen Fussstapfen und die grosse Euklidausgabe (Oxford 1703) kam zu Stande. Eine Vorrede von wissenschaftlichem Werthe eröffnete sie, und nach dieser waren zum ersten Male nicht bloss die Elemente, sondern sämmtliche Euklidische Schriften, so weit sie damals bekannt waren und für echt galten, in griechischem Text und lateinischer Uebersetzung vereinigt.

Ein anderer Nachfolger Bernard's war Edmund Halley. Das nächste Anrecht nach Euklid — so äussert sich Halley in der Vorrede zu einem sogleich zu nennenden Werke — auf eine neue schöne Ausgabe hätte eigentlich Archimed besessen; aber schliesslich gebe es doch schon ganz gute Archimedausgaben, während Apollonius, der Verfasser der Kegelschnitte, nur sehr ungenügende Verbreitung durch den Druck erlangt habe. Das hing freilich mit der Schwierigkeit der Aufgabe zusammen, aber was jeden Anderen abgeschreckt hätte, bil-

[1]) Smith, *Vita Bernardi* und als Anhang dazu: *Veterum Mathematicorum Graecorum, Latinorum et Arabum Synopsis.* [2]) *National Biography* XXIII, 93—94 (London 1890, edited by Leslie Stephen and Sidney Lee).

dete für Halley nur einen Reiz mehr, sich an eine Apolloniusausgabe zu wagen. In griechischer Sprache sind bekanntlich nur die vier ersten Bücher der Kegelschnitte erhalten. Vom 5., 6. und 7. Buche ist eine arabische Uebersetzung auf die Neuzeit gekommen. Das 8. Buch ist ganz verloren und dessen Inhalt aus leisen Andeutungen bei Pappus kaum zu errathen. Ganz ähnlich verhält es sich mit den sogenannten kleineren Schriften des Apollonius. Für die meisten stehen nur kurze Andeutungen bei Pappus zu Gebote, die zwei Bücher vom Verhältnissschnitt sind in einer arabischen Uebersetzung in einer Handschrift der Bodlejanischen Bibliothek in Oxford vorhanden und waren als solche von Bernard erkannt worden. Für eine Herausgabe des Apollonius oder auch nur von dessen Kegelschnitten war somit die Kenntniss der arabischen Sprache erstes und unerlässliches Erforderniss, Halley aber war diese Sprache durchaus fremd. Edward Bernard hatte, wie wir sagten, in einem Bodlejanischen Codex die arabische Uebersetzung der beiden Bücher vom Verhältnissschnitte erkannt und hatte etwa ihren zehnten Theil in's Lateinische übertragen, als der Tod ihn wegraffte. Die begonnene Arbeit Bernard's bildete für Halley zugleich Wörterbuch und Sprachlehre des Arabischen. Er bediente sich ihrer mit solchem Erfolge, dass es ihm nachmals gelang, Verbesserungsvorschläge zu sehr verdorbenen arabischen Texten zu wagen, welche die Bewunderung von geschulten Orientalisten erregten. Schon 1706 erschien in Oxford gewissermassen als Fühler Halley's lateinische Uebersetzung des Verhältnissschnittes, *De sectione rationis*, nebst einer kurzen Wiederherstellung der verloren gegangenen Schrift vom Raumschnitte, *De sectione spatii*. Im Jahre 1710 liess Halley alsdann ebendort die Kegelschnitte des Apollonius nachfolgen. So weit ein griechischer Text vorhanden war, ist er mit gegenüberstehender lateinischer Uebersetzung abgedruckt. Für das 5., 6., 7. Buch ist die lateinische Uebersetzung aus dem Arabischen mitgetheilt. Das 8. Buch hat Halley versucht selbständig in lateinischer Sprache wiederherzustellen. Ueberdies ist der Ausgabe der Commentar des Eutokius zu den Kegelschnitten in griechischer und lateinischer Sprache beigegeben, sowie auch die Bücher des Serenus über die Schnitte des Cylinders und des Kegels. Halley hegte ursprünglich den Wunsch, sich zur Besorgung dieser Ausgabe mit David Gregory zu vereinigen, welcher die Durchsicht der griechischen Texte nebst deren Uebersetzung übernehmen sollte. Nach Gregory's Tod fiel die ganze Last auf Halley's Schultern.

Ein Herausgeber ausserordentlich viel späterer Schriften war Michael Gottlieb Hansch[1]) (1683—1749). Ein Pfarrerssohn aus

[1]) Allgemeine deutsche Biographie X, 527—528. Artikel von Th. Hirsch.

der unmittelbaren Nähe von Danzig begann er seine Studien auf dem dortigen akademischen Gymnasium. In Danzig hatte auch der Astronom Johann Höwelcke (bekannter unter dem Namen Hevelius) gelebt, in dessen Eigenthum 22 Bände Kepler'scher Handschriften durch Ankauf von Kepler's eigenem Sohne übergegangen waren. Höwelcke's Schwiegersohn bot Hansch den genannten Bestandtheil der Erbschaft um ein Geringes an, und dieser erwarb ihn mit Freuden. Hansch war inzwischen nach Leipzig übergesiedelt, hatte dort seine Studien vollendet und war insbesondere dem Mathematiker und Philosophen Christian Wolf, der 1703—1707 in Leipzig lehrte, näher getreten. Die Herausgabe des Kepler'schen Nachlasses bildete jetzt eine Lebensaufgabe für den neuen Besitzer. Die Ausgabe war nicht bloss vorzubereiten, die mit dem Drucke verbundenen Kosten waren zu bestreiten, und letzteres erwies sich als das bei weitem Schwierigere. Der kaiserliche Hof in Wien gab zwar ein Geschenk von 4000 Gulden und versprach weitere Unterstützung für die Zukunft, aber jenes Geld reichte kaum für die Herstellung eines ersten Bandes, welcher Kepler's Briefwechsel und eine Lebensgeschichte des grossen Astronomen aus Hansch's Feder umfassend 1717 in Leipzig erschien. Die zugesagten späteren Zuwendungen vollends blieben aus. Hansch war genöthigt auf das unterstützungslos gebliebene Unternehmen zu verzichten und 1721 den grössten Theil der Handschriften in Frankfurt am Main als Pfand für eine Schuld von 828 Gulden niederzulegen. An eine Einlösung war nicht zu denken. Erst 1770 wurde durch einen Zufall das Vorhandensein des Kepler'schen Nachlasses bekannt, und Kaiserin Katharina II. von Russland erwarb ihn 1774 für die Petersburger Akademie, wodurch er der Wissenschaft erhalten wurde und endlich doch noch wenn auch zur späten Herausgabe gelangte.

Um einen noch neueren Schriftsteller machte sich Wilhelm Jacob s'Gravesande[1]) (1688—1742) verdient. Er wurde unter Aufgabe der juristischen Laufbahn, in welche er als Advokat im Haag eingetreten war, Professor der Mathematik in ebenderselben Stadt, später in Leiden und gab 1724 *Opera varia* von Huygens heraus, einen dicken Band, in welchem vier Theile unterschieden sind, während die Seitenzahlen gleichwohl durch den ganzen Band fortlaufen.

Der mehr oder weniger geschichtlichen Literatur ist auch eine Gattung von Werken verwandt, deren erstes, so weit uns bekannt ist, der in diesem Abschnitte behandelten Zeit angehört. Wir meinen **mathematische Wörterbücher**.

Wir haben (S. 156) Freiherr Christian von Wolf genannt.

---

[1] Poggendorff I, 943—944.

Dann war (S. 259) von Christian Wolf die Rede. Es ist eine und dieselbe Persönlichkeit, von der wir sprachen. Christian Wolf[1]) (1679—1754) war der Sohn eines einfachen, wenn auch gebildeten Breslauer Handwerkers. Er widmete sich der Philosophie und der Mathematik. Letzterer hatte er grosse Lehrerfolge, ersterer sehr wechselnde Lebensschicksale zu verdanken. Seit 1703 lehrte er in Leipzig, von 1707—1723 in Halle. Religionswidriger Bestrebungen angeklagt wurde er 1723 bei Androhung des Stranges aus den preussischen Landen verwiesen. Der Vertriebene fand an der Universität Marburg bereitwillige Aufnahme, bis Friedrich der Grosse ihn beim Regierungsantritte 1740 nach Halle zurückberief. Dort blieb Wolf bis zu seinem Tode, dort traf ihn 1745 die Verleihung der Reichsfreiherrnwürde. Während des ersten Aufenthaltes in Halle verfasste Christian Wolf 1710 *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* in 4 Bänden, welche wiederholt aufgelegt wurden. Auch ein Auszug daraus fand 1717 bis 1772 in nicht weniger als zehn Auflagen Verbreitung. Andererseits wuchs sich das Werk zu den fünf Bänden der *Elementa matheseos universae* (1713—1741) aus, über welche wir den Bericht dem XVIII. Abschnitte vorbehalten. Hier reden wir dagegen von einem anderen Werke, welches 1716 erschien. Es hiess: *Mathematisches Lexicon, darinnen die in allen Theilen der Mathematick üblichen Kunst-Wörter erkläret und zur Historie der mathematischen Wissenschaften dienliche Nachrichten ertheilet, auch die Schriften, wo jede Materie ausgeführet zu finden, angeführt werden: auff Begehren herausgegeben von Christian Wolffen.* Das Werk leistet annähernd dasjenige, was in dem weitschweifigen Titel versprochen wird. Die Kunstausdrücke sind erklärt. Verweisungen auf Nachschlagebücher, unter welchen Wolf seine eigenen bevorzugt, weil sie viel verbreitet, daher leicht zugänglich, und, wie er glaube, auch leicht verständlich seien, werden überall gegeben. Wo es um die neuen Theile der Mathematik, insbesondere um die Infinitesimalrechnung sich handelt, tritt die entschiedenste Parteinahme für Leibniz zu Tage. Eine auch nur dürftige Anführung der wichtigsten Sätze der Mathematik bei Gelegenheit der Erklärung der Kunstausdrücke darf man dagegen in diesem mathematischen Wörterbuch nicht suchen wollen. Man würde sich sehr enttäuscht fühlen.

Unsere Leser nimmt es vielleicht Wunder, dass wir einen geschichtlich ebenso bedeutsamen als der eigentlichen Geschichte angehörenden Gegenstand, auf welchen wir (S. 251) am Schlusse des vorigen Abschnittes vorbereitend hingewiesen haben, dass wir den

[1] Gerhard, Math. Deutschl. 191—192.

Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz noch nicht erzählten. Wir sind unseres Versprechens keineswegs uneingedenk. Bevor wir es halten, müssen wir jedoch, um uns nachher nicht zu unterbrechen, über einige Arbeiten berichten, welche in den ersten Jahren des neuen Jahrhunderts veröffentlicht Erweiterungen des Gebietes der Differential- und Integralrechnung betrafen. Eine dieser Arbeiten spielt nämlich in jenem Streite eine wichtige Rolle, darf aber nicht ohne die anderen erwähnt werden.

In den A. E. von 1702 erschien ein Aufsatz von Leibniz: Neues Beispiel der Analyse für die Wissenschaft des Unendlichen, das sich auf Summirungen und Quadraturen bezieht[1]). Er behandelt die Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche, wenn auch letzterer Kunstausdruck noch nicht vorkommt. Leibnizens Gang ist folgender.

Sei $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}{\pi x^3 + \xi x^2 + \mu x + \lambda}$ zu zerlegen, wobei ausdrücklich hervorgehoben wird, der Verlauf sei nicht wesentlich verschieden, wenn der Nenner und mit ihm der Zähler höheren Grades sei. Wird der Bruch durch π, den Coefficienten des höchsten Nennergliedes, gekürzt, so erscheint er in der Form $\frac{\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta}{\pi}x + \frac{\gamma}{\pi}x^2 + \frac{\delta}{\pi}x^3}{x^3 + \frac{\xi}{\pi}x^2 + \frac{\mu}{\pi}x + \frac{\lambda}{\pi}}$ oder, unter der Annahme $x^3 + \frac{\xi}{\pi}x^2 + \frac{\mu}{\pi}x + \frac{\lambda}{\pi} = lmn$, wo $l = x + b$, $m = x + c$, $n = x + d$ ist, in der Gestalt $\frac{\alpha : \pi}{lmn} + \frac{\beta x : \pi}{lmn} + \frac{\gamma x^2 : \pi}{lmn} + \frac{\delta x^3 : \pi}{lmn}$. Brüche von der Form $\frac{1}{lmn\ldots}$ lassen sich aber zerlegen. Leicht zu versuchende Nachrechnung[2]) zeigt

$$\frac{1}{lm} = \frac{1}{(c-b)l} + \frac{1}{(b-c)m};$$

$$\frac{1}{lmn} = \frac{1}{(c-b)(d-b)l} + \frac{1}{(b-c)(d-c)m} + \frac{1}{(b-d)(c-d)n};$$

$$\frac{1}{lmnp} = \frac{1}{(c-b)(d-b)(e-b)l} + \frac{1}{(b-c)(d-c)(e-c)m}$$
$$+ \frac{1}{(b-d)(c-d)(e-d)n} + \frac{1}{(b-e)(c-e)(d-e)p} \text{ u. s. w.,}$$

wo das einförmige Bildungsgesetz beim Anblick deutlich ist[3]). Brüche von der Form $\frac{x}{l\ldots}$, $\frac{x^2}{lm\ldots}$, $\frac{x^3}{lmn\ldots}$, $\frac{x^4}{lmnp\ldots}$ lassen sich ferner leicht in solche von constantem Zähler und ähnlich aus Factoren ersten Grades zusammengesetzten Nennern zerlegen. Es ist

[1]) Leibniz V, 350—361 *Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas.* [2]) *quod quisque jam experiundo facile demonstrare poterit.* [3]) *ex aspectu patet progressus in infinitum uniformis et regularis.*

$$\frac{x}{l\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b}{l\ldots};\ \frac{x^2}{lm\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b+c}{m\ldots} + \frac{b^2}{lm\ldots};$$

$$\frac{x^3}{lmn\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{b+c+d}{n\ldots} + \frac{b^2+c^2+bc}{mn\ldots} - \frac{b^3}{lmn\ldots},\ \text{u. s. w.}$$

Durch fortgesetzte Benutzung beider Regeln wird folglich der ursprünglich gegebene Bruch durch eine aus einfachen Brüchen zusammengesetzte Summe[1]) dargestellt. Sind von den Factoren $l, m, n, p \ldots$ des Nenners welche imaginär, so bildet dieses Vorkommen eine elegante und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, eine Missgeburt der Ideenwelt, fast ein Doppellebewesen zwischen Sein und Nichtsein[2]). Jede imaginäre Wurzel hat ihres Gleichen neben sich[3]). Man kann diese zu einem reellen Produkte vereinigen, so dass Brüche mit reellen Nennern entstehen und die Integration des zerlegten Bruches auf Ausdrücke von der Form $\int \frac{dx}{x-1}, \int \frac{dx}{x+1}$, deren Werth von der Quadratur der Hyperbel abhängt, und von der Form $\int \frac{dx}{x^2+1}$, welche auf die Quadratur des Kreises hinausläuft, zurückgeführt erscheint.

Schwierigkeiten bereitet Leibniz ein Bruch, in dessen Nenner $x^4 + a^4$ steht. Die Zerlegung

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a^2\sqrt{-1})(x^2 - a^2\sqrt{-1})$$

$$= \left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)$$

sieht er ein, aber an die Zerlegung

$$x^4 + a^4 = (x^2 + \sqrt{2}\,ax + a^2)(x^2 - \sqrt{2}\,ax + a^2)$$

scheint er nicht gedacht zu haben.

Etwa gleichzeitig mit diesem Aufsatze erschien ein solcher ähnlichen Inhalts von Johann Bernoulli in den Abhandlungen der Pariser Akademie, und ein Auszug davon ging in die A. E. von 1703 über[4]). Die rasche Aufeinanderfolge der beiden Aufsätze war nichts weniger als zufällig. Johann Bernoulli schrieb an Leibniz[5]) unter dem 10. Juni 1702, er habe die Aufgabe gelöst $\int \frac{p}{q}\,dx$ zu finden, wenn p und q aus x und Constanten irgend rational zusammengesetzt seien, beziehungsweise jenes Integral, wenn es nicht angegeben werden könne — er versteht darunter, wenn es keine algebraische Function von x sei — auf die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel zurückzuführen, denn eine dieser Möglichkeiten bestehe immer. Leibniz

[1]) *aggregatum ex simplicibus fractionibus conflatum.* [2]) *Itaque elegans et mirabile effugium reperit in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non — Ens Amphibio quod radicem imaginarium appellamus.*
[3]) *Quaeris Radices imaginariae suas compares habent.* [4]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 393—400. [5]) Leibniz III, 702.

antwortete am 24. Juni, er habe schon in den ersten Jahren seiner Untersuchungen über höhere Geometrie sich mit der gleichen Aufgabe beschäftigt, und nun theilt er dem Freunde unumwunden mit[1]), was nachher in die A. E. eingerückt wurde, was also die Summe dessen ist, was Leibniz damals gefunden hatte. Bernoulli's Verfahren war von dem Leibnizens etwas verschieden, wenn es auch naturgemäss zum gleichen Ergebnisse führte, Grund genug für ihn gleichfalls so rasch als möglich an die Öffentlichkeit zu treten. Johann Bernoulli setzte entweder den Bruch $\frac{r}{q}$, wo, wie wir heute sagen würden, r und q ganze algebraische Functionen von x bedeuten, von welchen r mindestens um einen Grad niedriger in x als q ist, der Summe von Brüchen $\frac{a}{x+f} + \frac{b}{x+g} + \cdots$ gleich, addierte dann diese auf ihren Gemeinnenner gebrachten Brüche, worauf die Coefficienten im Zähler sowohl als im Nenner denen in $\frac{r}{q}$ in gleicher Weise proportional sein müssen und aus dieser Eigenschaft gefunden werden können, oder aber er nahm die Zerlegung von $\frac{r}{q}$ in mehreren Stufenfolgen vor. Er setzte zu diesem Zwecke $\frac{r}{q} = \frac{s}{t} + \frac{a}{x+f}$, wo s um einen Grad niedriger als r und t um einen Grad niedriger als q angenommen wird. Die Vereinigung von $\frac{s}{t} + \frac{a}{x+f}$ muss rückwärts mit $\frac{r}{q}$ übereinstimmen und so die vorkommenden Coefficienten bestimmen lassen. Dann ist $\frac{s}{t}$ weiter zu zerlegen u. s. w.

Weder Leibniz noch Johann Bernoulli haben in diesen ersten Veröffentlichungen den Fall erwogen, dass der Nenner q auch Factoren von der Form einer Potenz von $x+f$ enthalten könne. Ihn betrachtete Leibniz 1703 in den A. E. in einem Aufsatze, den er als Fortsetzung dessen von 1702 bezeichnete[2]). Er zeigte dort, dass wenn der Nenner des zu zerlegenden Bruches, der etwa wieder $\frac{r}{q}$ heissen mag, von der Form $q = h^4 lmnp$ mit $h = x + a$ sein sollte, der Bruch nach den alten Regeln in solche mit den Nennern $h^4 l$, $h^4 m$, $h^4 n$, $h^4 p$ zerlegt werden könne. Dann aber zerfalle der Bruch mit dem Nenner $h^4 l$ neuerdings in solche mit den Nennern h^4, h^3, h^2, h, l u. s. w.

Um nicht genöthigt zu sein, später auf die Arbeiten von Leibniz

---

[1]) Leibniz III, 703—705. [2]) Ebenda V, 361—366 *Continuatio analyseos quadraturarum rationalium*. Darin pag. 364: *Nunc supplendi sunt casus, quando radices aequales caeteris admiscentur.*

und Johann Bernoulli über Zerlegung in Partialbrüche zurückzukommen, bemerken wir, dass des Ersteren Versehen in Bezug auf die reellen Factoren von $x^4 + a^4$ nach seinem Tode von Brook Taylor in hämischem Tone verspottet wurde, dass alsdann Johann Bernoulli[1]) in den A. E. von 1719 die Integration von rationalen Brüchen mit trinomen zu irgend welchen Potenzen mit ganzen positiven Exponenten erhobenen Factoren im Nenner erschöpfend lehrte.

Aus dem Anfange des Jahrhunderts nennen wir einen ganz kurzen Aufsatz über einen durchaus verschiedenen Gegenstand, den Leibniz 1701 in dem *Journal de Trevoux* veröffentlichte[2]). Er handelt von der logischen Grundlage der Infinitesimalrechnung. Man habe, sagt Leibniz, das Unendliche als Gegenstand mathematischer Betrachtung bemängelt. Aber das Unendliche sei nicht nach dem strengen Sinne des Wortes aufzufassen, sondern nur etwa so, wie man von den Sonnenstrahlen sage, sie kämen von einem unendlich fernen Punkte her und seien deshalb parallel. Was ferner die verschiedenen Grade der Unendlichkeit betreffe, so sei dafür ein Beispiel, dass der Halbmesser der Erdkugel gegen ihre Entfernung von den Fixsternen als blosser Punkt zu betrachten sei, und der Durchmesser eines Spielballs gegen den Erdhalbmesser wieder als Punkt, so dass die Fixsternentfernung verglichen mit dem Durchmesser des Spielballs unendlich mal unendlich gross sei.

Dieser Aufsatz bildet nur ein Glied in einer ganzen Kette von meistens philosophisch-mathematischen Streitschriften. Wir wissen, dass Abbé Catelan (S. 214) als Gegner der Differentialrechnung aufgetreten war und von De l'Hospital zur Ruhe verwiesen wurde, dass Nieuwentijt (S. 245) die Vernachlässigung von Grössen, die doch nicht Nichts seien, angriff und dass er von Leibniz selbst eine Antwort in den A. E. erhielt. Nieuwentijt beruhigte sich nicht. Er erwiderte 1696 durch seine *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia et Responsio ad virum nobiliss. G. G. Leibnitium.* Gegen diese Schrift wandte sich (S. 247) Jakob Hermann[3]) (1678 –1733) mit der *Responsio ad cl. Nieuwentijt considerationes secundas circa calculi differentialis principia* von 1700. Es war die Erstlingsschrift eines jungen Basler Theologen, der neben seinem Brodstudium auch Mathematik getrieben, insbesondere bei Jakob Bernoulli Vorlesungen gehört hatte, und dessen Name als Vertheidiger auf der Abhandlung seines Lehrers über unendliche Reihen von 1696 erschien (S. 87). Die Veröffentlichung von 1700 schlug dermassen ein, dass

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* II, 402–418. [2]) Leibniz V, 350. [3]) Allgemeine deutsche Biographie XII, 181–182.

der erst 23jährige Verfasser auf Leibnizens Empfehlung 1701 zum Mitglied der Berliner Akademie gewählt wurde. Leibniz blieb Hermann stets gewogen und verschaffte ihm 1707 einen Ruf als Professor der Mathematik nach Padua, 1713 einen ebensolchen nach Frankfurt an der Oder. An letzterem Orte schrieb Hermann sein Hauptwerk, die *Phoronomia*, eine höhere Mechanik, wie man heute sagen würde. Auf seinem wissenschaftlichen Wanderleben siedelte Hermann 1724 als Akademiker nach Petersburg über, endlich 1731 wieder nach seiner Heimath Basel. Die Vertheidigung der Differentialrechnung gegen Nieuwentijt von 1700 wurde in den A. E. von 1701 in aussergewöhnlich anerkennender Weise besprochen, einer schriftlichen Randbemerkung des Heidelberger Exemplars zufolge von Jakob Bernoulli.

Ein neuer Gegner der Differentialrechnung erwuchs ihr in Michel Rolle, und wenn wir an die hervorragenden Leistungen dieses Mannes in der Algebra denken, von denen im 87. Kapitel die Rede war, so sind wir geneigt, seinen Widerspruch zum voraus als einen höchst gefährlichen zu bezeichnen und es begreiflich zu finden, dass Leibniz in jenem obenerwähnten kurzen Aufsatze im Journal de Trevoux den grossen Leserkreis der Allgemeingebildeten für sich und seine Lehre zu gewinnen suchte. In Wirklichkeit war Rolle nichts weniger als ein zu fürchtender Gegner. Es ging ihm ähnlich wie Huygens, der unbeschadet der Schärfe seines Geistes niemals so recht eigentlich in die Differentialrechnung einzudringen vermochte (S. 208—209). Was Rolle gegen die logische Grundlage der Differentialrechnung einwandte blieb eindrucklos, weil er zugleich die Ergebnisse der Differentialrechnung angriff und dabei Schnitzer über Schnitzer machte[1]). Pierre Varignon zuerst, später Josef Saurin enthüllten die von Rolle begangenen Fehler, ohne diesen zum Schweigen bringen zu können, da er in De la Hire (S. 120) und dem Pater Gouye Stützen innerhalb der Pariser Akademie selbst fand. De la Hire missachtete die Differentialrechnung, weil er auf seine Gewandtheit in der synthetischen Geometrie sich verliess und verlassen konnte, Gouye theilte die Abneigung ohne überhaupt Mathematiker zu sein. Erst im Jahre 1707 erklärte Rolle selbst seinen Widerstand als gebrochen und gab zu, er habe ihn nur deshalb so lange aufrecht gehalten, weil ihn gewisse Persönlichkeiten dazu veranlasst hätten. Briefe zwischen Johann Bernoulli und Leibniz aus der entsprechenden Zeit[2]) geben über diese letzte Wendung alle wünschenswerthe Klarheit.

Wenn Varignon gegenüber von Rolle die Vertheidigung der Differentialrechnung führte, so zeigt sein Briefwechsel mit Leibniz[3]),

[1]) Montucla III, 110—116. [2]) Leibniz III, 810, 811, 814, 836. [3]) Ebenda IV, 89—204.

dass er Letzterem nicht ersparte, sich deutlicher über das Unendlichkleine auszusprechen. In einem Briefe vom 2. Februar 1702 beruft sich Leibniz auf sein Stetigkeitsgesetz, welches er vormals in den von Pierre Bayle (1647—1706) seit 1684 herausgegebenen *Nouvelles de la Republique des Lettres* aufgestellt habe[1]). Es war dieses im Mai 1687 in einem philosophischen Streite mit Malebranche, und der Wortlaut, dessen Leibniz sich damals bediente, ist folgendermassen zu übersetzen: „Wenn das zwei Aufgaben von einander Unterscheidende *in datis*, d. h. in dem, was als bekannt angenommen ist, kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden kann, so kann es auch *in quaesitis*, d. h. in dem, was herauskommt, kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden. Oder um einfacher zu reden, wenn die Voraussetzungen (oder das Gegebene) sich einander beständig nähern und sich schliesslich in einander verlieren, so müssen die Folgen, das was herauskommt (oder das Gesuchte) das Gleiche thun." Im Juni 1697 äusserte sich Johann Bernoulli beifällig in einem an Leibniz gerichteten Briefe[2]). Seine *lex continuitatis*, sagt er, gefalle ihm sehr. Es sei ersichtlich und gleichsam durch die Natur uns eingegeben, dass wenn die Ungleichheit der Voraussetzungen schwinde, auch die Ungleichheit der Ergebnisse schwinden müsse.

Im Mai 1702 kam Leibniz in einem im *Journal des Sçavans* veröffentlichten kurzen Aufsatze[3]), *Justification du Calcul des infinitesimales par celuy de l'Algebre ordinaire*, auf das Stetigkeitsgesetz zurück. Er beginnt mit der Betrachtung einer Figur (Figur 46). Zu AX ist in X eine Senkrechte XY, in A eine Senkrechte AE gezogen, dann ferner die YE, welche mit XY einen von 45^0 verschiedenen Winkel bildet, so dass $AE = e$ und $AC = c$ verschieden lang sind. Heisst $AX = x$, mithin $CX = x - c$ und $XY = y$, so ist $\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e}$. Diese Gleichung bleibt bei jeder Parallelverschiebung von YE bestehen, wenn auch dadurch, dass diese Verschiebung in Gestalt einer Annäherung an A stattfindet, die Längen c und e kleiner und kleiner werden, während sie dabei fortwährend ungleich bleiben. Geht die verschobene YE

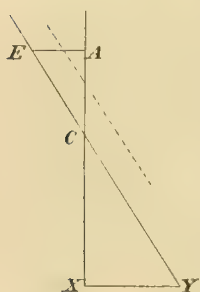


Fig. 46.

[1]) Leibniz IV, 93. Vergl. auch Chasles, *Aperçu hist.* pag. 357 (deutsch S. 379), wo die Stelle aus den *Nouvelles de la Republique des Lettres* abgedruckt ist. Ueber die Geschichte der logischen Grundlage des Infinitesimalcalcüls verbreitet sich die Monographie von Giulio Vivanti, *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica.* Mantova 1894. [2]) Leibniz III, 432. [3]) Ebenda IV, 104—106.

endlich durch A selbst, so wird $c = 0$ und $e = 0$. Dabei nimmt $\frac{x-c}{y}$ die Form $\frac{x}{y}$ an, und diesem Bruche ist alsdann der Bruch $\frac{c}{e}$ gleich, dessen Zähler und Nenner von einander verschieden sind, trotzdem sie beide den Werth Null haben. Diese Betrachtung sei nicht Infinitesimalcalcül, benutze aber dessen Grundgedanken, das sogenannte Stetigkeitsgesetz[1]. Nach diesem Gesetze sei Gleichheit ein Sonderfall der Ungleichheit, Ruhe ein Sonderfall der Bewegung, Parallelismus ein Sonderfall des Zusammentreffens. Nicht als ob man annähme, der Unterschied der einander gleich werdenden Grössen sei schon Nichts, sondern er sei im Begriffe zu verschwinden, und ebenso bei der Bewegung. Man nehme nicht an, sie sei durchaus nicht vorhanden, sondern sie sei im Begriffe dazu. Gebe sich Jemand damit nicht zufrieden, so könne man ihm in archimedischer Weise zeigen, dass der Irrthum, der begangen werde, nicht angebbar und durch keine Zeichnung ausfindig zu machen sei. Auch der Kreis, heisst es weiter, sei kein regelmässiges Vieleck, aber Ruhe, Gleichheit, Kreis seien die Endgrenzen von Bewegung, Ungleichheit, regelmässigem Vieleck, welche bei fortwährender Veränderung im Verschwinden dahin gelangen[2].

Das war unzweifelhaft klarer ausgedrückt, als Leibniz im Mai 1687 geschrieben hatte, aber es war doch derselbe Gedanke wie damals, und in jener früheren Veröffentlichung kann von einer etwaigen Beeinflussung durch Aeusserungen Newton's unter keinen Umständen die Rede sein. Newton's Briefe an Leibniz kennt man, sie enthalten kein Wort über Grenzbetrachtungen. Newton's Principien aber wurden im Juli 1687 ausgegeben (S. 191) mehrere Monate nach dem Maihefte des Journal des Scavans, und Leibniz lernte auch nur den allgemeinsten Inhalt derselben erst durch die A. E. vom Juni 1688 kennen (S. 201).

Während Leibniz in den ersten Jahren des neuen Jahrhunderts an der Integralrechnung kräftig weiter baute und zugleich die Grundmauern des ganzen Gebäudes zu festigen wusste, war Newton in ganz anderer Weise beschäftigt. Einestheils nahm seine Thätigkeit an der Münze (S. 62) ihn sehr in Anspruch, auch nachdem in den Jahren 1696 bis 1699 die Neuprägung des Silbergeldes vollendet war[3], anderntheils wurde er am 26. November 1701 abermals zum Parlamentsmitgliede für Cambridge gewählt[4], und bald nach dem Zusammentritt der Versammlung starb Wilhelm III., bestieg Königin Anna den

---

[1] *Ce que j'appelle la loy de la Continuité.* [2]) *Le repos, l'égalité et le cercle terminent les mouvements, les inégalités et les polygones réguliers, qui par un changement continuel y arrivent en évanouissant.* [3] Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. XXXVI unter 1699 Nov. 30. [4]) Ebenda pag. XXXVI unter 1701 Nov. 26.

Thron und änderte das Ministerium zu Gunsten der Tories, lauter Ereignisse, die für einen ausgesprochenen Parteimann wie Newton aufregend und zeitraubend sein mussten.

Hat Newton während dieser ganzen Zeit und bis gegen 1704 sich von wissenschaftlichem Schaffen ganz abgewandt? Sind damals oder etwa schon früher geometrische Entdeckungen von ihm gemacht worden, von welchen im 99. Kapitel ausführlich die Rede sein muss und welche zu den bedeutendsten Leistungen gehören, denen er seine Unsterblichkeit verdankt? Wir wissen es nicht. Jedenfalls erschien erst im Februar 1704 ein Bändchen aus Newton's Feder. Es enthielt seine Optik[1]), eine geometrische Abhandlung über Curven dritten Grades (eben jene Untersuchungen, für welche wir auf unser 99. Kapitel vertröstet haben), eine der Infinitesimalrechnung gewidmete Abhandlung. Die Optik wurde für sich in mehrfachen Auflagen neu gedruckt. Die beiden mathematischen Abhandlungen gab William Jones 1711 gemeinschaftlich mit der Analysis per aequationes abermals heraus. Die Abhandlung über die Infinitesimalrechnung führt die Ueberschrift *De Quadratura Curvarum*[2]), und über sie haben wir jetzt zu berichten.

Eine Einleitung geht voraus. „Ich betrachte hier, sagt Newton[3]), die mathematischen Grössen nicht als aus kleinsten Theilen bestehend, sondern als durch eine stetige Bewegung beschrieben. Linien werden beschrieben und im Beschreiben erzeugt nicht etwa durch Aneinanderfügen von Theilen, sondern durch stetige Bewegung von Punkten, Oberflächen desgleichen durch Bewegung von Linien, Körper durch Bewegung von Oberflächen, Winkel durch Bewegung von Seiten, Zeiten durch ihren stetigen Fluss u. s. w. Diese Erzeugungsweisen finden in der Natur der Dinge wirklich statt und sind bei der Bewegung der Körper alltäglich zu sehen. Auf diese Weise lehrten auch die Alten die Erzeugung der Rechtecke, indem sie bewegliche Gerade längs unbeweglicher Geraden hinführten[4]). Indem ich also in Betrachtung zog, dass in gleichen Zeiten wachsende und im Wachsen erzeugte Grössen je nach der grösseren oder kleineren Geschwindigkeit, mit welcher sie wachsen und erzeugt werden, grösser oder kleiner ausfallen, suchte ich eine Methode, die Grössen aus den Geschwindigkeiten der Bewegungen oder der Zuwächse, mittels deren sie entstehen, zu bestimmen, und indem ich diese Geschwindigkeiten der Bewegungen oder der Zuwächse Fluxionen nannte und die erzeugten Grössen Fluenten, verfiel ich allmählich in den Jahren 1665 und 1666 auf die Fluxionsmethode, deren ich mich hier zur Quadratur der Curven

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. XXXVI unter 1704 Februar. [2]) *Opuscula Newtoni* I, 201—244. [3]) Ebenda I, 203—204. [4]) *ducendo Rectas mobiles in longitudinem Rectarum immobilium.*

bediene. Fluxionen verhalten sich so nahezu als möglich wie die in gleichen kleinsten Zeittheilchen erzeugten Vermehrungen der Fluenten, oder, um genau zu reden, sie befinden sich im ersten Verhältnisse der eben entstehenden Vermehrungen, sie können aber durch irgend welche ihnen proportionale Linien vor Augen gelegt werden"[1]. Etwas später heisst es, es komme auf das Gleiche hinaus, wenn man die Fluxionen als im letzten Verhältnisse der verschwindenden Theile stehend annehme, und noch weiter unten: auch kleinstmögliche Fehler seien bei mathematischen Dingen nicht verachtbar[2]).

Newton lässt geometrische Beispiele folgen. Zu dem ersten Beispiele benutzt er eine Figur von grosser Verwandtschaft mit unserer Figur 28 (S. 153), welche wir der Analysis per aequationes entnommen haben, und erörtert an ihr das Verhältniss der Fluxionen des Flächenraums ABD und des Rechteckes $ABKH$, welches dem Verhältnisse von DB zu BK gleich sei, wo die beiden Flächen einen Zuwachs zu erlangen beginnen.

Bei einem anderen Beispiele dient ihm Figur 47. Die um den Pol P drehbare Gerade BP schneidet die beiden anderen feste Gerade AB und AE in B und E: man sucht das Verhältniss der Fluxionen von AB und AE. Geht PB durch Drehung in die Lage Pb über, so wächst AB um Bb, AE um Ee, und das Verhältniss dieser Stücke im Augenblicke des Entstehens wird gesucht. Zieht man $BC \parallel AE$, so ist wegen Aehnlichkeit von Dreiecken

Fig. 47.

$$Bb : BC = Ab : Ae$$
$$BC : Ee = PB : PE.$$

Multiplication dieser Proportionen liefert $Bb : Ee = Ab \times PB : Ae \times PE$, deren rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Theile beim Verschwinden von Bb und Ee in $AB \times PB : AE \times PE$ als dem Fluxionsverhältnisse übergehen.

Als analytisches Beispiel wird die Fluxion von x^n abgeleitet. Wenn x in $x + o$ übergeht, so wird behauptet, gehe x^n in

[1] *Fluxiones sunt quam proxime ut Fluentium Augmenta aequalibus Temporis particulis quam minimis genita, et, ut accurate loquar, sunt in prima Ratione Augmentorum nascentium; exponi autem possunt per Lineas quascunque, quae sunt ipsis proportionales.* [2] *Errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi.*

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \cdots$$

über, wobei als selbstverständlich betrachtet wird, dass die Giltigkeit der Reihenentwicklung sich nicht auf den Fall eines positiven ganzzahligen n beschränkt. Die beiderseitigen Veränderungen sind o und $nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \cdots$, welche sich zu einander verhalten wie $1 : nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} ox^{n-2} + \cdots$. Das letzte Verhältniss der Veränderungen beim Verschwinden ist $1 : nx^{n-1}$.

„Mittels ähnlicher Erörterungen (fährt Newton fort) lassen sich durch die Methode der ersten und letzten Verhältnisse die Fluxionen grader oder krummer Linien in allen Fällen ermitteln, ebenso die Fluxionen von Oberflächen, Winkeln und anderen Grössen. Es ist im Einklang mit der Geometrie der Alten, die Analyse bei endlichen Grössen anzustellen und die ersten oder letzten Verhältnisse endlicher Grössen bei ihrem Entstehen oder Verschwinden aufzusuchen, und ich wollte zeigen, dass man bei der Fluxionsmethode keine unendlich kleinen Figuren in die Geometrie einführen braucht. Man kann allerdings die Analyse an beliebigen Figuren, an endlichen wie an unendlich kleinen, welche den verschwindenden Figuren ähnlich sind, durchführen und auch an solchen Figuren, welche gemäss der Methode der Indivisibilien für unendlich klein gehalten werden, wenn man nur Vorsicht anwendet.“

Zum Schlusse der Einleitung heisst es dann: „Aus den Fluxionen die Fluenten zu finden ist ein schwieriges Problem, und der erste Schritt zu dessen Auflösung kommt der Quadratur der Curven gleich. Ueber diese habe ich vor langer Zeit[1]) das Folgende geschrieben.“

Die eigentliche Abhandlung, welche jetzt erst folgt, lehrt die Bezeichnung der auf einander folgenden Fluxionen durch Pünktchen, welche in einer Anzahl bis zu vier in Anwendung kommen, wie es in den Briefen von 1693 der Fall gewesen war (S. 242), daneben sind aber Accente benutzt, welche senkrecht über einen Buchstaben gesetzt bedeuten, der accentlose Buchstabe sei die Fluxion des accentuirten[2]). Mit anderen Worten Newton definiert:

$$x = \int \dot{x}\,dz,\quad \acute{x} = \int x\,dz = \int dz \int \dot{x}\,dz \text{ u. s. w.},$$

wenn z als die unabhängig Veränderliche aufgefasst wird. Allerdings kommt dann im ganzen Verlauf der Abhandlung nicht ein einziger

[1]) *olim.* [2]) *Opuscula Newtoni* I, 208: *hae quantitates* (z, y, x, u) *considerari possunt ut Fluxiones aliarum, quas sic designabo* $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{u}$; *et hae ut Fluxiones aliarum* z, y, x, u; *et hae ut Fluxiones aliarum* $z, y, \overset{\prime\prime}{x}, \overset{\prime\prime\prime}{z}$.

accentuirter Buchstabe mehr vor. Algebraische Functionen werden differentiirt und die Differentiationsregeln bewiesen, wenn es uns gestattet ist, diese von Newton selbstredend nicht verwandten Wörter zu gebrauchen. Irrationalitäten werden dabei durch neue Buchstaben ersetzt, und die dazu dienenden Hilfsgleichungen werden durch Potenzirung rational gemacht, worauf die Differentiation erfolgt, welche die Differentiale der Hilfsgrössen ermitteln lässt. Die nächste Aufgabe verlangt quadrierbare Curven aufzufinden[1]. Als Quadratur u der Curven, deren Abscisse z heisst, wird $z^\vartheta R^\lambda$ angenommen, wo

$$R = e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} + \cdots.$$

Alsdann ist

$$\dot u = \vartheta \dot z z^{\vartheta - 1} R^\lambda + \lambda z^\vartheta \dot R R^{\lambda - 1} = z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1} [\vartheta \dot z R + \lambda z \dot R].$$

Aber $\dot R = nf\dot z z^{n-1} + 2ng\dot z z^{2n-1} + 3nh\dot z z^{3n-1} + \cdots$ und folglich

$$\dot u = z^{\vartheta - 1} R^{\lambda - 1} \dot z \left[\vartheta e {+\vartheta \atop +\lambda n} f z^n {+\vartheta \atop +2\lambda n} g z^{2n} {+\vartheta \atop +3\lambda n} h z^{3n} {+\text{etc.} \atop +\text{etc.}}\right].$$

Durch $\dot z = 1$ ergiebt sich alsdann die Ordinate der quadrierbaren Curve. Ist noch $S = k + lz^n + mz^{2n} + \cdots$, so kann auch $u = z^\vartheta R^\lambda S^\mu$ als Fläche angenommen und die zur Abscisse z gehörige Curvenordinate ermittelt werden. Sie stellt sich dar als Product von $z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$ in eine nach Potenzen von z^n fortschreitende Reihe. Die Regeln ändern sich nicht im mindesten, wenn von den Exponenten ϑ, λ, μ einer oder der andere aufhört ganzzahlig positiv zu sein, und dann ist die Quadratur einer Curve gewonnen, deren Ordinate eine im Zähler oder im Nenner auftretende Irrationalität enthält. Hierauf geht Newton zur Umkehrung der Aufgabe in dem Sinne über, dass die Ordinate einer Curve in der Gestalt $z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}[a + bz^n + cz^{2n} + \cdots]$ gegeben sein soll, woraus die Quadratur

$$z^\vartheta R^\lambda [A + Bz^n + Cz^{2n} + Dz^{3n} + \cdots]$$

gefunden werden muss. Der eingeschlagene Weg ist der, dass zu den Quadraturen $Az^\vartheta R^\lambda$, $Bz^{\vartheta+n}R^\lambda$, $Cz^{\vartheta+2n}R^\lambda$, $Dz^{\vartheta+3n}R^\lambda$ etc. entsprechende Curvenordinaten gesucht werden, deren Summe alsdann mit dem gegebenen Ausdrucke $z^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}[a + bz^n + cz^{2n} + \cdots]$ in Uebereinstimmung gesetzt wird. So entstehen Gleichungen zwischen $e, f, g, h \ldots$ (den in R vorkommenden Coefficienten) $a, b, c \ldots$ und $A, B, C \ldots$, mittels deren $A, B, C \ldots$ gefunden werden. Das Verfahren erfährt keine wesentliche Aenderung, wenn die Curvenordinate noch einen weiteren Factor $S^{\mu-1}$ einschliesst. Im weiteren Verlaufe wird R binomisch gedacht $= e + fz^n$, indem die Coefficienten $g, h \ldots$ den Werth Null annehmen; ferner werden auch die Coefficienten $b, c \ldots$

[1] *Opuscula Newtoni* I, 212 sq. [2] Ebenda I, 241–242.

als verschwunden gedacht; mithin wird die Quadratur der Curve von der Ordinate $az^{\vartheta-1}(e+fz^n)^{\lambda-1}$ unter gewissen Voraussetzungen ermittelt, welche darauf hinauskommen, dass ϑ ein Vielfaches von n ist, $\vartheta = n$, $\vartheta = 2n$, $\vartheta = 3n$, $\vartheta = 4n$ etc.

Gegen Ende der Abhandlung findet sich ein Scholium, von welchem eine Stelle[1]) eine geschichtliche Bedeutung gewonnen hat. Wir übersetzen sie deshalb wörtlich: „Wir haben oben gesagt, es gebe erste, zweite, dritte, vierte ... Fluxionen der im Flusse befindlichen Grössen. Diese Fluxionen verhalten sich wie die Glieder convergenter unendlicher Reihen. Ist etwa z^n eine Fluente, welche in ihrem Flusse zu $(z+o)^n$ wird, so verwandelt man diesen Ausdruck in die convergente Reihe

$$z^n + noz^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2z^{n-2} + \frac{n^3-3n^2+2n}{6}o^3z^{n-3} + \cdots.$$

Das erste Glied dieser Reihe z^n ist die Fluente selbst; das zweite noz^{n-1} ist ihr erster Zuwachs, ihre erste Differenz, welcher, wenn sie im Entstehen begriffen ist, die erste Fluxion proportional ist[2]): das dritte Glied $\frac{n^2-n}{2}o^2z^{n-2}$ wird der zweite Zuwachs oder die zweite Differenz sein, und ihr ist, wenn sie im Entstehen begriffen ist, die zweite Fluxion proportional; das vierte Glied $\frac{n^3-3n^2+2n}{6}o^3z^{n-3}$ wird der dritte Zuwachs oder die dritte Differenz sein, und ihr ist, wenn sie im Entstehen begriffen ist, die dritte Fluxion proportional und so fort in's Unendliche.“

Wir haben an diesen Bericht über die Quadratura Curvarum einige Bemerkungen anzuknüpfen. Eine wichtige Frage geht dahin, wann die Abhandlung entstanden sei? Newton selbst hat sich darüber in einem Briefe an John Keill, eine Persönlichkeit, welche wir noch genau genug kennen lernen werden, ausgesprochen. Unter dem 15. Mai 1714 schrieb er diesem[3]), das Buch der Quadraturen sei alt, Vieles daraus sei schon in dem Briefe vom 24. October 1676 benutzt. Mit dieser Aussage stimmt überein, was wir (S. 179) von dem Vorkommen des Integrals $\int az^\vartheta(e+fz^\eta)^\lambda dz$ in jenem Briefe sagten, eine Integration, in welcher die Quadratura Curvarum gipfelt. Ob die ganze Abhandlung vor langer Zeit niedergeschrieben war, ob Newton sie nach

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 241—242. [2]) *Terminus primus hujus seriei z^n erit Quantitas illa fluens; secundus noz^{n-1} erit ejus Incrementum primum seu Differentia prima, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio prima.* [3]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 176: *The book of Quadratures is ancient, many things being cited out of it by me in my Letter of 24. Octob. 1676.*

alten Aufzeichnungen neu stylisierte, ist ziemlich gleichgiltig. Wir persönlich halten das letztere für nahezu selbstverständlich, möchten aber unsere Meinung Niemandem aufdrängen.

Die Einleitung der Quadratura Curvarum dagegen ist ganz gewiss neu hinzugekommen. Das erkennt man aus dem ganzen Wortlaute, erkennt man besonders daraus, dass, wie in unserem abkürzenden Berichte (S. 270) mitgetheilt ist, Newton selbst erklärt, die Abhandlung vor langer Zeit, *olim*, niedergeschrieben zu haben. Gehört aber demnach die Einleitung den Jahren unmittelbar vor 1704 an, dann ist sie eine Bekämpfung Leibnizischer Gedanken in der geringschätzendsten Form. Wollte Newton in bestimmter Weise gegen den Gebrauch des Unendlichkleinen Front machen, so musste er doch wenigstens den Mann oder die Schule nennen, welche diese Auffassung als die ihrige besassen.

Oder sollte er, der spätere Newton, gegen den früheren Newton eine Art von Selbstanklage erhoben haben? Man hat darauf aufmerksam gemacht[1]), dass Newton selbst einst von dem Unendlichkleinen einen Gebrauch machte, der von der Leibnizischen Betrachtungsweise sich kaum unterschied. In der Methodus fluxionum sagte er von dem vorkommenden *o*, es sei unendlich klein, die diesen Buchstaben enthaltenden Glieder dürften deshalb den anderen gegenüber vernachlässigt werden (S. 163). In den Principien hiess es: Die Momente hören auf Momente zu sein, sobald sie eine endliche Grösse erhalten (S. 195—196), und daran schloss sich in der ersten Ausgabe von 1687 der Satz, dem beständigen Zunehmen oder Abnehmen der Momente widerstrebe es, wollte man ihm ein Ende geben[2]). In der zweiten Auflage von 1713 blieb freilich dieser Zusatz weg, und man kann in dessen Entfernung einen Einklang mit der Veränderung des bekannten Scholiums erkennen, welches jetzt die Art der Entstehung der Grössen als ein Unterscheidendes zwischen den Methoden von Newton und Leibniz hervorhob (S. 197). Aber war Newton gewillt, 1704 seine eigenen früheren Gedanken zu verleugnen, so musste er erst recht sagen, wogegen die abwehrenden Worte sich richteten, damit Leibniz und seine Anhänger sich nicht getroffen glaubten.

Neu scheint wie die Einleitung auch das von uns (S. 272) theilweise übersetzte Scholium gegen Schluss der Quadratura Curvarum gewesen zu sein. Das Wort *Differenz*, welches dort wiederholt als gleichbedeutend mit *Increment* auftritt, hat vor den Leibnizischen Veröffentlichungen keinen Erklärungsgrund.

[1] De Morgan, *On the early history of Infinitesimals in England. Philosophical Magazine* für November 1852 pag. 321—330, besonders pag. 323—325.
[2]) *Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento.*

Sachlich leuchtet ein, dass in dem Scholium Unrichtiges behauptet ist. Das Glied $\frac{n^2 - n}{2} z^{n-1}$ ist nicht der zweite, $\frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} z^{n-2}$ nicht der dritte Differentialquotient von z^n. Die Nenner 2, 6 müssten weggedacht werden, wenn die Behauptung richtig sein sollte. Nicht als ob man Newton darum den Vorwurf zu machen berechtigt wäre, er habe von höheren Differentialquotienten nichts verstanden. Am Anfang der Abhandlung sind vielmehr die späteren Fluxionen in ihren Beziehungen zu den früheren genau erklärt. Aber dem Vorwurfe unterliegt Newton allerdings, in der Uebereilung nicht gesehen zu haben, dass die Uebereinstimmung der von o befreiten Glieder der Binomialentwicklung $(z + o)^n$ mit den Fluxionen von z^n nach dem zweiten Gliede noz^{n-1} aufhört, ein Vorwurf, der Newton noch schwerer für den zweiten Abdruck der Quadratura Curvarum vom Jahre 1711 (S. 268) trifft, wo der Fehler einfach abgedruckt wurde.

Was den Inhalt der eigentlichen Abhandlung betrifft, so gilt von ihm etwa das Gleiche, was wir (S. 244) von den Briefen von 1693 sagten. Die Veröffentlichung der Quadratura Curvarum konnte nur Verwunderung erregen. Jetzt noch die Integration ganzer algebraischer Functionen, zu deren Herstellung ausschliesslich die Methode der unbestimmten Coefficienten Verwendung fand, für druckberechtigt zu halten, das war im Jahre 1704 eine starke Zumuthung für die Mathematiker des europäischen Festlandes, und ein Widerspruch war fast unausbleiblich.

94. Kapitel.

Der Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz bis April 1712.

Der Prioritätsstreit sei durch Fatio's Schrift von 1699 *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex etc.* begonnen gewesen, sagten wir (S. 251) am Schlusse des XVI. Abschnittes. Jetzt, wo es uns obliegt, die Geschichte des Streites selbst eingehend zu erzählen, beginnen wir damit, die beleidigenden Worte Fatio's genauer anzugeben[1]. Fatio will den zur Bewältigung der Aufgabe der Brachistochrone nöthigen Calcül im April 1687 selbständig erfunden haben[2]. Sein Wissen in dieser Beziehung würde kein geringeres gewesen sein, wenn Leibniz damals noch gar nicht geboren gewesen wäre. Möge dieser daher anderer Schüler etwa sich rühmen, ihn könne er nicht unter deren Zahl rechnen, dafür könne der Briefwechsel, welchen er,

[1] *Commerc. epistol.* pag. 223 und Giesel in dem Delitzscher Schulprogramm von 1866 S. 17 Anmerkung 46. [2] *proprio Marte inveni.*

Fatio, mit Huygens geführt habe, falls er zur Veröffentlichung gelange, als Zeugniss dienen. Dann heisst es weiter[1]: „Das freilich erkenne ich an, dass Newton der erste und um mehrere Jahre älteste Erfinder dieses Calcüls war, denn dazu nöthigt mich die Augenscheinlichkeit der Dinge. Ob Leibniz, der zweite Erfinder, etwas von jenem entlehnt hat, darüber sollen lieber andere als ich ihr Urtheil abgeben, denen Einsicht in die Briefe und sonstige Handschriften Newton's gestattet wird. Niemanden, der durchstudiert, was ich selbst an Dokumenten aufgerollt habe, wird das Schweigen des allzubescheidenen Newton oder Leibnizens vordringliche Geschäftigkeit täuschen."

Wir machen dazu drei Bemerkungen. Erstens Fatio schickte seine Streitschrift nicht an Leibniz. Zweitens dieselbe erschien unter ausdrücklicher und ausgesprochener Genehmigung des stellvertretenden Vorsitzenden der Royal Society. Drittens Fatio hatten Papiere Newton's vorgelegen, was ohne dessen Einwilligung kaum denkbar ist.

Was für Papiere und Briefschaften das gewesen sein mögen, lässt sich mit voller Bestimmtheit nicht behaupten, vielleicht solche, die gleichfalls im Jahre 1699 im Drucke erschienen. Wir wissen, dass 1693 der zweite Band von Wallis' Werken erschienen war und in ihm ein Bericht über die späteren Briefe Newton's an Wallis (S. 241—244). Im Jahre 1699 liess Letzterer den dritten Band seiner Werke folgen, und in ihm war der erste und zweite Brief Newtons an Leibniz und die Antwort Leibnizens zu lesen. Diese Papiere könnte allenfalls Fatio auch ohne Newton's Wissen in der Druckerei gesehen haben.

Zwischen dem Entwurfe von Leibnizens Antwort auf den zweiten Brief Newton's vom 24. October 1676 und dem Abdrucke dieser Antwort im III. Bande von Wallis' Werken besteht ein merkwürdiger Unterschied, den wir hier hervorzuheben haben. Wir sagten (S. 178), dass Oldenburg den Brief vom 24. October 1676 erst unter dem 2. Mai 1677 an Leibniz abgehen liess, dass dieser alsdann (S. 180) den Brief an dem Tage, an welchem er ihn enthielt, noch beantwortete. Unsere Quelle war der Abdruck des Entwurfes[2]. Da der Entwurf unter dem Leibnizischen Nachlasse in der Königlichen öffentlichen Bibliothek in Hannover aufbewahrt wird, so liessen wir uns, um

[1] *Commerc. epistol.* pag 168 und 224: *Newtonum tamen primum ac pluribus annis vetustissimum hujus calculi inventorem ipsa rerum evidentia coactus agnosco: a quo utrum quicquam mutuatus sit Leibnitius secundus ejus inventor malo eorum quam meum sit judicium quibus visae fuerint Newtoni litterae aliique ejusdem manuscripti codices. Neque modestioris Newtoni silentium, aut prona Leibnitii sedulitas, inventionem hujus calculi sibi passim tribuentis, ullis imponet, qui ea pertractaverint, quae ipse evolvi, instrumenta.* [2] Leibniz I, 154.

sicher zu gehen, ein Facsimile der Anfangszeilen kommen[1]. Sie lauten: *Accepi hodie literas tuas diu expectatas cum inclusis Neutonianis sane pulcherrimis*, ich erhielt heute Ihren lange erwarteten Brief und als Einschluss einen sehr schönen Brief Newton's. Die Worte sind in fortlaufender Linie geschrieben, abgesehen von dem vierten Worte *tuas*, welches über der Linie stehend eingeflickt erscheint. Eine sonstige Aenderung ist in beiden Zeilen, welche von Leibniz selbst geschrieben sind, nicht wahrnehmbar. Eine gleichzeitige Datirung ist nicht vorhanden, dagegen hat Leibniz später mit etwas schwärzerer Tinte an den Kopf des Blattes geschrieben: *21. Jun. 1677. Exstat Commerc. p. 88.* Nun der englische Abdruck. Er giebt das Datum 21. Juni 1677 und lässt das zweite Wort der ersten Zeile ***hodie*** weg. Wie ist diese Veränderung zu Stande gekommen? Hat Leibniz selbst beim Abschreiben das *hodie* vergessen? Ist es beim Abdruck in Wallis' Werken durch ein Versehen weggeblieben? Ist es dort mit Absicht weggelassen worden? Von diesen drei Erklärungen halten wir die letzte, die wir nur der Vollständigkeit wegen aussprechen, für ganz ausgeschlossen, zwischen den beiden ersten wissen wir nicht zu entscheiden. Auf die Folgen, welche jene Veränderung nach sich zog, kommen wir im weiteren Verlaufe zurück.

Dem Marquis De L'Hôpital kam Fatio's Schrift zu Händen, und er schickte sie Leibniz am 13. Juli 1699. In dem Begleitbriefe machte L'Hôpital[2]) auch auf den im III. Bande der Gesammtwerke von Wallis erfolgten Abdruck einiger Briefe von Leibniz u. s. w. aufmerksam, welcher die Absicht erkennen lasse, Newton die Erfindung der Leibnizischen Differentialrechnung zuzuschreiben, welche dieser Fluxionsrechnung nenne. Es scheine, als ob die Engländer auf alle Art versuchten, den Ruhm der Erfindung für ihre Nation in Anspruch zu nehmen. Leibnizens Antwort[3]) enthält den Dank für die Uebersendung. Ueber Fatio's Ruhmredigkeit macht er sich lustig. Wenn dieser schon so lange so viel gewusst hat, warum hat er es nicht bekannt werden lassen? Newton werde Fatio's Aeusserungen hoffentlich nicht billigen, dazu wisse er zu genau, wie der wahre Sachverhalt sei. Endlich die Veröffentlichung seiner Briefe durch Wallis sei mit seiner Einwilligung erfolgt. Wallis habe ihm auch gestattet anzugeben, was er etwa beim Abdrucke gestrichen wünsche, er aber habe, da er das Bekanntwerden der nackten Wahrheit nicht zu fürchten brauche, geantwortet, Wallis solle aus den Briefen nach Gutdünken drucken lassen, was ihm der Veröffentlichung werth erscheine.

[1]) Herr Dr. Bodmann, der Vorstand jener Bibliothek, hatte die grosse Güte, das Facsimile selbst für mich anzufertigen. [2]) Leibniz II, 336. [3]) Ebenda II, 337.

Ungefähr gleichzeitig wie an L'Hôpital schrieb Leibniz unter dem 4. August auch an Wallis[1]. Der unverdiente und unerwartete Angriff, den Fatio auf ihn gemacht habe, würde ihn wenig berühren, wenn nicht die Druckerlaubniss von Seiten der Royal Society ertheilt worden wäre, was er, er müsse es gestehen, nicht ohne grosse Verwunderung gesehen habe. Wie er eine solche öffentliche Verletzung verdient habe, sei er nicht im Stande sich auszudenken. Sein einziger Trost bestehe in der Hoffnung, jene Druckerlaubniss möge erschlichen worden sein, doch bedürfe er der Bestätigung dieser Hoffnung. Wallis möge in Gemässheit seines öfters bezeugten Wohlwollens die Sache untersuchen. Wenn dieser ihm dann sage, dass die Schreibart, deren Fatio sich gegen ihn bedient habe, den Beifall der Royal Society nicht finde, so genüge ihm das.

Wallis that, worum Leibniz ihn bat. Am 29. August erklärte er[2] Leibniz, er habe Fatio's Buch gesehen, aber nicht gelesen. Bis zum Empfange von Leibnizens Brief habe er nicht geahnt, dass in dem Buche gegen Diesen gerichtete Dinge sich fänden, welche er selbst keineswegs billige, mögen sie von Fatio oder von einem anderen geschrieben sein[3]. Nach diesem Satze, der vielleicht in dem Sinne zu verstehen ist, als vermuthe Wallis, Fatio habe nur als Sprachrohr eines Dritten gedient, dessen Name alsdann leicht einzusetzen ist, geht er zu einer Würdigung Fatio's über. Es sei ja wahr, dass Fatio in die Royal Society Aufnahme gefunden habe, aber deshalb stehe er in der Achtung der Mitglieder keineswegs so hoch, dass er Leibniz vorgezogen werde, oder denselben unwürdig behandeln dürfe, einen Mann, der wie auch in anderen Dingen ganz besonders in der Mathematik sich grosse Verdienste erworben habe. Im nächsten Absatze wirft Wallis, scheinbar unbefangen, die Frage auf, ob etwa Fatio auch der Verfasser eines namenlos in den A. E. vom Februar 1699 pag. 87 flgg. erschienenen Aufsatzes gegen David Gregory sei, und wenn nicht, ob dann Leibniz bei der Redaction den Namen des Verfassers in Erfahrung bringen könne. Es gebe ein Geschlecht von Menschen, die ihre eigenen Sachen höher achten als die der übrigen Sterblichen und lieber Andere verletzen, als sich selbst Verdienste erwerben.

Diese Briefstelle war freilich geeignet, Leibniz in Verlegenheit zu setzen, denn der namenlose Aufsatz rührte von ihm selbst her[4]. Aber freilich war, und das sagt auch Leibniz in seinem Antwort-

[1] Leibniz IV, 70. [2] Ebenda IV, 71—72. [3] *Sive ab ipso sive ab alio scriptum.* [4] Leibniz V, 336—339. In den A. E. trägt der Aufsatz natürlich nicht, wie in dem späteren Abdrucke, die Bezeichnung: *ex Epistola G. G. Leibnitii,* sondern ist namenlos.

schreiben[1], zwischen jenem Aufsatze und den Aeusserungen von Fatio ein ganz wesentlicher Unterschied. David Gregory hatte eine Untersuchung über die Kettenlinie veröffentlicht, welche zwar zu einem richtigen Ergebnisse führte, d. h. zu dem gleichen, welches seit 1691 (S. 211) den Mathematikern bekannt war, aber dieses Ergebniss auf einem dem Widerspruche ausgesetzten Wege erreichte. Diesem Widerspruch hatte der ungenannte Verfasser des Aufsatzes in den A. E. Worte verliehen, ohne gegen Gregory verletzend zu werden. Die Redaction weigere sich deshalb, erklärte Leibniz, den Namen des Einsenders zu nennen, während sie bereit sei, bei der ersten passenden Gelegenheit ihre Hochachtung vor Gregory's anderweitigen Verdiensten, die man voll anerkenne, deutlich auszusprechen. Diese Zusage wurde auch 1703 erfüllt[2] durch eine lobende Besprechung von Gregory's *Astronomia physica et geometrica*, als deren Verfasser eine schriftliche Randnote Ferdinand Helfreich Lichtscheidt (1661—1707) nennt, einen hochgebildeten Geistlichen in Berlin, der auch der dortigen Akademie angehörte[3]. Leibniz hätte aber in seinem Briefe schon die Schlussworte jenes früheren Aufsatzes als Beweis dafür anführen können, dass es dort nur um eine sachliche Widerlegung sich handelte. Es sei glaublich, hiess es daselbst, dass Gregory bei wiederholter Ueberlegung seinen Irrthum unbefangen eingestehen werde; blieben ihm noch Zweifel, so möge er Newton, dessen Methode er nach eigener Aussage benutzte, zu Rathe ziehen.

Wie konnte Wallis eine solche schlichte, in den höflichsten Formen auftretende Erwiderung mit persönlichen Verdächtigungen auf gleiche Linie stellen? Wir sehen hier eine Wirkung des englischen Nationalgefühls, an dessen Uebertreibung Wallis krankte, wie wir bei früherer Gelegenheit (S. 4) bemerken mussten. Im Prioritätsstreite werden wir noch oft auf die hässlichen Folgen einer an sich lobenswerthen Geistesrichtung hinweisen müssen. Wo ein Engländer in Frage kommt, hört bei Wallis, hört auch bald bei der Royal Society das Licht und Schatten gleich vertheilende Gerechtigkeitsgefühl auf. Den Engländer hören wir auch aus einem anderen Satze des Briefes Wallis' vom 29. August: Fatio sei kein Engländer, sondern ein Deutscher aus der Schweiz[4], der allerdings eine gewisse Zeit in England verweilte, aber gegenwärtig wieder fort sei.

Nun kommt noch die Druckgenehmigung der Royal Society zur Sprache. Der stellvertretende Vorsitzende habe das Recht dieselbe zu ertheilen und habe, da er glaubte nur eine geometrische Abhand-

[1] Leibniz IV, 74. [2] A. E. 1703 pag. 452—462. [3] Poggendorff I, 1453—1454. [4] Leibniz IV, 72: *non Anglus est, sed Germanus ex Helvetia.*

lung vor sich zu sehen, von dem Rechte Gebrauch gemacht, ohne den Inhalt der Schrift zu lesen. Es liege also nur eine Unvorsichtigkeit vor, wie Leibniz aus einem beigelegten Briefe des Secretärs der Royal Society entnehmen könne, und welche er alsdann wohl entschuldigen werde. Dieser Secretär war seit 1693 Hans Sloane (1660—1752), ein bedeutender Arzt und Naturforscher. Sein von Wallis erwähnter, unzweifelhaft damals beigeschlossener Brief ist nicht gedruckt vorhanden. Eine Bestätigung der Uebersendung findet sich in Leibnizens Antwort[1]) an Wallis. An Fatio's Aeusserungen, sagt er, sei ihm nicht mehr viel gelegen, seit er wisse, dass sie von der Royal Society nicht gebilligt würden; er behalte sich vor Herrn Sloane einen Dankbrief für seine so rasch bereite Freundlichkeit[2]) zu schreiben.

Jetzt begnügte sich aber Leibniz nicht mehr mit brieflichen Aeusserungen, sondern er gab in den A. E. eine öffentliche Antwort[3]) auf Fatio's Beleidigungen. Der ganze Aufsatz ist ein Muster feiner Abfertigung und verdiente genauer bekannt zu sein. Die Gleichmässigkeit der Darstellung gestattet uns leider keinen ausführlichen Bericht, und wir heben nur drei Punkte hervor. Leibniz spricht erstens aus, dass Sloane in einem Briefe an einen Freund die Zusicherung gegeben habe, es werde in Zukunft von Gesellschaftswegen darauf gesehen werden, dass kein bissiger Ton von Seiten eines Mitgliedes gegen ein anderes eingeschlagen werde. Zweitens geht Leibniz auf eine der von Fatio behandelten Aufgaben ein, auf die Aufgabe die Gestalt des Körpers geringsten Widerstandes in einem dichten Mittel zu finden. Newton hatte im 7. Abschnitte des II. Buches der Principien die Aufgabe gestellt und gelöst, allerdings so gelöst, wie es bei ihm nur zu häufig war, ohne Ableitung oder Beweis des Ergebnisses. Damit trat nun Fatio hervor. Er wies einen Zusammenhang zwischen jener Eigenschaft des geringsten Widerstandes und dem Krümmungshalbmesser der Curve, welche bei ihrer Umdrehung den Körper erzeugt, nach. Noch 1699 liessen erst De L'Hôpital, dann Johann Bernoulli in den A. E. andere Beweise drucken[4]), welche einfacher waren, indem sie nur von Tangenteneigenschaften jener Curve Gebrauch machten. De L'Hôpital betonte dabei, in wie fern sein Beweis als der einfachere zu gelten habe; die Krümmung hänge nämlich vom zweiten, die Tangente nur vom ersten Differentialquotienten ab[5]), und eben diese Bemerkung wiederholt Leibniz. Drittens beruft sich Leibniz für die Unabhängigkeit seiner Erfindung der Differentialrechnung auf Newton[6]): „Hat dieser doch hinreichend öffentlich in seinen

[1]) Leibniz IV, 74. [2]) *in me quoque promtissimae humanitati.* [3]) Leibniz V, 340—349. [4]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 307—315. [5]) Ebenda I, 313. [6]) Leibniz V, 345: *Satisque indicavit publice, cum sua Mathematica Naturae*

Principien von 1687 es ausgesprochen, dass Keiner von uns gewisse geometrische Erfindungen, welche uns gemeinschaftlich sind, der durch den Anderen ihm gelieferten Erleuchtung verdanke, dass Jeder vielmehr sie seinem eigenen Nachdenken schulde, dass ich sie schon ein Jahrzehnt früher auseinandergesetzt habe." Leibniz nennt hier das Scholium im 2. Abschnitte des II. Buches der Principien nicht ausdrücklich, aber es kann nicht zweifelhaft sein, dass er diese Stelle (S. 196) meinte. Ebensowenig kann zweifelhaft sein, dass Newton den Leibnizischen Aufsatz gelesen haben muss. Die ganze Angelegenheit machte sicherlich, seit Sloane im Namen der Royal Society sich eingemengt hatte, wenn nicht schon früher, in England so viel von sich reden, dass Newton, der mindestens mittelbar Betheiligte, unmöglich den Verlauf des Streites unbeachtet lassen konnte. Fatio hat überdies den Aufsatz gelesen, hat eine Entgegnung für die A. E. geschrieben, deren Aufnahme Mencke verweigerte[1], und Fatio sollte nicht dafür gesorgt haben, dass Newton mit diesem Benehmen und mithin mit dem ganzen Streite bekannt werde? Das ist undenkbar. Newton wusste also ganz gut, welchen Sinn man dem Scholium beilegte, und wenn er zwischen dem 11. October 1709 und dem 15. April 1710 (S. 197) dem Scholium eine nur noch deutlicher die beiderseitige Unabhängigkeit betonende Fassung geben liess, so wusste er, was damit gemeint war. Er wusste es und duldete es, trotzdem inzwischen der erste Act des Prioritätsdramas längst abgeschlossen und der Vorhang zum zweiten Aufzuge schon in die Höhe gegangen war.

Wir wissen (S. 268), dass Newton im Jahre 1704 in der Druckerei der Royal Society ein englisch geschriebenes Buch über die Farben der Presse übergab und als Anhang zwei lateinische Abhandlungen beifügte, die *Enumeratio linearum tertii ordinis* und die *Quadratura Curvarum*. Schon im Januarhefte 1705 der A. E. erschien eine Besprechung dieses Anhangs[2], deren Verfasser sich zwar nicht genannt hat, aber nie verkannt wurde. Die allgemeine Muthmassung deutete auf Leibniz hin, und ihre Bestätigung ergiebt sich ebensowohl durch eine der schon mehrfach erwähnten Randnoten als durch die Empfangsanzeige Mencke's[3] vom 12. November 1704: „Hierauf habe berichten sollen, dass gestern Dero relation von des Hrn. Newton zweyen Algebraischen tractaten endlich bey mir eingelaufen, undt sage ich dafür gehorsamsten Danck." Durch eine Randbemerkung wissen wir ferner,

Principia publicaret anno 1687, nova quaedam inventa Geometrica, quae ipsi communia mecum fuere, neutrum luci ab altero acceptae, sed meditationibus quemque suis debere, et a me jam decennio ante exposita fuisse.

[1] A. E. 1701 pag. 134. [2] A. E. 1705 pag. 30—36. [3] Leibniz, Supplementband des Briefwechsels S. 15.

dass Leibniz es auch gewesen war[1], der 1703 ein anderes, die Fluxionenrechnung betreffendes Buch, die *Fluxionum methodus inversa* von George Cheyne[2] (1671—1734) ziemlich günstig besprochen und es dahin gekennzeichnet hatte, es bediene sich zur Auflösung der inversen Tangentenaufgabe wesentlich der Reihenentwicklung unter Benutzung der Methode der unbestimmten Coefficienten, wodurch man zu Ergebnissen gelange, wenn andere Methoden nicht aufzufinden seien. Die Besprechung der beiden Newton'schen Abhandlungen berichtet zuerst auf vier Seiten über die *Enumeratio linearum tertii ordinis*, dann geht sie zu der *Quadratura Curvarum* über. Wir glauben hier die wichtigste Stelle wörtlich anführen zu müssen.

„Bevor der ungemein geistreiche Verfasser zu der Quadratur der Curven (oder vielmehr der krummlinigen Figuren) gelangt, schickt er eine kurze Einleitung voraus. Damit man diese besser verstehe, muss man wissen, dass wenn irgend eine Grösse stetig wächst, wie z. B. eine Linie durch das Fliessen eines sie beschreibenden Punktes wächst, jene augenblichen Zuwächse Differenzen genannt werden, nämlich Unterschiede zwischen der Grösse, wie sie früher war, und wie sie durch die Veränderung eines Augenblickes wurde, und dass daraus der Differentialcalcül entstanden ist und dessen Umkehrung der summatorische Calcül, deren Elemente von ihrem Erfinder Herrn G. G. Leibniz in dieser Zeitschrift mitgetheilt worden sind, und wovon viele Anwendungen gezeigt wurden sowohl durch Ebendenselben als durch die Herren Brüder Bernoulli und durch den Marquis De L'Hôpital, dessen jüngst eingetretenen frühzeitigen Tod alle die schwer beklagen müssen, die den Fortschritt der tieferen Wissenschaft lieben. Statt der Leibnizischen Differenzen benutzt nun Herr Newton, und hat er immer benutzt[3]) Fluxionen, welche sich so nahe wie möglich wie die in gleichen kleinstmöglichen Zeittheilchen hervorgebrachten Vermehrungen der Fluenten verhalten. Er hat davon in seinen Mathematischen Principien der Naturlehre und in anderen später veröffentlichten Schriften einen eleganten Gebrauch gemacht, wie auch Honoratus Fabri in seiner Synopsis Geometrica den Fortschritt der Bewegungen an Stelle der Methode Cavalieri's setzte“[4]).

An diese wortgetreu durch uns übersetzte und auch bezüglich der Hervorhebung einzelner Wörter durch den Druck streng an das Original sich anschliessende Stelle knüpft Leibniz dann eine Schilderung der beiden Aufgaben der Differentiation und Integration mittels

---

[1] A. E. 1703 pag. 450—452. [2] Poggendorff I, 434. [3] *adhibet semperque adhibuit.* [4] *Quemadmodum et Honoratus Fabrius in sua Synopsi Geometrica motuum progressus Cavallerianae Methodo substituit.*

seiner Zeichen und ohne der Newton'schen Bezeichnung zu gedenken. Bei der Quadratur als Aufgabe der Integralrechnung habe Newton sehr nützliche Arbeiten vollbracht[1]. Er habe Reihen angewandt, welche bald in's Unendliche fortlaufen, bald abbrechen, und in diesem letzteren Falle das Ergebniss in algebraischer Gestalt aufweisen. Das seien Dinge, über welche seiner Zeit bei Gelegenheit des Berichtes über das Buch von Cheyne gesprochen worden sei.

Im Ganzen war also der Ton der Besprechung ein sehr wohlwollender, und der (S. 274) von uns angekündigte Widerspruch gegen die Veröffentlichung als solche wäre ein sehr milder gewesen, wenn nicht ein Satz in derselben vorgekommen wäre, dessen schriller Misston durchgehört werden musste, der Satz, dessen lateinischen Wortlaut wir in einer Anmerkung wiedergeben zu müssen glaubten. Newton wird mit Fabri verglichen, der den Fortschritt der Bewegungen an Stelle der Methode Cavalieri's setzte. Fabri kannte Cavalieri's Schriften, kannte sein Verfahren und veränderte es in nicht der Rede werthen Nebenumständen. Er hat sich damit nur selbst geschadet. Seine Synopsis geometrica von 1669 gehört zu den wenigst bekannten Schriften der damaligen Zeit und würde ohne die Erwähnung in dem Satze, von dem wir gerade reden, wohl ganz vergessen sein. Und mit diesem Fabri wird Newton verglichen, wird mit ihm durch den Vergleich auf eine Linie gestellt!

Leibniz hat sich später ausreden wollen. Er hat behauptet, der andere Ausdruck, dessen lateinischer Wortlaut gleichfalls in einer Anmerkung mitgetheilt worden ist, schliesse die Annahme aus, dass Newton als blosser Nachahmer mit leichter Veränderung der gebrauchten Namen und Zeichen habe hingestellt werden wollen. Dem ist nicht so. Wohl heisst es, Newton benutze Fluxionen statt der Differenzen und habe sie immer benutzt, aber seit wann? Die Besprechung der Quadratura Curvarum nennt als das Werk, in welchem Newton von den Fluxionen einen eleganten Gebrauch gemacht habe, die Principien und andere später herausgegebene Schriften. Die Principien sind aber von 1687, Leibnizens Veröffentlichung der Differenzialrechnung von 1684. Der unbefangene Leser konnte also einen Gegensatz der beiden Aeusserungen nicht erkennen. Er musste vielmehr in der Vereinigung beider den Sinn finden, welcher, wie wir uns erinnern, in einer brieflichen Aeusserung von Johann Bernoulli vom August 1696 (S. 240) sich abspiegelte. Newton habe erst nach 1684 und in Folge der aus der Leibnizischen Abhandlung empfangenen Anregung seine Fluxionsrechnung erdacht. Wenn Leibniz

[1]) *a Dn. Newtono est utilissime laboratum.*

damals Bernoulli eines Besseren belehrte, so musste er auch jetzt die Leser vor dem gleichen Missverständnisse bewahren. Er durfte nicht von den Principien und später herausgegebenen Schriften sprechen ohne hinzuzufügen, dass er wisse, dass Newton schon 1676 eine Fluxionsrechnung besessen habe. Die Leibnizischen Worte waren also mindestens unglücklich gewählt und objectiv unrichtig.

Schwieriger ist die Beurtheilung der subjectiven Schuld oder Schuldlosigkeit dessen, der die unglücklichen Worte gebrauchte. Leibniz, sagten wir, habe nachmals bestritten, dass in seiner Aeusserung ein Vorwurf enthalten gewesen sein solle, enthalten sein könne. Sollen wir ihm darin Glauben schenken, so fällt noch immer die Schuld der Unüberlegtheit auf ihn; aber wir fürchten, wir thun Leibniz mit diesem letzteren Vorwurfe Unrecht, und der Stich, welcher Newton 1705 traf, war von keiner ungeschickten Hand geführt worden. Leibniz hatte die Beleidigung von 1699 nicht vergessen, hatte insbesondere nicht vergessen, dass Newton, den er in der Antwort an Fatio von 1700 gradezu als Zeuge aufgerufen hatte, sich kein Wort entlocken liess und auch, als er 1704 die Quadratura Curvarum zum Drucke gab, nichts über Leibniz zu sagen fand, als nur eine vom Zaune gebrochene Abweisung der unendlich kleinen Unterschiede, die Leibniz auf sich zu beziehen Grund hatte. Da mag in Leibniz der Gedanke wach geworden sein, Newton's Zunge dadurch zu lösen, dass er ihn fühlen liess, wie weh ein unberechtigter Vorwurf thut. Newton sollte empfinden, was er selbst 1699 hatte empfinden müssen. So erscheinen uns die Seelenvorgänge, aus welchen der Bericht von 1705 hervorging. Wir haben allerdings keinerlei Beweis dafür und müssen gewärtig sein, dass unsere Leser nicht alle mit uns übereinstimmen, aber mit diesem Zugeständnisse vereinigt dürfen wir doch wohl unseren Erklärungsversuch wagen.

Was die spätere Aeusserung betrifft, Newton könne sich nicht beleidigt fühlen, weil anerkannt sei, dass er immer der Fluxionen sich bedient habe, so ist das eine Ausrede und, wie wir schon gezeigt haben, eine recht schlechte Ausrede. Wir haben ihr nicht mehr Gewicht beizulegen als den beiden Briefen Leibnizens vom 28. Juni 1713 an Johann Bernoulli[1]) und an Nicolaus Bernoulli[2]), in welchen Leibniz leugnet die Besprechung von 1705 verfasst zu haben.

Ist die Leibnizische Besprechung Newton zu Händen gekommen? Newton selbst hat es am 22. März und wiederholt am 5. April 1711 in Abrede gestellt[3]). Heutigen Tages wäre die Thatsache so gut wie

[1]) Leibniz III, 913. [2]) Ebenda III, 986. [3]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. LXXII lin. 17—20.

unmöglich. Auch am Anfange des XVIII. Jahrhunderts ist sie auffallend genug, aber ohne unterstützende Beweismittel sind wir nicht berechtigt irgend einem Betheiligten eine absichtliche Unwahrheit zuzutrauen. Von einer unabsichtlichen Unwahrheit kann selbstverständlich nicht die Rede sein, denn eine verletzende Besprechung überhaupt gelesen zu haben, vergisst kein Schriftsteller, mag ihm auch der genaue Inhalt aus dem Gedächtnisse schwinden. Aber wie können wir erklären, dass die A. E. in England weniger gelesen wurden, als z. B. die P. T. in Deutschland? Dazu mögen zwei Umstände beigetragen haben. Erstens bildete es damals schon eine lobenswerthe Eigenschaft deutscher Gelehrten, mehr als die Gelehrten irgend eines anderen Volkes sich um die im Auslande erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten zu kümmern, zweitens war zwischen den A. E., als Zeitschrift, und den P. T., als Veröffentlichungen der Royal Society, der grosse Unterschied, dass auf erstere abonnirt werden musste, während letztere den ausserhalb England lebenden Mitgliedern der Gesellschaft, deren es eine ziemlich grosse Anzahl gab, nach Vollendung eines Bandes zugeschickt wurden.

In den ersten Monaten des Jahres 1705 war Newton auch durch politische Aufregungen in Anspruch genommen. Wir haben (S. 63) von den unter Königin Anna zu Tage tretenden Parteiverschiebungen gesprochen. Eine solche fällt in das Jahr 1705[1]). Königin Anna war den Tories geneigt. Ihr Ministerium bestand aus solchen, wenigstens galt Marlborough, der an der Spitze stand, damals gleich den übrigen als Tory. Im Unterhause hatten die Tories die unbestrittene Mehrheit. So schien ein Zerwürfniss unmöglich. Die kirchlich Unduldsamen im Unterhause brachten dasselbe zu Stande. Die Fernhaltung aller der bischöflichen Kirche nicht zugehörigen Persönlichkeiten von öffentlichen Stellen beruhte auf dem Zwange, die Formen eben dieser Kirche auszuführen, ein Zwang, der sich darin äusserte, dass der Anzustellende das Abendmahl nach Anglicanischer Form zu nehmen hatte. Katholiken konnten sich dazu allerdings niemals verstehen, aber die protestantischen sogenannten Nonconformisten konnten sehr wohl das kleine Opfer bringen, ihre Abendmahlformen nach denen der herrschenden Kirche umzumodeln, und sie thaten es, so dem Wortlaute des Gesetzes gehorchend. Gelegentliche Conformität nannten solches die zu äusserst rechts stehenden Tories, und sie beschlossen einen Sturmlauf dagegen: wer nicht ganz und gar der Kirche, d. h. eben der bischöflichen Kirche, angehöre, sei von den

[1] Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. LXXIV und Ranke, Englische Geschichte VII, 11–13 und 23.

öffentlichen Aemtern auszuschliessen. Der Erfolg dieses Gesetzes, wenn es durchging, musste nicht bloss bei der Besetzung jener Stellen selbst, er musste auch für die Zusammensetzung des Parlamentes den Ausschlag geben. Nur in Städten, wo noncontormistische Magistrate vorhanden waren, pflegten Whigs gewählt zu werden. Beseitigte man jene städtischen Verwaltungen, so konnte man hoffen, ein rein toristisches Parlament zu erhalten. In diesem aber wären muthmasslich die Weitestgehenden die Führer gewesen, und die Minister mussten befürchten, von rechts stehenden Gesinnungsgenossen verdrängt zu werden. So kam es, dass die Regierung den Widerstand des Oberhauses gegen den Gesetzvorschlag unterstützte, der dadurch nicht Gesetz werden konnte, trotzdem er in zwei auf einander folgenden Jahren vom Unterhause angenommen wurde. Marlborough wurde den Hochtories mehr und mehr verhasst, sein Sturz war beschlossene Sache. Ein Ereigniss der äusseren Politik rettete ihn. Die Schlacht bei Höchstädt am 13. August 1704, in welcher Marlborough vereint mit Prinz Eugen die Franzosen auf's Haupt schlug, vernichtete die Pläne seiner heimischen Gegner. Der siegreiche Held war der Liebling der Nation geworden, und der allgemeine Zug riss die gemässigten Tories neben den Whigs in sein Geleite. Unter diesen Verhältnissen vollzogen sich die Parlamentswahlen vom April 1705. Sir Isaac, wie Newton hiess, seitdem er am 16. April in den Ritterstand erhoben worden war, war der Candidat der äussersten Partei für Cambridge. Die Kirche sei in Gefahr, war das Stichwort derselben, und die Verhandlungen, welche bei der nun folgenden Parlamentstagung im Oberhause stattfanden, haben klar gestellt, dass eben bei der Cambridger Wahl ein Studentenauflauf stattfand, dass man hundertstimmig schrie: Kein Fanatiker, nichts von gelegentlicher Conformität. So unterlag damals Newton. Die hier erzählten Parteikämpfe gehören insofern zu unserem Gegenstande, als auch sie zur Erklärung dafür dienen können, dass Newton jene Besprechung der A. E. von 1705 nicht kennen lernte. Hätte er sie kennen gelernt, er hätte im Augenblick doch wohl geschwiegen, schweigen müssen. Der politisch in den Hintergrund Gedrängte war nicht geeignet, die Sympathie seiner Landsleute für sich wachzurufen, und die ihm ungünstige Volksstimmung hätte ihm die Antwort untersagt.

Am 16. August 1705 starb Jakob Bernoulli. Leibniz verlangte[1]) von Jakob Hermann, dem dankbaren Schüler des Verstorbenen, dessen Nekrolog, den Hermann am 28. October einschickte[2]), und der in den A. E. für Januar 1706 abgedruckt ist. Eine Randbemerkung

[1] Leibniz IV, 284. [2] Ebenda IV, 288–292.

des Heidelberger Exemplars nennt Leibniz als den Verfasser, und das ist eine der Stellen, wo die im Allgemeinen zuverlässigen handschriftlichen Zusätze sich als irrig erweisen. Leibniz war Vermittler, nicht Verfasser des Beitrags, oder doch nur in dem Sinne Verfasser, als er sich eine gewisse Veränderung des von Hermann niedergeschriebenen und handschriftlich erhaltenen Wortlautes gestattete. Nicht etwa als ob Leibniz den von Hermann herrührenden Satz, zu Jakob Bernoulli's nahen Freunden habe Fatio de Duillier gehört, ein sehr würdiges Mitglied der Londoner Royal Society[1]), gestrichen hätte. Ihn liess Leibniz, wenn vielleicht auch widerwilligen Sinnes, abdrucken. Am Schlusse dagegen kürzte er. Hermann hatte die wichtigsten Aufsätze des Verstorbenen, welche theils in den A. E., theils im Journal des Sçavans dem Drucke übergeben worden waren, einzeln genannt. Er hatte zwischendrein gesagt: Besonders verdient hier der Differentialcalcül erwähnt zu werden, welchen er durch eigenes Nachdenken in Gemeinschaft mit seinem berühmten Bruder sich so sehr zu eigen machte und vervollkommnete, dass der vortreffliche Erfinder desselben, der hochstehende Leibniz[2]) aus freien Stücken eingestand, der neue Calcül verdiene mit gleichem Rechte der Calcül der beiden Bernoulli als der seinige genannt zu werden. Hier, wie gesagt, kürzte und änderte Leibniz. Die Herzählung der Abhandlungen nebst der Zwischenbemerkung ersetzte er durch folgenden Wortlaut: Seine sehr zahlreichen und schönen Erfindungen, welche in den A. E. und anderwärts zu lesen sind, führen wir nicht einzeln an; wir begnügen uns beizufügen, dass, als die grosse Erfindung unseres Jahrhunderts, die Leibnizische Infinitesimalanalysis[3]) hervorgetreten war, der Dahingegangene aus einem leichten vom Erfinder gegebenen Beispiele (dem Beweise der Isochrone) plötzlich ein neues Licht für die Anwendung auf physikalisch-mechanische Fragen schöpfte[4]) und auf die Ausbildung jenes analytischen Calcüls, den man Differentialrechnung und seine Umkehrung summatorische oder Integralrechnung nennt, mit grossem Eifer und Erfolg sich legte, ausgezeichnete Aufgaben löste und nach Recht und Verdienst unter die grössten Förderer der grossen Erfindung gezählt werden kann. Leibniz widmete dem Gedächtnisse des verstorbenen und immer zu betrauernden Freundes folgende Zeilen:

Ein unendliches Licht erglänzte Dir schon auf der Erde,
Wer wird leugnen, o Freund, dass Du erhalten uns seist?

[1]) *Dn. Nicolaum Fatium Duillerium Regiae Londinensis Societatis sodalem dignissimum.* [2]) *Excell. ejus Inventor, Ampl. Leibnitius.* [3]) *Analysis infinitesimalis Leibnitiana.* [4]) *ex facili exemplo ab autore exhibito (demonstratione scilicet Curvae Isochronae) novam subito lucem hausisse.*

Viel mehr als eine Kürzung und stylistische Abänderung unter Beibehaltung des Sinnes, den Hermann in seinen Wortlaut gelegt hatte, war das nicht, aber es war eben doch abermals von der grossen Leibnizischen Erfindung die Rede und immer nur von der Leibnizischen.

Spät, im Jahre 1710 erst, kam die entgegengesetzte Behauptung im XXVI. Bande der P. T. wieder zum Ausdruck. Der Band enthielt die der Royal Society 1708 vorgelegten Arbeiten, und sein Druck war schon im September und October 1708 im Gange. Es ist das nicht unwichtig, weil es einen Beleg für die eigenthümliche Thatsache giebt, dass, als zwischen October 1709 und April 1710 das Scholium in der zweiten Ausgabe der Principien im Drucke war, Newton wusste, dass binnen Kurzem eine ihm widersprechende Meinung in den P. T. zur öffentlichen Kenntniss kommen werde.

John Keill[1]) (1671—1721), ein Schotte, eifriger Bewunderer Newton's, seit 1700 Professor der Physik in Oxford, hatte eine Abhandlung über die Gesetze der Centripetalkräfte, *De legibus virium centripetarum*, eingereicht, und in ihr war, ohne dass der Gegenstand die allergeringste Veranlassung dazu geboten hätte, folgender Satz eingeschaltet[2]): „Dieses alles folgt aus der heutigen Tages sehr berühmten Fluxionsrechnung. Diese hat, ohne dass ein Zweifel stattfände, Herr Newton erfunden, wie bei Jedem feststehen wird, der die von Wallis herausgegebenen Briefe liest. Später wurde jedoch dieselbe Rechnung von Herrn Leibniz unter Veränderung des Namens und der Bezeichnungsweise in den A. E. veröffentlicht."

Das war, wir wiederholen es, eine etwas späte Antwort auf die Besprechung von 1705, auf die Aeusserungen im Nekrologe von 1706, aber sie liess an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig. Sie beschuldigte Leibniz ohne weiteres des geistigen Diebstahls unter den erschwerendsten Umständen, Leibniz habe ein fremdes Verfahren unter Veränderung von Namen und Bezeichnung herausgegeben!

Leibniz erhielt als Mitglied der Royal Society den vollendeten Band der P. T. durch den Secretär Sloane allerdings recht verspätet im Februar oder März 1711, da er gerade in Berlin war, und noch von dort aus schrieb er unter dem 4. März eben an Sloane. Er bedauere, sagte Leibniz in diesem Briefe[3]), zum zweiten Male mit einer Klage auftreten zu müssen. Vor längerer Zeit habe Nicolaus Fatio

[1]) Poggendorff I, 1236. — *National Biography* XXX, 310—311 London 1892, edited by Sidney Lee. [2]) P. T. XXVI, 185: *Haec omnia sequuntur ex celebratissima nunc dierum fluxionum arithmetica, quam sine omni dubio primus invenit D. Newtonus, ut cui libet ejus epistolas a Wallisio editas legenti facile constabit, eadem tamen arithmetica postea mutatis nomine et notationis modo a D. Leibnitio in Actis Eruditorum edita est.* [3]) *Commerc. epistol.* pag. 171—172.

de Duillier sich öffentlich mit Sticheleien an ihn gemacht, als ob er eine fremde Erfindung sich angeeignet hätte. Er habe ihn damals in den A. E. eines Besseren belehrt, und die Royal Society habe ihm selbst gegenüber durch ihren Secretär, und das sei, so viel er sich erinnere, grade Sloane gewesen, ihre Missbilligung ausgesprochen. Auch Newton, der treffliche Mann, habe, wie ihm berichtet sei, den verkehrten Eifer missbilligt[1]), welchen Einige in dieser Sache für ihr Volk und für ihn an den Tag legten. Und jetzt scheine Herr Keill in dem eben erschienenen Bande der P. T. auf S. 185 die ungeschickteste der Anklagen zu erneuern. Wer könne den Satz: „Später wurde .... veröffentlicht" lesen und ihm Glauben schenken, ohne Leibniz in Argwohn zu nehmen, eine fremde Erfindung in der Verkleidung untergeschobener Benennung und Zeichen herumgetragen zu haben? Wie falsch dieses sei, wisse Niemand besser als Newton selbst. Gewiss, fuhr Leibniz fort, ich habe weder den Namen der Fluxionsrechnung aussprechen hören, noch die Zeichen, deren Newton sich bediente, mit Augen gesehen, bevor beides in Wallis' Werken erschien. Dass ich die Sache gleichfalls viele Jahre, bevor ich sie herausgab, besass, beweisen meine durch Wallis veröffentlichten Briefe. Wie kann ich Fremdes, welches ich nicht kannte, verändert herausgegeben haben? Leibniz schloss mit der Aeusserung, er sei weit davon entfernt, Keill einen Verleumder zu nennen, aber dessen Anklage sei verleumderisch, und Keill müsse, das verlange er von der Royal Society, die Anklage öffentlich zurücknehmen.

Die Angelegenheit mit Fatio hatte seiner Zeit rasche und leichte Erledigung gefunden (S. 279), aber jetzt waren die Verhältnisse ganz andere als 1699 und 1700. Newton war seit dem 30. November 1703 Präsident der Royal Society (S. 64), in ihr also naturgemäss eine wesentlich einflussreichere Persönlichkeit als ein ausserhalb England wohnendes Mitglied, und wäre es auch Leibniz, und sein Ruhm musste oder durfte doch wenigstens der Gesellschaft vor Allem am Herzen liegen. Auch seit 1705 hatte mancherlei sich geändert. Die Friedenssehnsucht der englischen Nation war der whigistischen den Krieg gegen Frankreich in die Länge ziehenden Regierung müde geworden. Ein toristisches Parlament war gewählt, und seit September 1710 stand der Hochtory Bolingbroke an der Spitze der Reichsgeschäfte. Newton war also jetzt der Gesinnungsgenosse der leitenden Kreise in Volk und Regierung, Leibniz der Berather jenes hannöverschen Prinzen, der den Krieg gegen Frankreich selbst führen half (S. 63). Diese mehrfachen Aenderungen spiegeln sich deutlich in dem weiteren Verlaufe des Streites.

[1]) *praeposterum studium improbavit.*

Ein Auszug aus den Sitzungsprotokollen der Royal Society ist veröffentlicht[1]. Wir lassen seine Uebersetzung folgen, welche wir nur jeweils zu unterbrechen uns vorbehalten, wo uns Einschaltungen nothwendig erscheinen. Am 22. März 1711 fand eine Sitzung unter Newton's Vorsitze[2]) statt. Ein Theil des Leibnizischen Briefes wurde verlesen und Sloane beauftragt, eine Antwort zu schreiben. Newton war, bevor der Aufsatz in den A. E. von 1705 ihm gezeigt wurde, ärgerlich über das, was Keill gesagt hatte, aber in der nach Verlauf von vierzehn Tagen folgenden Sitzung vom 5. April lenkte Keill die Aufmerksamkeit auf jenen unbilligen Bericht[3]) über die Abhandlung Quadratura Curvarum. Dann gab der Präsident eine kurze Darstellung der Sache mit Beifügung der genauen Zeit, zu welcher er seine Erfindung zuerst erwähnte oder enthüllte[4]), und berief sich auf einige durch Wallis veröffentlichte Briefe; hierauf wurde Herr Keill ersucht, einen Bericht über den Gegenstand des Streites zu verfassen und denselben in ein richtiges Licht zu setzen. Sitzung vom 12. April. Die Verlesung der früheren Aufzeichnungen[5]) gab Gelegenheit, den in den Leipziger A. E. erwähnten Gegenstand weiter zu besprechen. Der Präsident fühlte sich bewogen[6]), seine vor vielen Jahren an Herrn Collins gerichteten Briefe über seine Methode der Curvenbehandlung u. s. w. zu erwähnen, und da Herr Keill anwesend war, wurde dieser abermals ersucht, einen Aufsatz niederzuschreiben und das Recht des Präsidenten in dieser Angelegenheit zu behaupten. Sitzung vom 24. Mai. Keill's Erwiderung wurde verlesen. Eine Abschrift soll an Leibniz geschickt werden, und sobald Leibnizens Antwort darauf eingetroffen sein wird, soll Keill's Schrift in den P. T. gedruckt werden. In der nächsten Sitzung vom 31. Mai, in welcher Newton nicht gegenwärtig war, verlas Sloane einen Brief an Leibniz, welcher gebilligt wurde. Sloane's Brief ist nie veröffentlicht worden und dürfte ein ziemlich farbloses Begleitschreiben der Keill'schen Erwiderung gewesen sein, sonst hätte man ihn kaum in Newton's Abwesenheit gutgeheissen. Das wichtige Keill'sche Schriftstück dagegen ist im Drucke vorhanden[7]) und fordert unseren Bericht.

Ich gebe es zu, heisst es nach kurzen Einleitungssätzen, dass ich gesagt habe, die Fluxionsrechnung sei von Newton erfunden, dann

---

[1]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. LXXII. [2]) *President in the chair.* [3]) *unfair account.* [4]) *with the particular time of his first mentioning or discovering his invention.* [5]) *the former minutes being read.* [6]) *was pleased.* [7]) *Commerc. epistol.* pag. 172–180. Im Original sind die auftretenden Personen meistens Dominus Newtonus, Dominus Leibnitius genannt. Lediglich zur Abkürzung lassen wir das Wort Herr weg.

von Leibniz unter Veränderung des Namens und der Bezeichnungsweise herausgegeben worden. Ich will damit keineswegs gesagt haben, der Name, den Newton seiner Methode beilegte, oder die Bezeichnung, deren er sich bediente, seien Leibniz bekannt gewesen. Ich wollte nur zu verstehen geben, dass Newton der erste Erfinder der Fluxionsrechnung oder des Differentialcalcüls war; dass er in zwei Briefen an Oldenburg, welche durch diesen an Leibniz gelangten, Kennzeichen davon gab, die für einen Mann von grossem Scharfsinne hinreichten, ihm den Weg zu zeigen[1]), und dass Leibniz aus ihnen die Grundgedanken jener Rechnung schöpfte oder wenigstens schöpfen konnte. Da er aber die Sprech- und Schreibweise, von denen Newton Gebrauch machte, durch blosse Vernunftschlüsse nicht ermitteln konnte, so wählte er die von ihm selbst ersonnenen. Als Beweggrund zu jenen Aeusserungen wird die Besprechung der Quadratura Curvarum in den A. E. angegeben, welche ihre Leser zu dem Glauben veranlassen könne, als habe Newton erst nach 1684 die Fluxionsrechnung erfunden. Wenn die Leipziger ihrem Leibniz fremdes Eigenthum hinzudichten dürfen, so dürfen auch die Engländer, ohne der Anschuldigung der Verleumdung zu verfallen, das zurückfordern, was Newton geraubt wurde. Ich habe also, fährt Keill wörtlich fort, zu zeigen, dass Newton wahrer und erster Erfinder der Fluxionsrechnung oder des Differentialcalcüls war, ferner, dass er Leibniz so klare und auf den Weg führende Kennzeichen seiner Methode gegeben hat, dass es diesem leicht wurde, auf die gleiche Methode zu verfallen[2]). Nun folgt eine Schilderung der beiden Briefe Newton's, welche wir in unserem 90. Kapitel grade mit Rücksicht auf das, was Leibniz aus ihnen lernen konnte, ausführlich besprochen haben. Keill kommt allerdings zu der ganz entgegengesetzten Schlussfolgerung, zu welcher wir damals gelangten, denn er behauptet kurzweg[3]): Aus diesen Kennzeichen, unterstützt durch diese Beispiele, hätte ein gewöhnlicher Geist Newton's Verfahren bis in's Innerste erkennen müssen, und man kann nicht entfernt glauben, dass es dem Scharfsinne eines Leibniz verborgen geblieben sein könne. Das freilich sei Leibniz in vollstem Maasse zuzugeben, dass er weder den Namen Fluxionsrechnung gehört, noch die von Newton benutzte Bezeichnung gesehen habe, bevor sie in Wallis' Werken erschienen, denn Newton selbst habe mit Namen und Bezeichnung gewechselt. In der Analysis per aequationes — welche

[1]) *indicia dedisse perspicacissimi ingenii viro satis obvia.* [2]) *deinde ipsum adeo clara et obvia Methodi suae indicia Leibnitio dedisse, ut inde ipsi facile fuerit in eandem Methodum incidere.* [3]) *His indiciis atque his adjectis exemplis Ingenium vulgare Methodum Newtonianum penitus discerneret; ita ut ne suspicari fas sit, eum acerrimi Leibnitii acumen posse latuisse.*

eben erst durch William Jones im Drucke herausgegeben war — seien beide verschieden von den in den Principien[1]). Endlich sei man Leibniz neben anderen hohen Verdiensten, welche er um die Mathematik sich erwarb[2]), auch dafür verpflichtet, dass er der Erste war, der diesen Calcül im Drucke herausgab und der Oeffentlichkeit überlieferte.

Das also war es, was vom 5. April bis zum 24. Mai, in vollen sieben Wochen, durch Keill zusammengebracht worden war! Dürfen wir wirklich sagen durch Keill? Newton war sicherlich in gleichem Maasse wie Keill bei der Arbeit betheiligt, das beweisen die oben angeführten Protokollbemerkungen vom 5. und 12. April.

Nun aber eine Frage, welche hier aufgeworfen werden muss: glaubten Newton und Keill selbst an die durch sie erhobene Anklage? Wir meinen diese Frage bejahen zu dürfen, und zwar mit Rücksicht auf das in dem Abdrucke des Leibnizischen Briefes bei Wallis fehlende Wort hodie (S. 276). Oldenburg hatte Newton's Brief vom 24. October 1676 bis zum 2. Mai 1677 in seiner Verwahrung gehabt. Ein volles Halbjahr war darüber weggegangen, bis der Brief Beförderung fand. Nun wusste Newton allerdings von einer Verspätung von vier und ein halb Monaten, denn am 5. März 1677 hat Collins ihm geschrieben[3]), dass der Brief damals noch nicht abgegangen war, dass aber in den nächsten acht Tagen Jemand ihn nach Hannover mitnehmen würde. Newton war also, wenn ihm keine weitere Mittheilung zugegangen ist — und wir wissen wenigstens von keiner weiteren — berechtigt anzunehmen, sein Brief sei etwa am 10. März durch Oldenburg abgeschickt worden. Nun kam Leibnizens vom 21. Juni datierte Antwort. Musste dieses Datum unter Anrechnung der höchstmöglichen Reisezeit des Briefes nicht den Verdacht erwecken, Leibniz habe sich etwa zwei Monate Frist gegeben, den Brief zu beantworten? Je höher die Meinung von Leibnizens mathemathischem Können in der Zeit von 1684 bis 1708 gestiegen war, um so eher konnte man jetzt argwöhnen, Leibniz habe aus dem für jeden anderen Leser unentzifferbar räthselhaften zweiten Newton'schen Briefe so viel Anregung gewonnen, dass er in jenen zwei Monaten den Differentialcalcül nacherfand. Das Wort *hodie* würde den Verdacht im ersten Augenblick niedergeschlagen haben, aber vielleicht hatte wirklich Leibniz, wie wir als möglich annahmen, das Wort beim Abschreiben vergessen! So konnte Newton Verdacht hegen, um wie viel mehr Keill, der Newton's Brief und Leibnizens Antwort aus

[1]) Keill hätte noch hinzufügen können, dass sie in der Quadratura Curvarum abermals andere waren. [2]) *inter caetera quae de re Mathematica praeclare meritus est Leibnitius.* *Commerc. epistol.* pag. 146.

dem Abdrucke bei Wallis citierte. Das Wort *hodie* fehlte. Dass Newton's Brief am 5. März 1677 noch in London war, stand bei Wallis allerdings auch zu lesen[1]). Nehmen wir aber an, dass Keill, was nicht zu den Unmöglichkeiten gehört, beim Studium der Prioritätsfrage einen Brief von Collins überschlagen zu dürfen glaubte, wenn er nur die zwischen Newton und Leibniz gewechselten Briefe las, so kann er zur Meinung gekommen sein, Leibniz habe mehr als sechs Monate verstreichen lassen, bis er mit seiner Antwort herausrückte, er habe wirklich die Differentialrechnung nur nacherfunden, und Keill's Zornesaufwallung war dann, wenn auch nicht gut begründet, doch jedenfalls guten Glaubens. Wunderbar genug, dass, so viel wir wissen, noch kein Schriftsteller, sei es zur Zeit des Streites, sei es später, auf das fehlende Wort und seine Bedeutung hingewiesen hat[2]).

Der Brief Keill's und das Begleitschreiben Sloane's gingen nach dem 31. Mai 1711 an Leibniz ab. Wann sie in seine Hände kamen, wissen wir nicht, aber der ganze Sommer 1711 war für Leibniz eine von den mannigfachsten Geschäften erfüllte Zeit[3]). Da kam ein Briefwechsel über die hannövrisch-englische Thronfolge in Verbindung mit dem Plane, die anglikanische Kirchenverfassung und Liturgie in Preussen und Hannover einzuführen, ein Plan, der, wenn er gelang, die Tories vielleicht wieder für die hannövrische Linie gewonnen haben würde, der aber bald wieder einschlief. Da wurden mit Des Maizeaux, dem Herausgeber des Bayle'schen Dictionnaire, Briefe über die praestabilirte Harmonie gewechselt. Da erhielt Leibniz im September einen Mitarbeiter an dem grossen Geschichtswerke der Annalen des Welfischen Hauses, welcher neben der Aufgabe der Beihilfe auch die hatte, Leibnizens eigenen Fleiss zu überwachen. Da musste Leibniz im October den Herzog Ulrich von Braunschweig nach Torgau begleiten, wo die Vermählungsfeier von dessen Tochter mit dem russischen Prinzen Alexei, dem Sohne Peter des Grossen, stattfand, eine Reise, welche dadurch für die Wissenschaft fruchtbar wurde, dass der Zar gelegentlich einer Unterredung Leibniz versprach, im russischen Reiche Magnetnadelbeobachtungen anstellen zu lassen. In derselben Unterredung hatte aber Peter der Grosse eine Rechenmaschine verlangt, deren Anfertigung Leibniz besorgen sollte, und welche ihn in einen weitläufigen Briefwechsel verwickelte. Man begreift es, wie bei solcher vielgespalteten Thätigkeit das Jahr seinem Ende sich nähern konnte, bevor Leibniz die englischen Briefe, welche

[1]) Wallis, *Opera* III, 647. [2]) H. Sloman, Leibnizens Ansprüche auf die Erfindung der Differenzialrechnung. Leipzig 1857. S. 51 in der Fussnote hat das Fehlen von *hodie* in dem älteren Abdrucke bemerkt, aber nicht hinreichend gewürdigt. [3]) Allgemeine Deutsche Biographie XVIII, 202.

ohnedies sein Schreiben vom 4. März erst am 31. Mai beantwortet hatten, erledigte. Er schrieb am 29. December folgenden Brief an Hans Sloane:

Was Herr Johannes Keill Ihnen jüngst schrieb, greift meine Unbescholtenheit noch offener als früher an. Dass ich diese in meinem Alter[1], nach den Proben meines Lebens, durch eine Vertheidigungsschrift rechtfertigen und mit einem gelehrten, aber immerhin als Neuling zu betrachtenden Manne, der die früheren Ereignisse wenig kennt und ohne Auftrag dessen ist, den die Sache angeht, wie vor einem Gerichtshofe streiten soll, wird mit Einsicht und Billigkeit Niemand gutheissen. Seinen Argwohn bezüglich der Art, wie ich die Sache kennen lernte, zu widerlegen, um ihn zu belehren, dazu ist er ein zu wenig geübter Schiedsmann in der Kunst des Erfindens, aber meine Freunde wissen, dass ich einen ganz anderen und anderswohin gerichteten Weg einschlug. Vergebens beruft er sich auf die A. E., um seine Worte zu entschuldigen. Ich finde nicht, dass dort irgend wem irgend etwas entzogen wird, vielmehr ist an verschiedenen Stellen Jedem das Seine zugewiesen[2]. Auch ich und Freunde von mir haben verschiedentlich gezeigt, dass wir ganz gern glauben, dass der berühmte Urheber der Fluxionen von sich aus zu den unsrigen ähnlichen Grundlagen gekommen sei: aber ich habe nicht weniger Anrecht auf das Erfinderthum, wie auch Huygens, der einsichtsvollste und unbestechlichste Richter, öffentlich anerkannte: ich habe sogar nicht geeilt mein Recht zu beanspruchen, ich habe meine Erfindung mehr als nur neun Jahre verborgen gehalten, nur damit Niemand sich beklagen könne, ich habe ihm den Rang abgelaufen. Ich überlasse es Ihrer Billigkeit, ob dem leeren und ungerechten Geschrei nicht Schranken zu setzen sind, von welchem ich vermuthe, dass es bei Newton, dem hervorragenden Manne und besten Kenner der Thatsachen, Missbilligung findet. Ich bin überzeugt, er wird gern ein Zeichen dieser seiner Meinung von sich geben.

Auch in diesem Briefe kommt ein Satz vor, der besser ungeschrieben geblieben wäre. Es ist die von uns in der Anmerkung im lateinischen Wortlaute wiedergegebene Behauptung, in den A. E. sei Jedem das Seine zugewiesen. Der unmittelbar anschliessende Satz von Newton's Selbständigkeit nimmt der Aeusserung zwar den verletzenden Stachel, den man hat hineindeuten wollen, aber immerhin war es ungerechtfertigtes Festhalten an einer stylistischen Wendung, welche wir schon oben (S. 283) tadeln mussten.

[1] Leibniz war damals $65\frac{1}{2}$, Newton 69, Keill 40 Jahre alt. [2] *in illis enim circa hanc rem quicquam cuiquam detractum non reperio, sed potius passim suum cuique tributum*

Die letzten Worte des Briefes forderten abermals Newton in unzweideutigster Weise auf, das Wort zu ergreifen, und Sloane scheint die Aufforderung nicht für unangemessen gehalten zu haben. Der Protokollauszug fährt nämlich fort: 31. Januar 1712. Leibnizens Antwort vom 29. December 1711 wurde verlesen und Newton übergeben. Wozu das Letztere, wenn die Meinung nicht war, er solle nun seinerseits das Wort ergreifen? Aber das passte ihm nicht. Unter dem 7. Februar heisst es: Da der Präsident nicht kam, wurde über Leibnizens Brief an Doctor Sloane nicht berichtet. Daran schliesst sich unmittelbar der Eintrag vom 6. März: In Folge des Leibnizischen Briefes wurde ein Ausschuss aus den Herren Arbuthnot, Hill, Halley, Jones, Machin und Burnet gebildet, um die Briefe und Papiere, welche auf den Streit sich bezogen, in Augenschein zu nehmen und einen Bericht für die Gesellschaft anzufertigen. Am 20. März wurde der Ausschuss durch Francis Robartes, am 27. März durch Bonet, den preussischen Minister, am 17. April durch De Moivre, Aston und Brook Taylor neu verstärkt. Am 24. April wurde der Bericht des Ausschusses verlesen.

95. Kapitel.

Der Prioritätsstreit seit April 1712.

Es ist vor allen Dingen nothwendig, die Persönlichkeiten des Ausschusses einer kleinen Prüfung zu unterwerfen, da das Gewicht eines Gutachtens nicht zum geringsten Theil davon abhängt, wer es erstattet hat.

John Arbuthnot[1]) (1667—1735) war Schotte, Arzt der Königin Anna. Als wissenschaftliches Verdienst wird ihm ein Aufsatz von 1710 über die Ueberzahl männlicher Geburten verglichen mit den weiblichen nachgerühmt.

Abraham Hill[2]) (1635—1721) war der ehemalige Schatzmeister der Royal Society.

Eduard Halley war der berühmte Astronom und Mathematiker, der uns wiederholt begegnet ist, und dessen Arbeiten mehrfach (S. 80—82 und S. 115) an die von Newton anknüpften.

William Jones[3]) (1675—1749) war erst Kaufmann, dann Lehrer der Mathematik und als solcher Verfasser einer Einleitung in die Mathematik unter dem Titel *Synopsis palmariorum Matheseos* (1706).

[1]) *National Biography* II, 62—65 (London 1885, edited by Leslie Stephen). [2]) Ebenda XXVI, 389—390 (London 1891, edited by Leslie Stephen and Sidney Lee). [3]) Ebenda XXX, 172—173 (London 1892, edited by Sidney Lee).

In diesem Werke ist auf S. 243, 263 flgg. vermuthlich zum ersten Male der griechische Buchstabe π benutzt[1], um die Verhältnisszahl 3,1415 . . . des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser kurz zu bezeichnen. William Jones hatte auch soeben 1711 Newton's Analysis per aequationes zum Druck befördert.

John Machin[2] († 1751) war Professor der Astronomie am Gresham College in London. Von seiner Berechnung der Zahl π mittelst des Unterschiedes zweier Reihen wird im 97. Kapitel die Rede sein. Hier bemerken wir nur, dass sie erstmalig 1706 in der vorgenannten Synopsis von Jones ohne Erläuterung, wie sie gefunden worden sei, veröffentlicht wurde. Jedenfalls müssen also persönliche Beziehungen zwischen Machin und Jones vorhanden gewesen sein.

Burnet[3]) gehörte jedenfalls der schottischen Familie dieses Namens an. Bei dem Fehlen eines Vornamens in dem Protokollauszuge vom 6. März war es uns nicht möglich zu ermitteln, welcher Burnet gemeint ist, vielleicht der Theologe Gilbert Burnet, vielleicht Thomas Burnet de Kemney, der mit Leibniz in philosophischem Briefwechsel stand und von Mathematik genau so wenig verstand als Gilbert Burnet.

Das waren die zuerst ernannten Auschussmitglieder. Sehen wir zu, aus welchen Persönlichkeiten die Verstärkung bestand.

Francis Robartes wird in einer im Jahre 1711 ihm von De Moivre gewidmeten Abhandlung[4]) als *mathematicarum scientiarum fautor summus* angeredet, aber ein Gönner der mathematischen Wissenschaften ist noch kein Mathematiker.

Bonet wird im Protokolle als preussischer Minister bezeichnet. Es ist uns nicht gelungen, in irgend einem Sammelwerke über seine Persönlichkeit die geringste Aufklärung zu finden, was nicht gerade für eine hohe Bedeutung des Mannes spricht. Daneben darf wohl darauf aufmerksam gemacht werden, dass Leibniz seit der Neueinrichtung und gewissermassen zweiten Gründung der Berliner Akademie alles eher als eine am preussischen Hofe beliebte Persönlichkeit war.

Abraham de Moivre war jener in jungen Jahren aus Frankreich eingewanderte Mathematiker (S. 82—84), welchen man fast als einen Schüler Newton's bezeichnen darf.

Aston[5]) war Secretär der Royal Society und wurde am 30. No-

[1] W. W. Rouse Ball in Eneström's *Bibliotheca mathematica* 1894 pag. 106. [2] Klügel, Mathematisches Wörterbuch I, 657. — Poggendorff II, 5. [3]) *National Biography* VII London 1886, edited by Leslie Stephen. [4]) P. T. XXVII, 213. [5] Ch. Rich Weld, *History of the Royal Society with memoirs of the Presidents* London 18.8, I, 302–303 und I, 438. — Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. XXXVI und LXIX Note 136.

vember 1685 neuerdings dazu erwählt, erklärte aber am 9. December plötzlich und in leidenschaftlicher Weise, er lege das Amt nieder. Am 30. November 1690 wurde er gleichzeitig mit Flamsteed und Newton in den geschäftsleitenden Ausschuss der Royal Society gewählt. Im Jahre 1715 vermachte er der Gesellschaft Land, Bücher und Geld im Gesammtbetrage von 445 Pfund Sterling. Dass Aston etwas Wissenschaftliches geleistet hätte, wird nicht erzählt.

Brook Taylor endlich wird uns im 97. und im 100. Kapitel als ganz hervorragender mathematischer Schriftsteller bekannt werden.

De Moivre und Taylor wird man als zur Ausschmückung in den Ausschuss gewählt betrachten müssen, denn da acht Tage nach ihrer Zuziehung der Bericht des Ausschusses schon verlesen wurde, können sie unmöglich starken Antheil an den zur Herstellung desselben nöthigen Arbeiten genommen haben. Ausser ihnen waren nur Halley, Machin und allenfalls Jones in der Lage, über den Infinitesimalcalcül in irgend einer Beziehung mitreden zu können, Jones namentlich in seiner Eigenschaft als erster Besitzer der von Collins seiner Zeit hinterlassenen Papiere[1]. Arbuthnot, Hill, Burnet, Robartes, Bonet, Aston, also die Mehrheit der Ausschussmitglieder, mussten nach Lage der Dinge ihr Urtheil über von ihnen nicht Verstandenes abgeben.

Der in englischer Sprache abgefasste Bericht schloss mit den Worten[2]: Aus diesen Gründen erachten wir Herrn Newton als den ersten Erfinder, und wir sind der Meinung, dass Herr Keill, indem er das Gleiche behauptete, keineswegs Herrn Leibniz gekränkt hat. Wir unterbreiten dem Urtheile der Gesellschaft, ob die Auszüge aus Briefen und Aufsätzen, welche wir ihr jetzt vorlegen, zusammen mit den Dingen ähnlichen Inhaltes im III. Bande von Wallis' Werken nicht eine Veröffentlichung verdienen.

Darauf entschied sich die Gesellschaft[3]) dahin, den Druck der Papiere und des Sitzungsbeschlusses vollziehen zu lassen, damit auch was sonst zur Aufklärung der Angelegenheit geeignet sei, in gelehrten Mittheilungen erscheine. Wir glauben wenigstens das im letzten Satze auftretende *Acta Eruditorum* so, wie wir es thaten, übersetzen zu

[1] De Morgan in dem *Philosophical Magazine* Ser. 4. Vol. IV July-December 1852 pag. 322 Note *. [2] *For which Reasons we reckon Mr. Newton the first Inventor: and are of Opinion, that Mr. Keill, in asserting the same, has been no ways injurious to Mr. Leibnitz. And we submit to the Judgment of the Society, whether the Extract of Letters and Papers now presented to you, together with what is extant to the same purpose in Dr. Wallis's III Volume may not deserve to be made Publick* Commerc. epistol. pag. 184. [3] *Societas Regia collectionem Epistolarum et MSS*torum *et Sententiam Consensus imprimi jussit; ut et quicquid amplius ad hanc Historiam elucidendam idoneum in Actis Eruditorum occurreret.*

sollen: wir können uns nicht denken, dass die Royal Society gewähnt haben sollte, ihre Veröffentlichung werde in den A. E. nachgedruckt werden. Jedenfalls hat die Gesellschaft, man bemerke sich das wohl, den Druck der Papiere zum Beschlusse erhoben, sie hat auch am 29. Januar 1713, wie ein weiterer Protokollauszug mittheilt, durch Stimmenmehrheit die Druckkosten übernommen[1], welche am 11. Juni mit 22½ Pfund Sterling ausbezahlt wurden. Sie hat dagegen über den Satz, dass Newton erster Erfinder sei und Keill folglich sich gegen Leibniz nicht vergangen habe, weder bejahend noch verneinend eine Entscheidung getroffen. Noch war also das *Commercium Epistolicum*, wie man das Bändchen zu nennen pflegt, welches unter Leitung von Halley, Jones und Machin gedruckt wurde, und dessen ersten Abzüge am 8. Januar 1713 als fertiggestellt vorgelegt werden konnten, kein Urtheil. Es war nur eine Anklageschrift, wie man sie von den Mitgliedern des Untersuchungsausschusses erwarten konnte, vielleicht erwarten musste. Pflicht der Royal Society wäre es nun nach unserer Rechtsanschauung gewesen, den allerersten Abzug des Commercium Epistolicum sofort an Leibniz zu schicken und ihn aufzufordern, der Anklage zu begegnen. So handelte die Gesellschaft aber leider nicht.

Exemplare wurden an Gelehrte in den verschiedensten Ländern verschickt. Für Frankreich war ein Abbé Bignon in Paris, wie Johann Bernoulli am 7. Juni 1713 berichtete[2], für Deutschland ein Arzt Abraham Vater der jüngere in Wittenberg, wie Christian Wolf am 1. Juli 1713 schrieb[3], Mittelperson der Versendung. In Frankreich, Italien, Holland, Deutschland, schrieb Wolf an Leibniz in einem weiteren Briefe[4] vom 6. Februar 1714, werden Exemplare mit der Aufschrift als Geschenk der Royal Society vertheilt. Wer der Gesellschaft irgend bekannt war, dessen Name wurde auf eines der Bücher geschrieben. In Frankreich sind unter die einzeln genannten Mitglieder der Académie des Sciences Exemplare als Geschenk der Royal Society vertheilt worden, und ich selbst erhielt eines, auf welchem mein Name steht. Ich habe auch ein Euer Hochwohlgeboren zu übergebendes Exemplar, welches ich von Herrn Vater erhielt, dem der Auftrag geworden ist, den deutschen Mathematikern die Büchelchen auszutheilen.

Und mit dieser Art der Verbreitung begnügte man sich nicht. Der oft von uns benutzte Protokollauszug beweist, dass am 17. Juni 1714, ein Datum, auf welches wir zurückkommen werden, 25 Exemplare

[1] Jan. 29: *It was ordered by balloting that the Treasurer pay the charges of printing the Commercium Epistolicum.* [2] Leibniz III, 909. [3] Ebenda, Supplementband zum mathematischen Briefwechsel 151. [4] Ebenda 157

von Gesellschafts wegen einem holländischen Buchhändler zu 3 Shilling das Stück überlassen wurden, und in der Sitzung, deren Aufzeichnung wir dieses entnehmen, führte Newton den Vorsitz.

Aber wir müssen den Inhalt des Commercium Epistolicum genauer schildern, nachdem von seiner Verbreitungsweise die Rede war. Eine Anklageschrift haben wir das kleine Buch weiter oben genannt, und wir können hinzufügen, es war eine Anklageschrift so fein, so schlau, so giftig, wie wohl kaum je eine zweite abgefasst wurde. Es kam darauf an, Newton's Verdienste in glänzendstes Licht zu setzen. Es kam aber auch darauf an, Leibniz des geistigen Diebstahls zu beschuldigen, und zu diesem Zwecke musste Dieser als Gewohnheitsdieb erscheinen.

Das Commercium Epistolicum beginnt mit Briefen Barrow's, welche sich auf die Analysis per aequationes beziehen, und an welche diese Abhandlung sich anschliesst, wiewohl sie 1711 schon durch Jones im Drucke herausgegeben war. Dann kommen Briefe, welche 1671 und 1672 zwischen Collins und James Gregory gewechselt worden waren, und in welchen von den Reihen die Rede ist, welche Newton in der Analysis per aequationes angab (S. 70), sowie von Gregory's Arcustangensreihe (S. 72). Der erste Leibnizische Brief, welcher abgedruckt ist, ist der am 3. Februar 1673 an Oldenburg gerichtete, den Leibniz (S. 73) in London selbst an dem Tage schrieb, an welchem er mit Pell das Gespräch über die erzeugenden Differenzen geführt hatte. Hier beginnen die eigentlichen Verdächtigungen sich vorzubereiten, denn später heisst es, Leibniz habe allerdings in früher Zeit sich mit Differenzen beschäftigt, aber das seien die von Mouton entnommenen gewesen, die mit dem Infinitesimalcalcül nichts zu thun haben, und das bilde zugleich Leibnizens ersten Diebstahl. Der zweite Diebstahl soll der der Reihe für $\frac{\pi}{4}$ sein, der an Gregory begangen wurde. Als Beweisstücke dienen die von uns schon als abgedruckt bezeichneten Briefe zwischen Collins und Gregory und späte Briefe von 1675, welche Leibniz mit Oldenburg über die angeblich von Ersterem erfundene Reihe für $\frac{\pi}{4}$ wechselte, eine falsche Angabe, weil Leibniz jene Reihe aus den ihm zugeschickten Briefe Gregory's an Collins kannte.

Diese letztere Behauptung bedurfte nun des strengen Beweises, um als Thatsache gelten zu können, und das Commercium Epistolicum suchte den Beweis durch ein weiteres Schriftstück, einen Brief von Collins an Oldenburg[1], zu liefern. Collins sagt darin, er wolle, da

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 100.

Leibniz und andere Mitglieder der Pariser Académie des Sciences darauf dringen, von Gregory's, seines verstorbenen Freundes, Leistungen unterrichtet zu sein, die wichtigsten Dinge zusammenstellen, die in dessen Briefen vorkamen; Oldenburg solle die Sammlung Leibniz mittheilen, der sie aber nach Kenntnissnahme zurückgeben müsse. In der Sammlung selbst, heisst es weiter, befand sich der Gregory'sche Brief mit der Arcustangensreihe, befand sich auch Newton's Tangentenbrief an Collins (S. 161 und 173—174). Die erste hier aufzuwerfende Frage, wann Collins die Sammlung an Oldenburg schickte, ist nicht genau zu beantworten, da der erwähnte Begleitbrief kein Datum trägt. Dagegen ist ein datirter Brief vom 11. August 1676 von Collins an David Gregory den älteren, Bruder des verstorbenen James Gregory, vorhanden[1]. Hier sagt Collins, er habe aus des Freundes Papieren eine kleine Geschichte, historiolam, zusammengestellt, damit sie in den Schränken der Royal Society aufbewahrt werde und auch den französischen Mathematikern mitgetheilt werden könne. Damit ist offenbar jene Sammlung gemeint, welche deshalb in der Regel kurzweg die Historiola heisst, und für deren Vollendung der 11. August 1676 einen Endtermin darstellt. Die zweite Frage, welche sich aufdrängt, ist die, ob Oldenburg seinem Auftrage auch nachgekommen ist? Hat Leibniz, um uns schärfer auszudrücken, die Historiola auch wirklich zu Gesicht bekommen? Das Commercium Epistolicum von 1712 nimmt es stillschweigend an. Wir werden unsererseits der Frage am Schlusse dieses Kapitels näher treten.

Nun kommen in dem Commercium Epistolicum die 1676 und 1677 von Newton und Leibniz gewechselten Briefe, wie sie im III. Bande von Wallis' Werken zum Abdruck gekommen waren, also ohne das Wort *hodie* in der Anfangszeile des Leibnizischen Briefes vom 21. Juni 1677. Auch der Brief von Collins an Newton vom 5. März 1677 ist aufgenommen, als dessen Nachschrift die Bemerkung erscheint, Newton's zweiter Brief werde vermuthlich in der nächsten Woche nach Hannover abgehen (S. 291). Was weiter folgt, ist eine kurze Zwischenerzählung[2], auf die wir sogleich zurückkommen, sind Briefe und Auszüge aus gedruckten Abhandlungen aus der Zeit von 1695 bis unmittelbar vor dem Drucke des Commercium Epistolicum und zum Schlusse das Urtheil des Prüfungsausschusses.

Wenn wir die wesentlichen Stücke, die im Commercium Epistolicum abgedruckt sind, nannten, so haben wir einen Bestandtheil noch nicht erwähnt, das sind die fast auf jeder Seite beigefügten Fussnoten. In ihnen ist jede erläuterte Stelle von dem Standpunkte aus

[1] *Commerc. epistol.* pag. 101. [2] Ebenda pag. 157.

besprochen, als wäre der Beweis von Leibnizens Schuld nicht erst zu führen, sondern bereits geliefert. Jede von Leibniz gebrauchte Redewendung, welche gegen das zu Beweisende zu benutzen wäre, gilt demnach nur als weitere Probe seiner Verlogenheit und Verderbtheit. Man kann deshalb getrost die Anmerkungen das Giftigste an der ganzen Veröffentlichung nennen.

Und noch Eines müssen wir hervorheben. Diejenigen Briefe, welche nur als Belege zweiten Ranges aufgenommen sind, erscheinen nicht in ihrem ganzen Wortlaute, sondern auszugsweise. Dagegen wäre bei unparteiisch angefertigten Auszügen nichts einzuwenden, wohl aber dagegen, dass die Auszüge wiederum nur zu Gunsten der vorgefassten Meinung von Leibnizens Schuld hergestellt erscheinen, dass sie jeden Satz beseitigen, der für Leibniz und seine Unbefangenheit spräche[1]).

Wer war der Verfasser der Anmerkungen und der zwischen die abgedruckten Briefe eingestreuten Stellen fortlaufender Erzählung? Ob ein Verfasser für Alles verantwortlich zu machen ist, wissen wir nicht zu sagen, aber in Bezug auf eine Stelle der Zwischenerzählung, auf welche zurückzukommen wir oben zusagten, lässt der Beweis sich liefern, dass sie aus Newton's Feder stammt[2]). Newton hat eine Kritik der in den A. E. von 1689 gedruckten Aufsätze Leibnizens über die Mechanik des Himmels verfasst, wenn auch nicht veröffentlicht. Sie ist handschriftlich noch vorhanden. Ihre Anfangsworte sind von Newton viermal anders gefasst. In der letzten Fassung heissen dieselben wie folgt[3]): Gegen Ende des Jahres 1683 schickte Newton die wichtigsten Sätze, die in den *Principiis mathematicis philosophiae* vorkommen, nach London; sie wurden alsbald der Royal Society mitgetheilt, und im Jahre 1686 wurde jenes Buch der Gesellschaft zum Drucke zugeschickt; im folgenden Jahre erschien es. Dieselben Worte in buchstäblicher Uebereinstimmung finden sich in der Zwischenerzählung des Commercium Epistolicum. — Das kann kein Zufall sein. Sind auch die betreffenden Worte durchaus unschuldig und enthalten sie nicht den kleinsten giftigen Stachel, so zeigen sie eben doch, dass Newton Mitarbeiter am Commercium Epistolicum war. Wie weit seine Mitarbeit

[1]) Herr Lefort hat dieses in seiner von uns überall angeführten kritischen Ausgabe des *Commercium Epistolicum* an zahlreichen Stellen nachgewiesen.
[2]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 307—308. [3]) *Anno 1683 ad finem vergente Newtonus propositiones principales earum quae in Philosophiae Principiis Mathematicis habentur Londinum misit eaedemque cum Societate Regia mox communicatae sunt, annoque 1686 Liber ille ad Societatem missus est ut imprimeretur, et proximo anno lucem vidit.*

sich erstreckte, ob er auch sonst den Wortlaut beeinflusste, ob er nur in dem Sinne sich betheiligte, in welchem wir ihn (S. 291) als Mitarbeiter Keill's kennen gelernt haben, dadurch nämlich, dass er den eigentlichen Redactoren zur Verfügung stellte, was er an verwendbaren Stücken auch aus eigener Feder besass, das wird vermuthlich ein ungelöstes Räthsel bleiben.

Wir kommen in unserer Erzählung nun wieder an den Zeitpunkt, zu welchem das Commercium Epistolicum fertig gedruckt war und zur Verbreitung gelangte. Noch bevor Leibniz, der sich vom December 1712 bis zum September 1714 in Wien aufhielt[1]), auch nur von dem Erscheinen des Buches Kenntniss erhalten hatte, brachte eine im Haag erscheinende Zeitschrift, *Journal litéraire*[2]), in seiner Nummer für Mai und Juni 1713 einen Londoner Brief. Er wusste zu melden, dass das Commercium Epistolicum die Presse verlassen habe, gab eine rasche Uebersicht der Streitpunkte, dann einen Abdruck des Schlussberichtes des Prüfungsausschusses der Royal Society, eines Berichtes, den man als das Urtheil der Gesellschaft anzusehen habe[3]). Das war ungefähr die Zeit, zu welcher (S. 63—64) Johann Bernoulli am 29. Juli 1713 den politischen Hintergrund des Streites witterte, welcher sicherlich wenigstens so weit vorhanden war, als man in England mehr und mehr geneigt wurde, dem politischen Gegner jede Schlechtigkeit zuzutrauen und jeden Schritt gegen ihn für erlaubt zu halten. Diese Stimmung hielt auch im folgenden Jahre noch an. Am 20. April 1714 schrieb Wolf an Leibniz[4]), die Herausgeber des Journal litéraire theilten ihm mit, die Engländer behandelten die Streitfrage nicht als eine solche zwischen einem Engländer und einem Deutschen, sondern als Streit zwischen England und Deutschland.

An demselben Tage des 29. Juli 1713, an welchem Johann Bernoulli die soeben von uns wiederholt hervorgehobene Bemerkung niederschrieb, gab Leibniz die erste öffentliche Antwort auf das Commercium Epistolicum. Er schickte die unterschriftlose Erwiderung in lateinischer Sprache an Christian Wolf[5]), damit derselbe sie als Flugblatt drucken lasse, und wie die meisten Schriftstücke in dem hässlichen Streite ihre besonderen Namen erhalten haben, so führt man dieses meistens als das Flugblatt von 1713 an. Später liess Leibniz wieder ohne Unterschrift und abermals durch Wolf's Vermittelung einen französischen Brief an das Journal litéraire schicken[6]).

[1] Allgemeine Deutsche Biographie XVIII, 202. [2] Das *Journal litéraire* erschien von 1713 bis 1737. [3] *On doit regarder ce rapport comme le Jugement de la Societé* (Commerc. epistol. pag. 230). [4] Leibniz, Supplementband zu dem mathematischen Briefwechsel S. 158. [5] Ebenda S. 57 Wolf's Brief vom 20. April 1714. [6] Ebenda S. 155.

der in der Nummer für November und December 1713 abgedruckt ist. Auch eine deutsche Fassung ist vorhanden, welche in Deutschland erschien. Sämmtlichen Entgegnungen kann man eine gewisse Grobheit nicht absprechen. Am wenigsten zeigt diese der französische Wortlaut, da die Leitung des Journal litéraire Milderungen anbrachte.

Das Flugblatt enthielt als einen wesentlichen Bestandtheil ein Bruchstück eines Briefes[1]), in welchem ein Mathematiker ersten Ranges unter dem 7. Juni 1713 seine Ansicht über den Streit geäussert habe. Diese Ansicht geht aber dahin, dass Newton in früher Zeit die Reihenlehre zwar ungemein gefördert habe, an die Fluxionsrechnung aber damals nicht im Traume gedacht habe und ebensowenig daran, sie auf allgemeine analytische Operationen zurückzuführen, welche ähnliche Dienste leisten wie der Algorithmus und die Regeln der Arithmetik und der Algebra[2]). Er habe dafür zwei Gründe: den ersten, dass punktirte Buchstaben weder in den Briefen, noch in den Principien Newton's je vorkommen, den zweiten, dass Newton, wie *„ein hervorragender Mathematiker"* bereits bemerkte, lange Zeit die höheren Differentiationen nicht verstanden habe. Dieser Ansicht schliesse — so erklärt das Flugblatt, welches dadurch gewissermassen eine Unterschrift erhält — Leibniz sich an. In seiner Unbefangenheit habe er lange geglaubt und deshalb auch geschrieben, Newton besitze etwas, was der Differentialrechnung ähnlich sei, eigenthümlich und durch eigene Erfindung; aber nachdem er sehe, wie man jetzt von England aus sich nicht damit begnüge, Newton als Miterfinder zu nennen, sondern ihn selbst von der Erfindung ausschliessen wolle, nachdem er sehe, dass Newton dieses Märchen unterstütze, beginne er den Argwohn zu fassen, die Fluxionsrechnung sei in Nachahmung der Differentialrechnung gebildet worden[3]).

In der französischen Erwiderung[4]) kommt am Schlusse der gleiche Vorwurf, gestützt auf das Gutachten eines berühmten Mathematikers, vor, während am Anfang Gewicht auf den Umstand gelegt wird, dass früher Newton niemals Leibniz den Ruhm selbständiger Erfindung der Differentialrechnung bestritten habe, sowie auf den weiteren Umstand, dass Leibniz der Royal Society niemals seine eigene Auffassung der Sache mitgetheilt habe; die Gesellschaft sei somit nicht

---

[1]) Leibniz V, 411—413 zu vergleichen mit III, 910—911. [2]) *Nec, credo tunc temporis vel somniavit adhuc de Calculo suo fluxionum et fluentium, vel de reductione ejus ad generales operationes Analyticas, ad instar Algorithmi vel Regularum Arithmeticarum et Algebraicarum inservientes.* [3]) *suspicari coepit, Calculum fluxionum ad imitationem Calculi differentialis formatum fuisse.*
[4]) Leibniz V, 414—416

in der Lage gewesen, Gründe und Gegengründe zu vergleichen und ein Urtheil zu fällen[1].

Wir müssen noch bei dem in das Flugblatt von 1713 aufgenommenen Briefe verweilen. Seit 1745 weiss man mit aller Bestimmtheit, was man früher nur vermuthete, dass die Einschaltung ein Bruchstück eines langen Briefes Johann Bernoulli's ist. Damals, also zu Lebzeiten Johann Bernoulli's und mit dessen Einverständnisse, ist sein mit Leibniz geführter Briefwechsel gedruckt worden, und in diesem fand sich die ganze Stelle mit Einschluss eines letzten Satzes[2]: Bitte, benutzen Sie, was ich hier schreibe, in richtiger Weise und ohne mich mit Newton und seinen Landsleuten zu verfeinden, denn ich möchte in diese Streitigkeiten nicht hineingemengt werden. Leibniz kümmerte sich allerdings nicht um den ausgesprochenen Wunsch. Er liess das Bruchstück als von Johann Bernoulli herrührend in den *Nouvelles literaires*[3]) vom 28. December 1715 pag. 414 abdrucken, und auch in zwei Briefen, dem einen an die Gräfin Kielmansegge, dem anderen an Graf Bothmer, beide angesehene Persönlichkeiten am englisch-hannövrischen Hofe, hat Leibniz den Briefschreiber ausdrücklich genannt. Wie wenig aber diese das Geheimniss bewahrten, das ihnen übrigens nicht als solches anvertraut war, geht aus dem Abdrucke der Leibnizischen Briefe in einer 1720 herausgegebenen Sammlung hervor. Pierre Des Maizeaux[4]) (1672 oder 1673—1745) war der Sohn eines in Folge der Aufhebung des Edictes von Nantes nach der Schweiz ausgewanderten französischen Protestanten. Er kam 1699 in ziemlich ärmlichen Verhältnissen nach England, wurde am 10. November 1720 zum Mitgliede der Royal Society gewählt und 1722 königlicher Kammerherr. Mit der Jahreszahl 1720, aber thatsächlich etwas früher, da die Vorrede vom 27. October 1719 ist, gab Des Maizeaux eine zweibändige Sammlung damals noch nicht an die Oeffentlichkeit gelangter Briefe u. s. w. unter dem Titel *Recueil de diverses pièces sur la philosophie, la religion naturelle, l'histoire, les mathématiques etc. par Mrs. Leibniz, Clarke, Newton et autres Autheurs célèbres* heraus. Die beiden Ernennungen, von welchen wir erzählten, beweisen, dass das *Recueil Des Maizeaux*, wie die Sammlung meistens genannt wird, ihrem Herausgeber weder bei der Royal Society noch bei Hofe geschadet hat. Eher liesse sich auf das Gegentheil schliessen.

[1] *Ainsi la Societé n'a point pû examiner les Raisons de part et d'autre pour prononcer la dessus.* [2]) *Rogo vos, ut quae hic scribo, iis recte utaris, neque me committas cum Newtono ejusque popularibus: nollem enim immisceri hisce litibus.* [3]) Die *Nouvelles literaires*, nicht zu verwechseln mit dem *Journal literaire*, erschienen wie jenes im Haag 1686 bis 1720. [4]) *National Biography* XIV, 406—407 London 1888, edited by Leslie Stephen.

und wenigstens für die Royal Society kann die Thatsache als Bestätigung dienen, dass die Sammlung Hans Sloane zugeeignet ist. In ihr sind aber die beiden genannten Briefe veröffentlicht[1]), allerdings sehr unbequem für Johann Bernoulli, der noch am 5. Juli 1719 die Versicherung gegeben hatte, man werfe ihm mit Unrecht jene Aeusserungen vor[2]).

Johann Bernoulli also war es, der Newton nicht bloss das Erfinderrecht absprach, der ihn auch beschuldigte, die höhere Differentiation nicht verstanden zu haben, wie längst gezeigt sei. Er spielte damit auf die Abhandlungen der Pariser Académie des Sciences für 1711 an. Dort hatte Johann Bernoulli einen Aufsatz über die Bewegung schwerer Körper veröffentlicht, und sein Neffe Nicolaus I. Bernoulli hatte einen Zusatz beigefügt[3]), in welchem der Vorwurf mangelnden Verständnisses der höheren Differentiation begründet war. Newton glaube, wenn

$$(z+o)^n - z^n = nz^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}z^{n-2}o^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^{n-3}o^3 + \cdots,$$

so seien die einzelnen Glieder (abgesehen von den Factoren o) die aufeinanderfolgenden Differentiale von z^n. Das sei wahr für das erste Glied, aber nicht für die Folgeglieder. Newton habe überdies den Irrthum zweimal begangen, zuerst in den Principien, dann in der Quadratura Curvarum. Später wiederholte Johann Bernoulli in einem Aufsatze in den A. E. von 1713 den Vorwurf[4]) mit der Bemerkung, Nicolaus Bernoulli, der erst jüngst in England gewesen sei, habe Newton auf den Fehler aufmerksam gemacht, und Newton beabsichtige, wie er höre, in der grade im Drucke befindlichen zweiten Auflage der Principien die Stelle mittelst eines Cartons zu ändern. Das ist allerdings nicht geschehen. Newton hielt vielmehr in Briefen an Keill[5]), insbesondere in einem solchen vom 20. April 1714, die Richtigkeit der Darstellung in den Principien aufrecht, bei der es sich gar nicht um Fluxionen, sondern nur um Entwickelung in eine convergente Reihe handle[6]). Von dem Fehler in der Quadratura Cur-

[1]) *Recueil Des Maizeaux* II, 36 und 44. Ebenda, Vorrede zum I. Bande pag. XLVIII und II, 37 Note ist vom Abdrucke des Bernoulli'schen Briefes in den *Nouvelles litéraires* die Rede. [2]) Brewster, *Memoirs of the life .. of ... Newton* (London 1854) II, 503. Vergl. Giesel, Delitzscher Schulprogramm für 1866, S. 20 Note 76. [3]) Joh. Bernoulli, *Opera* I, 509—510. [4]) Ebenda I, 535 und 556. [5]) Vier Briefe Newton's an Keill vom 2. April bis 15. Mai 1714 sind abgedruckt bei Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 169—177. Der Brief vom 20. April steht pag. 170—173.
[6]) *But this great Mathematician is grossly mistaken in taking the method there made use of, which is a branch of the method of converging series, to be the method of fluxions.*

varum, der wirklich ein Fehler ist (S. 274), schwieg Newton wohlweislich.

Wir sind damit bis in's Frühjahr 1714 gelangt, wo eine neue Persönlichkeit in den Streit eingriff, John Chamberlayne[1] (1666—1723), Kammerherr bei Königin Anna und ebenso bei König Georg I. Ob er, was bei seiner Hofstellung wohl möglich ist, den Auftrag des Königs hatte, die beiden grossen Männer, deren jeder die wissenschaftliche Zierde eines der beiden unter englisch-hannövrischem Scepter stehenden Länder bildete, auszusöhnen, wissen wir nicht. Jedenfalls unterzog er sich dieser Sisyphosarbeit. Er schrieb an Leibniz in diesem Sinne. Leibniz antwortete[2] von Wien aus, wo er sich noch immer befand, unter dem 28. April 1714, er sei an der Uneinigkeit zwischen ihm und Newton schuldlos. Keill habe ihn in den P. T. verunglimpft, er habe dann bei Sloane eine Genugthuung verlangt, ein Verlangen, an welchem er nach Keill's die Beleidigung nur noch verschärfender Rückantwort um so mehr festgehalten habe, als er überzeugt gewesen sei, Newton lasse ihm Gerechtigkeit widerfahren. Nun sei, er wisse nicht durch welche Rabulisterei und Hinterlist, die Sache so aufgefasst worden, als wenn er vor der Royal Society als Richterin, deren Urtheil er sich zu unterwerfen bereit sei, eine Klage erhoben. Man hätte ihn doch wenigstens benachrichtigen müssen, dass die Gesellschaft die Grundlage der Angelegenheit zu untersuchen beabsichtige, man hätte ihm Gelegenheit bieten müssen, seine Beweismittel vorzubringen und diesen oder jenen der Richter zurückzuweisen. Man habe aber nur die eine Partei gehört, der Rechtsspruch sei dadurch an sich nichtig und könne nicht als Urtheil der Gesellschaft gelten. Nichts desto weniger habe Newton denselben in Buchform drucken und im Namen der Gesellschaft verbreiten lassen. Ein solches Verfahren finde nirgend Beifall. Vorhandene Briefe bezeugen das missbilligende Erstaunen in Frankreich und Italien. Er habe immer von Newton als unabhängigem Erfinder einer der seinigen ähnlichen Methode gesprochen, wenn auch jetzt Grund vorhanden sei an der Unabhängigkeit zu zweifeln[3]. Herr Chamberlayne sehe hieraus, von welcher Seite die Hauptsache zur Beendigung des Streites geschehen müsse.

Chamberlayne that nun zweierlei. Er gab den Brief an Newton, welcher denselben am 11. Mai, also in dem Zwischenraum seiner an Keill gerichteten Schreiben, kurz und abweisend beantwortete. Allen-

---

[1] *National Biography* X, 9—10 (London 1887, edited by Leslie Stephen). [2] *Recueil Des Maizeaux* II, 116—120. [3] *quoiqu'il se trouve maintenant qu'il y a grand lieu de douter s'il a sû mon Invention avant que de l'avoir eue de moi.*

falls wäre hervorzuheben, dass in Newton's Brief auch von Fatio's Angriff auf Leibniz von 1699 gesprochen ist, an welchem Newton nicht den geringsten Antheil gehabt habe. Erwägt man, dass in Leibnizens Brief der Name Fatio gar nicht vorgekommen war, so möchte man sich fast an die Redensart erinnert fühlen: Wer sich entschuldigt, beschuldigt sich. Das andere, was Chamberlayne that, war, dass er der Royal Society von Leibnizens Beschwerde Kenntniss gab, und nun wurde in deren Sitzung vom 20. Mai zu Protokoll erklärt[1], man beanspruche nicht, dass der Bericht der Commission als Gesellschaftsbeschluss gelte. Wie wenig ernst das gemeint war, oder wie wetterwendisch die Stimmung wechselte, zeigt das früher (S. 297) Erzählte, dass man am 17. Juni, genau vier Wochen nach der Sitzung vom 20. Mai, Exemplare des Commercium Epistolicum zu Gunsten der Gesellschaftscasse dem Buchhandel überliess.

Leibniz, von der Erklärung vom 20. Mai in Kenntniss gesetzt, dagegen offenbar unbekannt mit dem, was am 17. Juni geschah, dankte Chamberlayne am 25. August für die Uebermittelung des Protokollauszuges. Ausserdem kommt in dem Briefe noch vor, Leibniz werde, wenn er erst wieder in Hannover sei, vielleicht auch ein *Commercium Epistolicum* in Druck geben, damit die Leser sich ein Urtheil bilden könnten. Chamberlayne's Versuch war gescheitert, der Stein blieb im Rollen.

Im Juli und August 1714 brachte das Journal litéraire eine 40 Druckseiten füllende Antwort von Keill auf die Leibnizische Vertheidigung von 1713. In Keill's Antwort ist die Einwirkung von Newton's an ihn gerichteten Briefen (S. 304 Anm. 5) ersichtlich, überdies hat sie Ende Juni 1714 in ihrem ganzen Wortlaute Newton vorgelegen[2]. Am 11. November machte Chamberlayne der Royal Society Mittheilung von Leibnizens erst erwähntem Briefe vom 25. August. Die Gesellschaft fühlte sich durch die in Aussicht gestellte Gegenveröffentlichung eines zweiten Commercium Epistolicum tief verletzt, weil darin eine Verdächtigung des Urtheils und der Vollständigkeit der von Gesellschaftswegen veröffentlichten und gebilligten Briefsammlung liege[3]. War denn, muss man sich bei dieser Parteinahme für das englische Commercium Epistolicum fragen, am 11. November keines von den Mitgliedern gegenwärtig, die am 20. Mai die Verantwortlichkeit für jene Schrift ausdrücklich abgelehnt hatten? Der Umschwung war vollständig.

---

[1] *Recueil Des Maizeaux*, Vorrede zum I. Bande pag. LIII und II, 123: *Elle ne prétendait point que la Raport de ses Commissaires passât pour une Décision de la Société.* [2] *Commerc. epistol.* pag. 236 Note 1 von Lefort. [3] Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. LXXV Note 165.

Das Stärkste, was gegen Leibniz als gestattet galt, sollte bald folgen. Im Januar 1715 brachte Nr. 342 der P. T. einen langen Bericht über das Commercium Epistolicum[1]). Zu den Beschuldigungen, welche theils offen theils versteckt, in jenem Buche enthalten waren, traten neue. Der zweite Newton'sche Brief vom 24. October 1676 habe zu Ende des gleichen Monats oder am Anfang November Leibniz in London vorgelegen[2]). Er sei ihm dann am Anfange des Frühlings in Hannover zu Händen gekommen.

Letztere Meinung kann ja, wiewohl irrig, auf dem wiederholt von uns angeführten Briefe von Collins beruhen, der am 5. März 1677 den Abgang des Newton'schen zweiten Briefes für die nächste Woche in Aussicht stellte, aber die erstere Behauptung, welche hier zum ersten Male auftaucht, ist wie grundlos auch ohne jede mögliche Stütze. Newton's Brief war an Oldenburg gerichtet. Dieser hat ihn am 4. November 1676 abgeschrieben[3]), am 2. Mai 1677 mit Begleitbrief an Leibniz geschickt[4]) (S. 178) und in diesem ausgesprochen, Leibniz werde wohl zur Zeit durch den ausführlichen Brief Newton's vollauf gesättigt sein, so dass er über Mittheilungen von Collins diesmal schweige[5]). Ausserdem ist grade durch den Brief von Collins an Newton vom 5. März 1677 bestätigt, dass Leibniz im October 1676 eine Woche in London war[6]). Hätte Oldenburg ihm, wenn er bei Eintreffen des Newton'schen Briefes noch in London gewesen wäre, denselben nicht eingehändigt?

An einer späteren Stelle des Berichtes[7]) wird erklärt, in der Klage, welche Leibniz gegen Keill wegen Verunglimpfung erhoben habe, könnten weder Newton noch Leibniz als Zeugen vernommen werden. Deshalb habe die Royal Society eine zahlreiche Commission zur Prüfung alter Briefe und Papiere eingesetzt, und deren Bericht, welcher dahin gehe, dass Newton 1669 oder früher, Leibniz aber nicht vor 1677 die Infinitesimalrechnung besessen habe, sofort veröffentlichen lassen.

Auch auf den Fehler in der Quadratura Curvarum wird ein entschuldigender Blick geworfen[8]), der Fehler verschwinde, wenn in den betreffenden Satz (S. 272 Anm. 2) das vergessene Wörtchen *ut* eingeschaltet werde. Das war wohl die Einschaltung, welche Nicolaus I. Bernoulli bei seinem Aufenthalte in England Newton angerathen

[1]) *Commerc. epistol.* pag. 9—48 findet sich die lateinische Uebersetzung des ursprünglich englischen *Account of the Book entitled Commercium epistolicum* [2]) Ebenda pag. 25. [3]) Leibniz I, 122 Note. [4]) Ebenda I, 151. [5]) Ebenda I, 152: *Nihil hac vice de Collino apud te commemoro, quum Te omnino satiatum iri pro tempore prolixa hac Newtoni epistola autumem.* [6]) *Commerc. epistol.* pag. 145. [7]) Ebenda pag. 32. [8]) Ebenda pag. 35—36.

hatte, und von welchem Johann Bernoulli (S. 304) vermuthete, Newton werde sich ihrer in einem Carton bedienen.

Fragen wir nun nach dem Verfasser des *Account* in den P. T., so erhalten wir die Antwort: Newton sei es gewesen! Das ist aus dem unbefangenen Zeugnisse englischer Zeitgenossen, welche davon als von einer allbekannten Thatsache reden, unzweifelhaft festgestellt[1]). Nur ein Einziger hat es gewagt, im Jahre 1722 den ein Jahr vorher verstorbenen Keill als den Verfasser des Account zu nennen, und dieser Einzige war Newton selbst[2]). Will man ihn nicht geradezu der Lüge beschuldigen, so giebt es nur eine Erklärung: Newton hat Keill jenen Bericht so gut als in die Feder dictirt, und das ist auch nicht viel schöner, als wenn er ihn selbst geschrieben hätte, er, der — mit dem Berichte zu reden — nicht einmal als Zeuge vernommen werden konnte.

Die Zeitfolge nöthigt uns, unsere Leser jetzt wieder nach Deutschland herüberzuführen. Wir sagten, Leibniz sei bis zum September 1714 in Wien geblieben. Er kehrte Ende dieses Monats nach Hannover zurück, von wo wenige Wochen früher der Kurfürst nach London abgereist war, um als König Georg I. den englischen Thron zu besteigen. Wir erinnern uns, dass Leibniz nun beabsichtigte, selbst nach England sich zu begeben, dass es ihm untersagt wurde (S. 31). Ob Chamberlayne, als er am 11. November 1714 von dem baldigen Eintreffen Leibnizens in London sprach[3]), die dem entgegenstehenden Hindernisse nicht kannte, oder ob Leibniz daran dachte, dem königlichen Verbote zu trotzen, wissen wir nicht. Jedenfalls hat Leibniz Hannover nicht mehr verlassen. Damals muss er, so weit andere Arbeiten, mit denen er nach wie vor überhäuft war, ihm Zeit liessen, daran gedacht haben, in entschiedener Weise seinen Widersachern entgegenzutreten. Damals fand vielleicht jene hässliche Veränderung der Jahreszahl 1675 in 1673 statt, von welcher wir (S. 176) sprechen mussten; damals entstand jedenfalls die Abhandlung *Historia et origo calculi differentialis*[4]), welche in zwei Entwürfen handschriftlich erhalten ist.

Die auch heute noch des Durchlesens in hohem Grade würdige Darstellung unterscheidet sich insbesondere dadurch auf das Vortheilhafteste von den im Prioritätsstreite entstandenen Schmähschriften, dass dem Gegner Ehrenrühriges überhaupt nicht nachgesagt ist.

---

[1]) De Morgan in dem *Philosophical Magazine*, Januar—Juni 1852 pag. 440—444 und ebenda Juli—December 1852 pag. 321—322. [2]) *Commerc. epistol.* pag. X. [3]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. LXXV Note 165. [4]) Leibniz V, 392—410, zuerst 1846 durch C. J. Gerhardt als besondere Broschüre herausgegeben.

Auch die leiseste Andeutung, dass Newton an Leibniz einen geistigen Diebstahl begangen haben könne, deren, wie wir wissen, Leibniz sich nicht immer enthielt, fehlt. Nur seine eigene Unantastbarkeit stellt der Verfasser mit Entschiedenheit fest. Den Bericht in den P. T. vom Januar 1715 kannte er offenbar noch nicht, sonst wäre die eingehaltene Mässigung unbegreiflich, und sonst wäre gewiss darauf Gewicht gelegt worden, dass die Antwort auf den zweiten Newtonschen Brief am Empfangstage geschrieben wurde. Ist das Schweigen über diesen Punkt doch ohnehin räthselhaft genug. Leibniz hat (S. 276) sein Concept des wichtigen Briefes offenbar damals hervorgeholt. Er hat das Datum vom 21. Juni 1677 nachgetragen, hat die Seitennummer des Abdruckes des Briefes im Commercium Epistolicum beigeschrieben, und dennoch schwieg er in seiner Erzählung über das in der englischen Veröffentlichung fehlende *hodie*? Wir wissen dafür keine andere Erklärung als die, dass Leibniz den abgedruckten Brief eben nicht Wort für Wort mit seinem Entwurfe verglich und so die kleine, aber verhängnissvolle Lücke nicht bemerkte. Ist es doch zahllosen Lesern der beiden heute im Drucke vorliegenden Lesarten genau ebenso ergangen.

Abermals traten zwei neue Persönlichkeiten in dem Streite auf. Antonio Schinella Conti[1]) (1677—1748) ist in Padua geboren und ebenda gestorben. Er gehörte dem Orden des Oratorium als Geistlicher an, legte aber dieses Amt 1708 nieder, um nicht mehr Beichte hören zu müssen. Im Jahre 1713 kam er nach Paris, wo er mit den bekanntesten Gelehrten verkehrte. Mit einem derselben, Pierre Rémond, bekannter unter dem Namen De Montmort, welchen er von einer Besitzung entliehen hatte, und unter welchem er uns schon (S. 255) begegnet ist, kam er 1715 nach London und wurde von Newton auf's Liebenswürdigste aufgenommen. Mit Leibniz war Conti schon früher in brieflicher Verbindung. Von London aus muss er ihm abermals geschrieben und dabei, wie es kaum anders möglich war, den Prioritätsstreit berührt haben. Leibniz erwiderte[2]) und fügte dem eigentlichen Briefe eine selbst einem Briefe gleichkommende Nachschrift hinzu[3]), welche offenbar zum Vorzeigen geschrieben war und, wie es scheint, nicht bloss Newton, für welchen sie bestimmt war, sondern auch anderen Personen, vielleicht dem Könige zu Gesicht kam. Jedenfalls erklärte Conti in seinem folgenden Briefe vom März 1716, König Georg I. habe sich durch ihn über den Streit zwischen Leibniz und Newton berichten lassen[4]), und der König

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* IX, 670—672. — Poggendorff I, 473.
[2]) *Recueil Des Maizeaux*, Vorrede zu Bd. I pag. LVII und II, 337—340. [3]) Ebenda II, 3—11. [4]) Ebenda II, 14.

war es auch, der durch die Frage, wann denn Newton's Antwort käme, letztere hervorrief[1]).

In Leibnizens Schreiben waren einige bissige Bemerkungen enthalten gewesen. Es scheint nicht, sagte er[2]), dass Herr Newton die Bezeichnung und den Infinitesimalcalcül vor mir besessen hat, wie Herr Bernoulli sehr gut geurtheilt hat, wenn es ihm auch leicht gewesen wäre, dahin zu gelangen, wenn seine Blicke sich dahin gerichtet hätten[3]), wie es auch Apollonius sehr leicht gewesen wäre zu Descartes' analytischer Methode zu gelangen, wenn seine Blicke sich dahin gerichtet hätten. Die gegen mich geschrieben haben, fuhr er fort, haben unschwerer Weise durch gezwungene und schlecht begründete Erklärungen meine Aufrichtigkeit angegriffen: sie werden nicht das Vergnügen haben, mich die kleinen Gründe von Leuten, welche so schlechte Uebungen haben, beantworten zu sehen. Zum Schlusse ging er auf Gegensätze zwischen seinen und Newton's philosophischen Ansichten ein, ein Gebiet, auf welches wir ihm nicht folgen.

Nun kam also Newton's Antwort[4]), welche ebensowenig an Leibniz unmittelbar gerichtet war, wie dessen Brief an ihn; beide schrieben der Form nach an den Abbate Conti. Newton beginnt mit der Behauptung, das Commercium Epistolicum sei durch einen eigens von der Royal Society dazu ernannten Ausschuss von angesehenen Persönlichkeiten verschiedener Nationen zusammengestellt. Dem Wortlaute nach ist das ja wahr, wenn auch Bonet und der zuletzt hinzugewählte De Moivre gewiss keine grosse Rolle in dem Prüfungsausschusse spielten (S. 296). Dann belegt Newton durch die Daten von Briefen, wie weit er frühzeitig in der Reihenlehre gewesen sei, und dass Leibniz solches immer anerkannt habe. Wo von Leibnizens Brief vom 21. Juni 1677 die Rede ist[5]), der als Antwort auf den Brief vom 24. October 1676 bezeichnet ist (Des Maizeaux betonte dann in der Vorrede[6]) zu seinem Recueil die Länge der Zeit von acht Monaten, die zwischen dem 24. October 1676 und dem 21. Juni 1677 liege), heisst es, Herr Leibniz habe sein Einverständniss damit erklärt, dass De Sluse's Tangentenmethode noch nicht vollkommen sei, dann habe er seine Differentialmethode für die Tangenten beschrieben, welche die gleiche war, die 1670 durch Barrow veröffentlicht worden war. Weil aber Herr Leibniz auf diese Methode als ihm eigenthümlich Anspruch erhob, verkleidete er sie durch eine neue Bezeichnung[7]). Das war eine Wiederholung der alten Anklage der Entlehnung, die herüber

[1] *Recueil Des Maizeaux*, Vorrede zu Bd. I pag. LX. [2]) Ebenda II, 4. [3] *s'il s'en était avisé.* [4] Ebenda II, 16—25. [5]) Ebenda II, 22. [6] Ebenda Vorrede zu Bd. I pag. XIV. [7]) *Mais comme il prétendait que cette Méthode lui appartenait, il la déguisa sous une Notation nouvelle.*

und hinüber geschleudert wurde von Fatio und Leibniz, von Keill und Johann Bernoulli, jetzt wieder von Leibniz und Newton, aber neu dadurch, dass Leibniz nicht mehr von Newton, sondern von Barrow die Auflösung der Tangentenaufgabe sich angeeignet haben sollte. Es ist merkwürdig genug und ein Beleg dafür, wie blind die Leidenschaft den Menschen macht, dass Newton das Zweischneidige dieses Vorwurfes nicht erkannte, dass es aber auch Leibniz nicht anders damit erging. Wenn Leibnizens Tangentenmethode die gleiche war wie die Barrow's, wenn sie zugleich mit der Newton's überein stimmte, so war auch kein Unterschied zwischen den Methoden Newton's und Barrow's, und Ersterer war der anerkannte Schüler des Letzteren!

Schon am 14. April 1716 schrieb Leibniz an Conti[1]), er habe eine Abschrift von dessen Briefe vom Monate März und von dem Newton's, sowie auch seine Antwort auf beide an Herrn De Montmort in Paris zur Weiterbeförderung abgehen lassen; er ziehe diesen Weg vor, um neutrale und verständnissfähige Zeugen des Streites zu haben. Der Brief Leibnizens, welcher über Paris ging, und Newton's Bemerkungen zu demselben stehen im Recueil Des Maizeaux[2]). Leibnizens Brief ist im Frühjahr 1716 selbstverständlich von De Montmort und den Personen in Paris, welchen dieser ihn zeigte, gelesen worden, Newton's Bemerkungen aber gingen damals nur unter wenigen Londoner Freunden herum.

Da starb Leibniz am 14. November 1716. Sofort sammelte Newton alles, was durch die Vermittelung Conti's hindurchgegangen war mit Einschluss seiner letzten Bemerkungen und liess es in London drucken[3]). Diese kleine Sammlung bildete alsdann einen Anhang zu einer mit dem Druckjahre 1715 in englischer Sprache und gleichzeitig in lateinischer Uebersetzung in London herausgegebenen Parteischrift: *The history of fluxions* von Joseph Raphson, der auf dem Titelblatte schon als verstorben[4]) bezeichnet wird. Wir haben ihn als Schriftsteller über numerische Gleichungen (S. 114) kennen gelernt. Besonders Erwähnenswerthes steht nicht in den von uns kurz genannten Schriftstücken. Höchstens wäre zu bemerken, dass Newton als seine ältesten mit Datum versehenen Aufzeichnungen über Fluxionen solche vom 13. November 1665 nennt[5]). Das stimmt so ziemlich mit anderen Angaben (S. 192 Anm. 1) überein.

Wir erinnern uns, dass (S. 302) im Flugblatte von 1713 eine Briefstelle Johann Bernoulli's eingeschaltet war, welche einen durch

[1] *Recueil Des Maizeaux* II, 26. [2]) Ebenda II, 48—71 und 75—100.
[3] Ebenda, Vorrede zu Bd. I pag. LXIII. [4] *By (the late) Mr. Joseph Raphson.*
[5] *Recueil Des Maizeaux* II, 89

einen hervorragenden Mathematiker, *ab eminente quodam Mathematico*, bemerkten Fehler in Newton's Principien und Quadratura Curvarum rügte. Wir erinnern uns ferner, dass Newton in einem Briefe an Keill (S. 304 Anm. 6) diesen grossen Mathematiker, *this great Mathematician*, etwas höhnisch abfertigte. Keill in dem Journal litéraire von 1714 und der Account in den P. T. von 1715 wiederholten Newton's Vertheidigung auch bezüglich der Quadratura Curvarum mittelst des vergessenen Wörtchen *ut* (S. 307). Gegen Ende der Zeit, innerhalb welcher die Conti'sche Vermittelung, wenn man sie so nennen darf, spielte, erschien in dem Julihefte 1716 der A. E. ein unterschriftsloser Brief für den ausgezeichneten Mathematiker, Herrn Johann Bernoulli, gegen einen gewissen englischen Widersacher[1]), welcher gegen Keill sich richtete und insbesondere nachzuweisen suchte, dass das einmal beim Drucke versehentlich weggebliebene *ut* die angefochtene Stelle nicht rette, dass jenes Wort vielmehr verschiedenemal ausgefallen sein müsste, was die Wahrscheinlichkeit eines Druckfehlers bedeutend herabsetze. Der Briefschreiber trat also gegen Keill, zugleich gegen Newton auf und damit auf Leibnizens Seite. Dadurch wurde die Frage nach seiner Persönlichkeit wach.

Wollte man die schon oft besprochenen handschriftlichen Randbemerkungen der A. E. einzig zu Rathe ziehen, so wäre die Frage sofort entschieden, denn dort ist Christian Wolf als Verfasser des Briefes genannt. Zedler's Universallexicon bestätigt diese Meinung. In dem 1748 zu Wolf's Lebzeiten erschienenen LVIII. Bande des umfangreichen Sammelwerkes befindet sich ein langer diesem Gelehrten gewidmeter Artikel mit vollständigem, ohne seine eigene Mithilfe undenkbarem Verzeichnisse aller seiner grösseren und kleineren Arbeiten bis zu den unbedeutendsten Berichten in den A. E. In dem Verzeichnisse ist der Brief von 1716 nicht nur mit enthalten, in dem biographischen Abschnitte ist Wolf auch für das damals bewährte Eintreten für Leibniz belobt. Und dennoch ist nicht Wolf, sondern Johann Bernoulli der ungenannte Verfasser, der seine Arbeit dem befreundeten Gelehrten zur Besorgung mit der Bitte überschickt hatte, etwa nöthige Aenderungen nach Gutdünken vorzunehmen.

Da war z. B. überall die erste Person, in der Johann Bernoulli schrieb, so oft von Arbeiten desselben die Rede war, in die dritte Person umzuändern, und das besorgte Wolf auf's Pünktlichste bis auf

---

[1]) A. E. 1716, 296—314: *Epistola pro eminente Mathematico, Dn. Johanne Bernoullio, contra quendam ex Anglia antagonistam scripta.* Das Material und die Belegstellen über diesen Brief sind bei Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 178 Note * gesammelt.

eine Stelle[1], wo er das Wörtchen *meam* stehen liess, welches von den Gegnern jubelnd aufgegriffen wurde, während auch die Freunde sich eines mitleidigen Lächelns nicht enthalten konnten. Johann Bernoulli schrieb zwar an Wolf, er möge baldigst als Druckfehler berichtigen lassen, statt *meam* sei *eam* zu lesen. Aber das fruchtete wenig. In den A. E. von 1718 hat Niclaus II. Bernoulli, der Sohn Johann's, in gewundener Weise zugegeben, sein Vater habe die thatsächlichen Grundlagen des Briefes von 1716 niedergeschrieben, und ein Enkel Johann's hat den vollgültigen Beweis erbracht.

Johann Bernoulli hatte ausser den beiden Söhnen Niclaus II. und Daniel noch einen dritten Sohn Johann II. Bernoulli[2] (1710—1790), dessen mehr der Physik zugewandte Thätigkeit uns von der Pflicht entband ihn zu nennen, als wir (S. 85—86) die Glieder der Familie Bernoulli, welche diesem Bande angehören müssen, schilderten. Johann II. hatte wieder einen Sohn Johann III. Bernoulli[3] (1744—1807), und dieser hat in den damals in französischer Sprache erscheinenden Abhandlungen der Berliner Akademie für 1799—1800 und für 1802 in der als *Histoire de l'Académie* bezeichneten ersten Abtheilung auf S. 32—50 in dem ersten, auf S. 51—65 in dem zweiten der beiden genannten Bände Beiträge zur Geschichte der Mathematik veröffentlicht[4]. Er hat insbesondere die Geschichte des Briefes von 1716 klargestellt. Er hat sogar den ursprünglichen von Johann Bernoulli an Wolf geschickten Brief neben dem in den A. E. erschienenen zum Abdrucke gebracht, wodurch man in den Stand gesetzt ist, die von Wolf vorgenommenen unbedeutenden Aenderungen zu erkennen. Bernoulli wollte eben nur den Brief nicht geschrieben haben. Er scheue es, sagte er[5], mit Keill's Galle eingerieben zu werden. Wie Wolf dazu kam, auch 1748 noch die Verantwortung für den Brief zu übernehmen und sich für dessen Anfertigung beloben zu lassen, wissen wir nicht.

Leibniz war todt. Seine englischen Gegner führten den Streit gegen ihn weiter, führten ihn nur um so heftiger weiter, als eine Erwiderung von ihm jetzt nicht mehr zu befürchten war. Der Recueil Des Maizeaux mit seiner sich unparteiisch geberdenden, thatsächlich durchaus im Newton'schen Sinne gehaltenen Vorrede erschien 1720.

---

[1] A. E. 1716, 313. [2] Allgemeine Deutsche Biographie II, 480—482. [3] Ebenda II, 482. [4] Bei Poggendorff I, 162 fehlen diese Abhandlungen unter Johann III. Bernoulli. Dagegen sind I, 158 unter den Schriften Johann I. Bernoulli irrthümlicher Weise *Anecdotes pour servir à l'hist. des mathematiques* (Mém. Berlin, A. 1699 et 1700 genannt. Das sind die hier erwähnten Abhandlungen. Irrige Datierung hat den Grossvater mit dem Enkel verwechseln lassen. [5] *Ingratum mihi valde foret a Keilio bile sua perfricari.*

Die dritte Ausgabe der Principien von 1726 veränderte das in den früheren Ausgaben Leibniz sein Recht gewährende Scholium zu dessen Ungunsten (S. 198). Das gerechten Tadel am stärksten herausfordernde Schriftstück war die Neuauflage des Commercium Epistolicum vom Jahre 1722.

Wenn damals die erste Auflage vergriffen war, wenn die buchhändlerische Nachfrage nach der Briefsammlung eher im Zunehmen als im Abnehmen sich zeigte, so war es eine einfache Geschäftssache, ob ein wiederholter Abdruck stattfinden solle. Frage des wissenschaftlichen Feingefühls war es dann, ob am Schlusse, etwa unter der Bezeichnung als Anhang, noch weitere Schriftstücke beigefügt werden sollten. Aber eine Veränderung des Commercium Epistolicum selbst, Zusätze innerhalb des 1712 Gedruckten, ohne dass sie als solche gekennzeichnet wurden, das waren ebensoviele Fälschungen, welche auf den, der sie beging, einen nicht zu tilgenden Makel werfen. Die neue Auflage von 1722 beginnt mit einer Ansprache an den Leser, *Ad Lectorem*, welche darstellt, wie Leibniz immer andere Ausflüchte gesucht habe, wenn es sich darum handelte, die in dem Commercium Epistolicum vereinigten Beweisstücke anzuerkennen oder zu widerlegen. Er sei aus dem Leben gegangen mit dem Versprechen einer Gegensammlung, aber sein Benehmen in dem durch Conti vermittelten Briefwechsel zeige, dass das leere Worte waren, dass Leibniz vielmehr nichts besass, was er in jenem Sinne verwerthen konnte. Die erste Auflage des Commercium Epistolicum sei nur sehr klein gewesen, man habe Exemplare nur an urtheilsfähige Mathematiker geschickt, und käuflich seien jetzt keine vorhanden[1]). Deshalb sei es wünschenswerth gewesen, eine zweite Auflage zu drucken, welcher man auch einen Bericht über das Buch, *Recensionem Libri*, vorausschicke, der in den P. T. für 1715 erschienen sei, etwa 7 oder 8 Monate vor Leibnizens Tod. Die *Recensio* ist folglich dasjenige Schriftstück, dessen englischen Wortlaut wir seither *Account* nannten. Die Vorrede *Ad Lectorem* rührt von Newton her. Unter dessen Nachlasse haben sich fünf oder sechs Entwürfe jener Vorrede von der Hand des damals 79 Jahre alten Verfassers gefunden[2]). Ausserdem fanden sich dort Bruchstücke der *Recensio*, welche die Abfassung auch dieser Schrift durch Newton (S. 308) bestätigen. Man wird deshalb wohl oder übel Newton für den ganzen Wortlaut der neuen Auflage mit sammt ihren Fälschungen gleichkommenden Aenderungen des Textes verantwortlich zu machen haben. Letztere sind genau untersucht worden[3]).

[1]) *neque prostant venalia.* [2]) *Commerc. epistol.* pag. X. [3]) De Morgan,

Als auffallendstes Beispiel heben wir folgendes hervor. Im Commercium Epistolicum von 1712 war stillschweigend angenommen, die *Historiola* sei wirklich an Leibniz abgegangen (S. 299). Die neue Auflage sagt ausdrücklich, die Uebersendung habe am 26. Juni 1676 stattgefunden[1]), und durch eine solche Datierung, die mit voller Bestimmtheit ausgesprochen ist, wird selbstverständlich die Thatsache unbestreitbar. Ein kleiner Umstand ist freilich dabei unerlässlich: die Richtigkeit des Datums. Nun hat aber Oldenburg am 26. Juni 1676 überhaupt nicht an Leibniz geschrieben. Spitzfindigkeit, kann man sagen. Man kennt einen Brief Oldenburg's an Leibniz vom 26. Juli 1676 und daraus konnte leicht durch einen Lesefehler, einen Schreibfehler, einen Druckfehler jenes irrige Datum entstehen. Gut, aber was stand in dem Briefe vom 26. Juli? Demselben lag die Abschrift von Newton's erstem Briefe vom 13. Juni 1676 bei, und Oldenburg theilte Leibniz (S. 75) Reihen des verstorbenen Gregory mit, die Collins gesammelt habe. Folglich ist am 26. Juli 1676 die Historiola nicht an Leibniz abgegangen. Von Newton's Tangentenbriefe steht aber in Oldenburg's Schreiben (S. 173) sonst nichts, als was Newton behaupte, leisten zu können. Das Beispiel, das im Tangentenbriefe ausgerechnet enthalten war, schickte Oldenburg nicht, wenn wir auch wiederholen müssen, dass Leibniz nichts für ihn Neues aus demselben entnommen haben würde. Doch darauf kommt es uns hier nicht an, sondern auf die Art, in welcher die zweite Auflage des Commercium Epistolicum mit der Wahrheit umsprang. Man hatte auf irgend eine Weise Kenntniss davon erhalten, dass am 26. Juli 1676 ein Brief Oldenburg's an Leibniz abgegangen war. Man wünschte nachzuweisen, dass Leibniz damals im Besitze der Historiola war. Man behauptete kurzweg, dieselbe habe jenem Briefe beigelegen, eine kühne Behauptung, wenn Oldenburg's Briefentwurf nicht erhalten war, eine freche Lüge, wenn solches der Fall gewesen sein sollte.

Eine eigentliche Fortsetzung hat der Prioritätsstreit nicht weiter gehabt. Entgegnungen von Freunden Leibnizens blieben mehr und mehr aus. Die Auffassung der Herausgeber des Commercium Epistolicum, Leibniz habe einen Eingriff in fremdes Geisteseigenthum begangen, wurde im achtzehnten Jahrhunderte mehr und mehr die herrschende. Dem neunzehnten Jahrhunderte war es vorbehalten, Leibniz von diesem hässlichsten Vorwurfe zu reinigen. Es ist heute anerkannt, dass schon im siebzehnten Jahrhunderte die Infinitesimal-

On the additions made to the second edition of the Commercium Epistolicum. Philosophical Magazine. January — June 1848 pag 446—456.

[1]) *Haec Collectio ad D. Leibnitium missa fuit 26 Junii 1676.*

rechnung so weit vorbereitet war, dass ihr hauptsächlich eine einheitliche Sprache und eine Schrift fehlte. Beides hat Leibniz ihr selbständig gegeben, so wenig es ihm einfiel in Abrede zu stellen, dass er auf den Schultern von Vorgängern stand, dass diese sich ausgiebig und erfolgreich mit Infinitesimalaufgaben beschäftigt hatten. Dass Newton nicht minder selbständig Aehnliches besass, früher besass als Leibniz, wird ebensowenig geleugnet werden, aber sein Wort Fluxion kam erstmalig 1687 in den Principien, seine Bezeichnung, in der er lange schwankte, erstmalig 1693 durch Wallis an die Oeffentlichkeit, während Leibnizens Abhandlung von 1684 schon als Markstein in der Geschichte der Mathematik vorhanden war. Wir nennen sie einen Markstein, weil sie, das hat schon unser XVI. Abschnitt reichlich bewiesen, den Ausgangspunkt bildete, von wo aus neue Wettbewerber in die Rennbahn traten vorwärts zu eilen nach entfernten Zielpunkten. Das Ende der Bahn ist in den mehr als zweihundert Jahren, die inzwischen verflossen sind, weiter und immer weiter hinausgeschoben worden, aber Leibnizens Abhandlung von 1684 bildet nach wie vor den Sammelpunkt, an welchem Jeder vorbei muss, der sich am Rennen betheiligen will, Leibnizens Sprache, Leibnizens Schrift sind die unerlässlichen Eintrittskarten, ohne welche Niemand zugelassen werden kann. Und Leibniz ahnte diese grosse Zukunft. Er hat frühzeitig die Bedeutung der mathematischen Form erkannt, die seine Gegner nicht sahen, oder nicht sehen wollten. Auch über den Prioritätsstreit als solchen haben die Ansichten sich geklärt, leider dahin geklärt, dass seine gründliche Durchforschung allen Betheiligten ohne irgend eine Ausnahme zum Nachtheile gereicht.

96. Kapitel.

Combinatorische Analysis. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wenn wir nunmehr Arbeiten, welche dem Gebiete der Combinatorik und ihren Anwendungen angehören, uns zuwenden wollen, so haben wir zuerst über einen Aufsatz zu berichten, von welchem es zweifelhaft erscheint, ob er nicht schon vor 1700 niedergeschrieben wurde, also streng genommen schon im 84. Kapitel hätte zur Sprache kommen müssen. Es ist der Aufsatz *Nova Algebrae promotio*[1]) von Leibniz, den wir meinen. Er ist erst unter dem Leibnizischen Nachlasse in Hannover aufgefunden worden, mithin zu der Zeit, in welcher er einen Einfluss hätte üben können, vollständig unbekannt gewesen.

---

[1]) Leibniz VII, 154—189.

Eine nahe verwandte, im Jahre 1700 vor der Oeffentlichkeit behandelte Aufgabe giebt uns die Veranlassung, die Leibnizische Abhandlung grade hier zur Rede zu bringen. Bei ungedruckten Arbeiten ist es ohnedies immer recht schwierig, den Zeitpunkt ihres Entstehens zu errathen, wenn nicht zufällig ein Datum beigefügt ist, ausserdem meistens ziemlich gleichgiltig, wo man sie geschichtlich einreiht, es sei denn, dass man aus ihnen für den Verfasser ein geistiges Erstlingsrecht, oder mindestens die Unabhängigkeit seines Gedankenganges sichern will. Die neue Erweiterung der Algebra trägt kein Datum. Innere Gründe lassen vermuthen, der Aufsatz sei nach 1695, vielleicht nach 1697 niedergeschrieben. Analytisches Rechnen mit Grössen, sagt Leibniz, sei nichts anderes als Combinatorik[1]), und deshalb komme viel auf eine zweckmässige Bezeichnung an, welche die combinatorischen Entwickelungen unterstütze. Leibniz empfiehlt dazu die ihm seit 1693 geläufigen zweizifferig geschriebenen Coefficienten (S. 106). Mit ihrer Hilfe vollzieht er die Multiplication von Reihen von der Gestalt

$$10 + 11\nu + 12\nu^2 + \cdots,\quad 20 + 21\nu + 22\nu^2 + \cdots,$$
$$30 + 31\nu + 32\nu^2 + \cdots \text{ u. s. w.},$$

wo die erste Ziffer jedes Coefficienten angiebt, welcher Reihe er angehört, die zweite Ziffer, welcher Potenz von ν er als Coefficient dient. Im Producte besteht der Coefficient jedes Gliedes aus einer Summe, deren einzelne Glieder selbst wieder Producte je eines Coefficienten aus jeder Reihe sind, deren Auswahl nach dem Gesetze stattfindet, dass die zweiten Coefficientenziffern der Factoren die gleiche Summe liefern, nämlich den Exponenten derjenigen Potenz von ν, mit der man es gerade zu thun hat. Es kommt also auf die Zerfällung dieses Exponenten in Theile an, wofür Leibniz den Kunstausdruck *divulsiones* gebraucht[2]). Leibniz kennt also hier diejenigen Bildungen, welche man später Variationen zu bestimmten Summen genannt hat. Er bezeichnet das auftretende Gesetz als Homogeneität, welche formal und virtual auftrete[3]), formal insofern jedes Glied gleich viele Factoren besitze, virtual indem diese zu gleichem Grade sich erheben.

Wie die Multiplication von Reihen vollzieht Leibniz auch deren Division. Bei ihr ordnet er nur Dividend, Divisor und Quotient nicht nach steigenden, sondern nach fallenden Potenzen der allgemeinen Grösse. Er vervielfacht sodann Divisor und Quotient, deren Product

[1]) Leibniz VII, 159: *Reperietur nihil aliud esse Calculum circa magnitudines Analyticum, quam exercitium artis Combinatoriae.* [2]) Ebenda VII, 165. [3]) Ebenda VII, 168: *lex homogeneorum tum formalis ...., tum virtualis.*

mit dem Dividenden in Uebereinstimmung gebracht, die Coefficienten des Quotienten der Reihe nach ermitteln lässt.

Leibniz geht weiter zur Potenzirung, zum polynomischen Lehrsatze über[1]. Darüber schrieb aber Leibniz 1695 an Johann Bernoulli (S. 83), der Aufsatz gehört also frühestens eben diesem Jahre an.

Im weiteren Verlaufe kommt eine Benennung vor, welche in ähnlichem, wenn auch nicht vollständig übereinstimmendem Sinne sich später Bürgerrecht erworben hat, die Benennung Form. Leibniz versteht darunter die Summe gleichgebildeter Ausdrücke[2] und bezeichnet sie durch ein einzelnes Glied, unter welchem zwei Pünktchen stehen. So bedeutet ihm

$$\underset{\cdot\cdot}{a} = a + b + c + \cdots,\quad \underset{\cdot\cdot}{a^2} = a^2 + b^2 + c^2 + \cdots,$$
$$\underset{\cdot\cdot}{ab} = ab + ac + bc + \cdots \text{ u. s. w.}$$

Mit Hilfe dieser Formen lässt der polynomische Lehrsatz sich viel kürzer schreiben. Beispielsweise ist[3]):

$$(a + b + c + d)^4 = \underset{\cdot\cdot}{a^4} + 4\underset{\cdot\cdot}{a^3b} + 6\underset{\cdot\cdot}{a^2b^2} + 12\underset{\cdot\cdot}{a^2bc} + 24\underset{\cdot\cdot}{abcd}.$$

Die dabei auftretenden Zahlencoefficienten: 4, 6, 12, 24, die man uns gestatten möge Polynomialcoefficienten zu nennen, sind die Permutationszahlen so vieler Elemente, als die Potenz, auf welche das Polynomium erhoben werden soll, aussagt, unter der Annahme, dass je so viele Elemente unter einander gleich seien, als aus den Exponenten des die Form vertretenden Gliedes zu ersehen ist. Während Leibniz, wie wir uns erinnern (S. 42), im Jahre 1691 über diese Permutationszahlen noch im Unklaren war, hatte er inzwischen ihre richtige Auffindung erkannt.

Wieder zwei Seiten später ist von dem sogenannten Exponentialcalcül[4] die Rede. Der Aufsatz von Johann Bernoulli, in welchem diese Benennung veröffentlicht wurde, kam aber 1697 heraus (S. 223), und daher unsere Vermuthung von der späteren Entstehung der *Nova Algebrae promotio*. Auf den Exponentialcalcül kommt Leibniz durch einen so merkwürdigen Gedankengang zu reden, dass wir darauf näher eingehen müssen. Die von uns Polynomialcoefficienten genannten Zahlen sind ganze Zahlen. Sie können, sagt Leibniz[5]), gegen den Exponenten der Potenz, auf welche das Polynom erhoben werden soll, nicht theilerfremd sein und müssen, wenn jener Exponent eine

[1]) Leibniz VII, 174: *Cum olim considerarem, binomii a + b potestates jam haberi per numeros combinatorios, cogitari, quomodo res ad trinomia, quadrinomia etc., denique generaliter ad polynomia quaecunque produci posset.*
[2]) Ebenda VII, 178: *Formam voco hoc loco summam omnium membrorum ex aliquot literis similiter formatorum.* [3]) Ebenda VII, 179. [4]) Ebenda VII, 181: *Calculus quem exponentialem appellare.* [5]) Ebenda VII, 180.

Primzahl ist, durch ihn selbst theilbar sein. Einen Beweis seiner Behauptung fügt Leibniz nicht bei, allein dass

$$\frac{1\,.\,2\,..\,e}{1\,.\,2\,..\,f_1\,.\,1\,.\,2\,..\,f_2\,...\,1\,.\,2\,..\,f_k}, \quad \text{wenn } e > f_1 + f_2 + \cdots + f_k,$$

durch e, sofern es Primzahl ist, theilbar sein muss, weil e in keinem der den Nenner bildenden Theilproducte vorkommt, ist klar. Der andere Theil des Beweises, dass die Theilbarkeit durch e aufhören kann, falls e keine Primzahl ist, müsste allerdings geliefert werden. Vielleicht entnahm Leibniz die Thatsache dem Zahlenbeispiele $e = 4$. Dort kam neben den immer noch durch 4 theilbaren Polynomialcoefficienten 4, 12, 24 auch der Polynomialcoefficient 6 vor, der zwar durch 4 nicht theilbar, aber doch zu 4 nicht theilerfremd war. Nun werde $a + b + c + \cdots = x$ gesetzt. Die Grösse x^e besteht unter Anwendung des Zeichens für die Formen aus $\underset{\cdot\cdot}{a^e}$ und zahlreichen anderen Gliedern, von denen ein jedes einen Polynomialcoefficient als Factor enthält, und $x^e - \underset{\cdot\cdot}{a^e}$ besteht nur aus mit Polynomialcoefficienten behafteten Gliedern, deren jedes einzelne, sofern e eine Primzahl ist, durch e theilbar erscheint. Das Gleiche gilt für die Summe der Glieder, d. h. $\underset{\cdot}{x^e} \quad \underset{\cdot\cdot}{a^e}$ ist nicht theilerfremd gegen e und, bei e als Primzahl, durch e theilbar. Wählt man $a = b = c = \cdots = 1$, so ist $a^e = 1$, $\underset{\cdot\cdot}{a^e} = x$, und $x^e - x$ besitzt immer mit e einen Gemeintheiler, ist, sofern e Primzahl ist, durch e theilbar. Dieser zahlentheoretische Satz ist kein anderer als der bekannte Fermat'sche Lehrsatz mit dem ersten bekannt gewordenen Beweise[1]. Leibniz scheint, als er die Nova Algebrae promotio niederschrieb, nichts davon gewusst zu haben, dass Fermat ihm den Satz vorweggenommen hatte (Bd. II, S. 708), wenigstens thut er sich auf denselben zu gut, als auf einen Satz, der etwas enthalte, was den Analytikern bisher unbekannt gewesen sei, eine allgemeine Primzahlenformel[2].

Wir bezogen uns (S. 317) auf eine verwandte Veröffentlichung Leibnizens aus dem Jahre 1700. Wir meinten den Aufsatz in den A. E., der gegen Fatio's Angriffe gerichtet war. Wir haben (S. 279) über diese Abwehr berichtet. Aber Leibniz wollte nicht ausschliesslich Persönliches dem Drucke übergeben, er fügte einen Satz bei[3], welcher die Erweiterung eines De Moivre'schen Satzes sei. De Moivre hatte (S. 83) im XX. Bande der P. T. die Aufgabe gelöst, die Coefficienten $A, B, C \ldots$ der Entwicklung $z = Ay + By^2 + Cy^3 + \cdots$

[1] G. Vacca, *Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat* in der *Bibliotheca mathematica* 1894 pag 46-48. [2] Leibniz VII 180: *Hinc tandem duci potest aliquid hactenus Analyticis incognitum, aequatio nempe generalis pro Numero primitivo.* [3] Ebenda V. 348-349

zu finden, wenn als Ausgangspunkt der Untersuchung die Gleichung gegeben war:

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \cdots = gy + hy^2 + iy^3 + ky^4 + \cdots.$$

Leibniz nahm zum Ausgangspunkt die viel allgemeinere Gleichung

$$0 = (01y + 02y^2 + 03y^3 + \cdots) + (-10 + 11y + 12y^2 + 13y^3 + \cdots)z^1$$
$$+ (20 + 21y + 22y^2 + 23y^3 + \cdots)z^2 + \cdots,$$

welche durch das Verschwinden aller von 01, 02, 03, ... 10, 20 ... verschiedenen Coefficienten in die De Moivre'sche Anfangsgleichung übergeht. Das gesuchte Ergebniss schrieb Leibniz, indem er dabei dreiziffrige Coefficienten benutzte,

$$z = 101y + 102y^2 + 103y^3 + 104y^4 + 105y^5 + \cdots.$$

Selbstverständlich sind die zwei- und dreiziffrig geschriebenen Coefficienten nur symbolisch zu lesen, ohne aus ihrem Aussehen irgend einen Rückschluss auf ihren Zahlenwerth zu gestatten. Setzt man den angenommenen Werth von z in die den Ausgangspunkt bildende Gleichung ein und ordnet die so entstehenden Glieder nach y, wobei auftretende wirkliche Zahlen, z. B. die Zahl zwei eingeklammert als (2) erscheinen, um sie von den nur symbolischen Zahlen zu unterscheiden, so erhält man:

$$0 = [01 - 10.101]y + [02 + 11.101 + 20.101^2 - 10.102]y^2$$
$$+ [03 + 11.102 + 12.101 + (2)20.101.102 + 21.101^2$$
$$+ 30.101^3 - 10.103]y^3 + \cdots.$$

Zur Erfüllung dieser Gleichung werden die mit y, mit y^2, mit y^3... vervielfachten Ausdrücke gleich Null gesetzt, und so gelangt man zu den von Leibniz ohne Erörterung der Ableitungsart gegebenen Formeln, welche 101, 102, 103, 104 als Ergebnisse der Division mit 10 in 01, in $02 + 11.101 + 20.101^2$, in

$$03 + 11.102 + 12.101 + (2)20.101.102 + 21.101^2 + 30.101^3,$$

in $$04 + 11.103 + 12.102 + 13.101 + 20.102^2 + (2)20.101.103$$
$$+ (2)21.101.102 + 22.101^2 + (3)30.101^2.102 + 31.101^3$$
$$+ 40.101^4$$

liefern. Leibniz nennt in der Anweisung zur Bildung dieser und der folgenden Coefficienten die zweiziffrig geschriebenen Symbole Minuskeln, die dreiziffrig geschriebenen Majuskeln, die eingeklammerten Zahlen wahre Zahlen. Letztere sind immer die Permutationszahlen der in den betreffenden Gliedern vorkommenden Majuskeln, jede als ein Element betrachtet, welches in der gebildeten Permutation ein- oder mehreremal vorkommen kann. So entsteht also (1) bei 102^2, (2) bei 101.103, (3) bei $101^2.102$ u. s. w., wovon das am häufigsten

auftretende (1) selbstverständlich nicht geschrieben zu werden braucht. Die Glieder werden alsdann nach folgendem combinatorischen Gesetze gebildet: In jedem Einzelgliede darf nur eine Minuskel vorkommen, Majuskeln dagegen so viele als die linke Randziffer der Minuskel vorschreibt: so ist 04 mit 0 Majuskel, 13 mit 1 Majuskel, 30 mit 3 Majuskeln multiplicativ verbunden[1]. Die rechten Randziffern der Minuskel und der Majuskeln in jedem Gliede müssen die gleiche Summe liefern, nämlich die der rechten Randziffer der jedesmal gesuchten Majuskel: bei gesuchtem 104 ist diese Summe 4, wie an jedem Gliede der oben stehenden Entwickelung bewahrheitet werden kann. Als Divisor erscheint ein für alle Mal die Minuskel 10.

Der Fortschritt, welcher in dieser durch Leibniz gegebenen Vorschrift enthalten ist, beruht wesentlich auf seiner Bezeichnung, und er war sich dessen so sehr bewusst, dass er in gesperrter Schrift den Satz hervortreten liess[2], die Sachkundigen würden einsehen, welcher Fortschritt der Analysis in dieser Bezeichnung durch Zahlen an Stelle der Buchstaben bei gleichbleibender Willkürlichkeit und Allgemeinheit der Annahme enthalten sei.

Leibniz hat mit dieser Erfindung die combinatorische Analysis ins Leben gerufen, eine neue Abtheilung in dem grossen Gebiete der Analysis, welche etwa 80 Jahre später wieder in Deutschland eine eigene combinatorische Schule in der Mathematik entstehen liess, der es freilich an einem Leibniz gefehlt hat, um die Hoffnungen zu erfüllen, welche an ihr Auftreten sich knüpften.

Es ist gewiss kein Zufall, dass Leibniz gerade den Aufsatz gegen Fatio für diese Veröffentlichung benutzte. Fatio hatte es Leibniz zum Vorwurfe gemacht, den Verdiensten, welche De Moivre sich erworben habe, nicht gerecht geworden zu sein, und Leibniz wollte nun zeigen, wie weit er über Jenen hinausgehe. Aber wir müssten uns täuschen, wenn sich bei Leibniz mit dieser Absicht nicht noch eine andere verbunden hätte. Leibniz hat (S. 209) im October 1690 sein Differentialzeichen gegen Huygens vertheidigen müssen, deutlich machen müssen, dass die Bezeichnung in der Mathematik keineswegs nebensächlich sei. Er wusste von den engen Beziehungen zwischen Fatio und Huygens. Es war ihm nur erwünscht, an einem der

---

[1] *Membra lege combinationis sequenti formata . . . . Notae ultimae numerorum suppositiorum membri cujusque formanto eandem summam, aequalem notae ultimae majusculi, cujus membra ingrediuntur valorem, et in membro quolibet minusculus non esto nisi unicus, majusculi autem tot, quot nota prior in minusculo habet unitates.* [2] *Videbunt autem intelligentes novam Analyticae promotionem in hac nostra designatione per Numeros loco literarum, qui adeo fictitii seu supposititii sunt, contineri.*

Differentialrechnung nicht angehörenden Beispiele zeigen zu können, was aus einer zweckmässig gewählten Bezeichnung sich alles folgern lässt. Er hat es gezeigt, und nicht bloss den englischen Zeitgenossen, denen, Newton mit eingeschlossen, das richtige Verständniss für die Wichtigkeit der Form durchweg abging.

Zu den Anwendungen der Combinatorik, welche einen ganz besonderen Reiz auszuüben vermögen, gehört die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Haben wir im 84. Kapitel Bearbeitungen desjenigen Theiles ihres Gebietes kennen gelernt, der mit dem Leben der Menschen, ihren Geburten und Todesfällen in Zusammenhang steht, so kehrte man jetzt zunächst zu den Aufgaben zurück, welche, wie wir aus dem 75. Kapitel wissen, jene Rechnung hatten entstehen lassen.

Ganz vergessen waren die Untersuchungen über Glücksspiele nie. Im Journal des Sçavans von 1679 hatte Josef Sauveur[1] (1653—1716) sich mit den damals häufigsten Glückspielen beschäftigt, aber seine Rechnungen waren vielfach mit Irrthümern behaftet, und deshalb durften wir sie im 84. Kapitel mit Stillschweigen übergehen. Von viel grösserem Werthe war eine 1708 gedruckte besondere Schrift *Essai d'analyse sur les jeux de Hazard*, welche ohne Namen eines Verfassers erschien, aber von Pierre Rémond de Montmort (1678—1719) herrührt. Dieser Schriftsteller[2], dessen Name uns wiederholt begegnet ist, war eine Zeit lang Domherr zu Nôtre Dame in Paris, gab aber diese Stellung, welche er eigentlich nur angenommen hatte, weil sein Bruder ihrer überdrüssig war, deren Pflichten er aber dann mit gewissenhafter Strenge erfüllte, wieder auf, um sich zu verheirathen. Er zog nach einer Besitzung Montmort, von welcher er den Beinamen annahm, unter welchem er viel bekannter ist, als unter dem wirklichen Familiennamen Rémond. Er arbeitete längere Zeit mit François Nicole zusammen. Ein anderer Mitarbeiter war Niclaus I. Bernoulli, welcher 1713 drei Monate auf dem Gute Montmort verweilte[3]. Diese gemeinsam verbrachte Arbeitszeit und ein vorausgegangener Briefwechsel beeinflussten wesentlich die zweite Auflage des De Montmort'schen Essai d'analyse, auf welche wir noch zurückkommen. Der ersten Ausgabe entnehmen wir nur wenige der Vorrede angehörende Bemerkungen. Die Vergangenheit, heisst es dort auf S. VI, entscheidet nichts für die Zukunft. Zufall, heisst es weiter auf S. XIV, nennen wir den Eintritt einer Thatsache aus uns unbekannten Gründen. Der Verfasser kennt an Vorarbeiten die Schrift Pascal's über das arithmetische Dreieck, welche bei dessen Tod 1662

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences* 1716, pag. 82. [2]) Ebenda 1719 pag. 83—93. [3]) Niclaus Bernoulli schrieb unter dem 7. April 1713 an Leibniz (Leibniz III, 982), er komme grade von Montmort nach Paris zurück.

gedruckt aufgefunden worden ist, er kennt Pascal's Briefwechsel mit Fermat aus des letzteren Varia Opera von 1679, er kennt auch Van Schooten's Ausgabe der Schrift De ratiociniis in ludo aleae von Huygens aus dem Jahre 1657.

Niclaus I. Bernoulli (1687—1759), der Neffe von Jakob und Johann Bernoulli (S. 85—86), war gleichzeitig Jurist und Mathematiker. Er begann 1709 seine Thätigkeit mit einer beiden Wissensgebieten gleichermassen dienenden Schrift, den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Rechtsfragen *Specimina Artis conjectandi ad quaestiones Juris applicatae*. Einen Auszug davon hat er selbst in dem IV. Supplementbande der A. E.[1]) zum Abdrucke gebracht, wie die fortwährende Redeweise in erster Person ausser Zweifel setzt. Wenn daher eine handschriftliche Randnote Christian Wolf als Verfasser des Berichtes nennt, so ist dies irrig. Wenn der Richter, heisst es in dem Auszuge[2]), einen Abwesenden ausschliesslich nach Maassgabe der verflossenen Zeit für todt erklären darf, so halte ich seinen Tod für hinreichend wahrscheinlich, wenn sein Todtsein doppelt so wahrscheinlich ist als sein Leben, denn alsdann überschreitet die Wahrscheinlichkeit die Hälfte der Gewissheit um ein Beachtenswerthes, nämlich um den sechsten Theil der Gewissheit. Jenes ist aber doppelt so wahrscheinlich, wenn so viele Jahre verflossen sind, dass von einer Anzahl mit dem Abwesenden gleichaltrigen Menschen die Zahl der innerhalb jener Jahre Verstorbenen das Doppelte der Zahl der Ueberlebenden ausmacht. Es wirkt einigermassen erheiternd, dass diese Vorschrift nachmals, im Jahre 1744, gegen Niclaus I. Bernoulli selbst angewandt wurde[3]). Damals verlangten einige Baseler, unter denen just unser Bernoulli sich befand, dass das Vermögen der verstorbenen Tochter eines seit 23 Jahren unbekannt wo abwesenden Verganteten diesem, und damit ihnen als Gläubigern zugesprochen werde. Der Bruder der Verstorbenen beanspruchte dagegen das Vermögen derselben für sich, da der Vater sehr wahrscheinlich längst nicht mehr lebe. Er berief sich dabei auf die von Niclaus I. Bernoulli aufgestellten Grundsätze, denen gemäss nur noch 4 Jahre fehlten, um den Vater als todt zu erklären. Das Gericht entschied hierauf, der Bruder habe vorläufig gegen Sicherstellung die Erbschaft anzutreten und so lange zu behalten, bis die Gläubiger beweisen könnten, dass die Tochter wirklich vor dem Vater gestorben sei.

Andere Fragen, mit welchen sich Niclaus I. Bernoulli in seiner Abhandlung von 1709 beschäftigte, waren folgende: Die Aufsuchung

[1] A. E. Supplem. IV. 159—170. [2] Ebenda 162. [3] Rudolf Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz I, 160 Note 50.

des Werthes einer lebenslänglichen Rente, einer Ausstattungsversicherung, wie sie in Italien vorkomme[1]), einer Schiffsversicherung. Ausführlicher ist das Genueser Spiel behandelt, welches darauf beruhte, dass unter 100 Senatoren 5 Jahresbeamte nach dem Loose gewählt wurden, und festsetzte, dass wenn die Loosziehung mit einer von einem Spieler zum voraus aufgestellten Fünfmännerliste in einem oder mehreren Namen übereinstimmte, derselbe gewisse Vielfache seines Einsatzes erhalten sollte, ein Spiel, aus welchem nachmals unter Ersetzung der Zahl 100 durch 90 das Zahlenlotto entstanden ist. Endlich ist auch die Frage nach der Schuld oder Unschuld eines Angeklagten in Rechnung gebracht. Durch ein Schuldzeugniss lässt der Verfasser die Wahrscheinlichkeit der Unschuld des Angeklagten sich auf $\frac{2}{3}$ herabmindern. Jedes neue Schuldzeugniss fordert eine abermalige Herabminderung auf $\frac{2}{3}$. Bei 10 Zeugnissen ist folglich die Wahrscheinlichkeit der Unschuld des Angeklagten nur noch

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{1024}{59049} = 0{,}017341 \cdots = \frac{1}{58}$$

oder so gering, dass seine Schuld moralisch beinahe sicher ist[2]).

Aus dem nachfolgenden Jahre 1710 haben wir eine englische Arbeit zu nennen. Arbuthnot schrieb, wie wir schon wissen (S. 294), über das Geschlechtsverhältniss bei den Geburten[3]), ein Gegenstand dem John Graunt 1662 zuerst Beachtung geschenkt hatte. Arbuthnot fand in Bestätigung von Graunt's Beobachtungen, dass nach den Londoner Taufregistern, welche er für die Jahre 1629—1710 benutzte, jedes Jahr mehr männliche als weibliche Geburten auftraten, wenn er auch eine Verhältnisszahl nicht ausrechnete. Er sah darin einen Beweis der göttlichen Vorsicht[4]), welche durch diesen Ueberschuss die grösseren Gefahren, unter welchen der Mann den Unterhalt zu erwerben hat, im voraus wieder gut macht. Er sah aber ferner darin einen Grund gegen die Vielweiberei, welche den Gesetzen der Natur und der Gerechtigkeit zuwiderlaufe, denn die Mehrzahl der Männer gegen die Frauen würde noch mehr Männer zur Ehelosigkeit zwingen, wenn Einer mehr als nur eine Frau für sich in Anspruch nähme. Arbuthnot scheint schon früher (1692) die kleine Schrift von Huygens

[1]) *Illa scilicet conventio, Italis hodiernum usitata, qua Pater cui recens nata est filia cum alio ita contrahit, ut ille pretio statim accepto ejus quadruplum vel quintuplum (quod deinde filiae in dotem cedit) restituat, si contigerit, filiam pervenire ad aetatem nubilem puta 16 annorum.* [2]) *quae tam exigua est, ut moraliter fere certum sit, crimen esse commissum.* [3]) P. T. XXVII, 186—190.
[4]) *an Argument for Divine Providence.*

in's Englische übersetzt und mit Zusätzen von geringem Werthe versehen zu haben[1].

Wieder ein Jahr später (1711) folgte die hervorragende Abhandlung von Abraham De Moivre über das Maass des Zufalls, *De mensura sortis*[2]. In einer an Francis Robartes, nachmaligem Earl of Radnor, gerichteten Widmung bedauert De Moivre, dass dieser Gönner der mathematischen Wissenschaften[3] durch Staatsgeschäfte verhindert sei fortzusetzen, was er zu seinem Vergnügen begonnen habe, und dadurch bestätigt sich, was wir (S. 295) schon zu verstehen gaben, dass Robartes nur sehr nebensächlich als Mathematiker gelten kann. Eine gegentheilige Meinung wird man auch dann kaum mit Erfolg vertheidigen können, wenn Robartes die gleiche Persönlichkeit ist[4], welche 1693 einen kleinen Aufsatz über Lotterien veröffentlicht hatte[5], dort aber Francis Roberts genannt ist. In De Moivre's Widmung an Robartes ist ferner von einem neueren französischen Schriftsteller die Rede, welcher die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung an verschiedenen Beispielen hübsch klar zu legen wusste[6], wenn er auch eine eigentliche Methode vermissen lasse. Natürlich ist De Montmort gemeint. Die Lehre von den Combinationen sei das vorzugsweise anzuwendende Hilfsmittel: dass im Jahre 1711 Leibniz, der Schriftsteller, welcher jene Lehre hauptsächlich begründet hatte, in England nicht erwähnt wird, versteht sich von selbst.

Gewissermassen als Einleitung in die Abhandlung dient folgender Satz. Tritt ein Ereigniss in p Fällen ein, in q Fällen nicht ein, tritt ein zweites von dem ersten durchaus unabhängiges Ereigniss in r Fällen ein, in s Fällen nicht ein, vervielfacht man

$$(p+q)(r+s) = pr + qr + ps + qs,$$

so verhalten sich die einzelnen für beide Ereignisse gemeinschaftlichen Möglichkeiten des Eintretens oder Nichteintretens wie die Glieder der angegebenen Entwickelung, eine Behauptung, in welcher man Halley's Einfluss (S. 49) nicht verkennen wird. In dem besonderen Falle, dass das Eintreffen der Ereignisse, welche nicht bloss 2 sondern n an der Zahl sein dürfen, stets in a Fällen, das Nichteintreffen stets in b Fällen stattfindet, geht das Product der Summen sich ausschliessender Fälle in die Potenz $(a+b)^n$ über, deren Glieder eine ähnlich zu erläuternde Bedeutung besitzen, wie vorher die Glieder des Productes aus von einander verschiedenen Factoren.

---

[1] Todhunter, *History of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace* pag. 48—53. [2] P. T. XXVII, 213—264. [3] *Mathematicarum scientiarum fautor.* [4] Todhunter l. c. pag. 53—54 und 137. [5] P. T. XVII. [6] *quas nuperrimus autor Gallus variis exemplis pulchre illustravit.*

Man kann getrost den ganzen weiteren Inhalt der Abhandlung als Anwendung dieses einen Satzes kennzeichnen, die sich nur entsprechend den Bedingungen der jedesmaligen Aufgabe bald einfacher, bald weniger einfach gestaltet. Die ganze Abhandlung gewinnt dadurch ein einheitliches Gepräge, welches ihren Werth erhöht. Die Bedingungen, von welchen wir reden, sind theils solche, die ausschliesslich dem Bereiche des Zufalls angehören, theils solche, bei denen die Geschicklichkeit des Spielers den Ausschlag giebt, soweit sich diese in Zahlen ausdrücken lässt. Wir geben als Probe einige wenige Beispiele.

Das erste Beispiel[1]) der Abhandlung lässt A mit B würfeln, und zwar mit einem gewöhnlichen auf seinen Flächen mit 1 bis 6 bezeichneten Würfel. A soll gewonnen haben, wenn er in 8 Würfen mindestens zweimal 1 Auge wirft. Weil 1 Fläche mit Eins, 5 Flächen mit Nichteins bezeichnet sind und 8 Würfe vorgeschrieben sind, ist hier $a = 1$, $b = 5$, $n = 8$. Bei der Entwicklung von $(1 + 5)^8$ sind die Glieder, welche in allgemeinen Buchstaben b^n und nab^{n-1} heissen, dem Spieler B günstig, alle anderen lassen A gewinnen. Die Wahrscheinlichkeiten für A und B verhalten sich also wie

$$(a + b)^n - b^n - nab^{n-1}) : (b^n - nab^{n-1}),$$

d. h. wie

$$(6^8 - 5^8 - 8 . 5^7) : (5^8 - 8 . 5^7) = 663991 : 1015625,$$

oder ungefähr wie 2 : 3.

Die vierte Aufgabe[2]) nimmt an, A sei so viel geschickter als B, dass er ihm auf 3 Spiele eines vorgeben kann, man wünscht ihre Geschicklichkeit in einem Zahlenverhältnisse $z : 1$ ausgedrückt. Hier ist $a = z$, $b = 1$, $n = 4$. Diese letztere Zahl bestimmt sich dadurch, dass in Folge der Vorgabe A drei, B zwei Spiele gewinnen muss, um die Entscheidung herbeizuführen. Diese ist also jedenfalls nach $3 + 2 - 1 = 4$ Spielen vorhanden. Von den Gliedern der Entwicklung $(z + 1)^4$ sind $z^4 + 4z^3$ die für A günstigen, $6z^2 + 4z + 1$ die für B günstigen. Nach der Vorgabe sollen aber die Aussichten beider Spieler die gleichen sein, also ist $z^4 + 4z^3 = 6z^2 + 4z + 1$ zu setzen, woraus ungefähr $z = 1{,}6$ folgt. Die Geschicklichkeiten verhalten sich demnach wie $1{,}6 : 1 = 8 : 5$.

In der fünften Aufgabe[3]) wird nach der Zahl x der Versuche gefragt, welche das Eingetroffensein und Nichteingetroffensein eines Ereignisses gleich wahrscheinlich machen, wenn a und b die Verhältnisszahlen bei einmaligem Versuche sind. Von der Entwicklung von $(a + b)^x$ stellt nur das Glied b^x die Fälle dar, in welchen das

[1]) P. T. XXVII, 216—217. [2]) Ebenda 218—219. [3]) Ebenda 219.

Ereigniss nie eintrat, alle übrigen Glieder $(a+b)^x - b^x$ setzen ein mindestens einmaliges Eintreffen voraus. Eingetroffensein und Nichteingetroffensein sollen aber gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, also muss sein $(a+b)^x - b^x = b^x$, $\left(\frac{a+b}{b}\right)^x = \left(1+\frac{a}{b}\right)^x = 2$. Gesetzt es sei $\frac{b}{a} = q$, so ist

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^x = \left(1+\frac{1}{q}\right)^x = 1 + \frac{x}{q} + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2q^2} + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3q^3} + \cdots = 2$$

und man erkennt, dass dem $q = 1$ auch $x = 1$ entspricht, dem $q = \infty$ auch $x = \infty$. In letzterem Falle setze man $\frac{x}{q} = z$, so geht die letzterhaltene Reihe in $1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \cdots$ über. Aber das ist die Zahl, deren natürlicher Logarithmus z ist[1]), und da 2 den Zahlenwerth der Reihe darstellt, so ist 2 die Zahl, deren natürlicher Logarithmus z ist, d. h. $z = \log 2$, und das ist nahezu 0,7. Da nun $z = \frac{x}{q}$ war, so ist $x = qz$. Nun hat man ermittelt, dass bei $q = 1$, $x = 1q$, bei $q = \infty$, $x = 0{,}7q$ ist. Bei irgend sonstigem Werthe von q liegt folglich $\frac{x}{q}$ zwischen 1 und 0,7.

Wir gehen zu dem Jahre 1713 über, in welchem Niclaus I. Bernoulli die *Ars Conjectandi*, Muthmassungskunst, d. h. Wahrscheinlichkeitsrechnung seines 1705 verstorbenen Oheims Jakob Bernoulli herausgab (S. 213). Jakob Bernoulli hatte sich diesen Betrachtungen nach 1679[2]), aber mindestens 20 Jahre vor seinem Tode, also spätestens 1685[3]) zugewandt, und dennoch hinterliess er das Werk unvollendet. Die Verleger hatten erst Johann Bernoulli, dann Niclaus I. Bernoulli angegangen, das an dem Werke noch Fehlende fertig zu stellen. Beide lehnten unter verschiedenen Vorwänden ab. Niclaus I. Bernoulli begnügte sich damit, das Druckfertige der Presse zu übergeben und in der Vorrede den Verfasser des *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, d. i. De Montmort und neben ihm De Moivre, welche beide vor noch nicht so langer Zeit auf dem gleichen Gebiete mit Auszeichnung thätig gewesen seien, öffentlich aufzufordern, im Sinne des Verstorbenen an dem von ihm Begonnenen weiter zu arbeiten. Die *Ars Conjectandi*, zu deren Schilderung wir übergehen, besteht aus vier Abschnitten.

Der I. Abschnitt enthält die Abhandlung von Huygens über

[1]) *est numerus cujus Logarithmus Hyperbolicus est z.* [2]) *Ars Conjectandi* pag. 29: *referente Pascalio in literis ad Fermatium quae huius operibus Tolosae A°. 1679 impressis insertae leguntur.* [3]) Ebenda pag. 227: *postquam jam per vicennium pressi.*

das Würfelspiel[1]), von welcher in unserem 75. Kapitel (Bd. II, S. 692—694) die Rede war, und Anmerkungen zu derselben. In diesen findet sich z. B. ein Beweis[2]) für den von Huygens beweislos ausgesprochenen Satz, dass es gleichbedeutend sei, ob man 1 Wurf mit n Würfeln oder n Würfe mit 1 Würfel betrachte. Darf Einer einmal mit n Würfeln werfen, so kann es doch nicht darauf ankommen, ob die Würfel gleichzeitig oder nach einander auf den Tisch rollen. Im letzteren Falle kann es aber wieder keinen Unterschied machen, ob es n verschiedene Würfel sind oder ob einer, der n mal nach einander benutzt wird. In zwei Anmerkungen[3]) sind wichtige Verallgemeinerungen vorgenommen, indem von Huygens mit bestimmten Zahlenwerthen gestellte Fragen in Buchstabenwerthen ihre Beantwortung finden, was natürlich einen ganz anderen Einblick in die Bildungsweise der Endzahlen der Untersuchung gewährt. Auch ein Anhang zum I. Abschnitte überholt bedeutend die erläuterte Schrift. Huygens hatte zum Schlusse fünf Aufgaben gestellt, zu deren 1., 3., 5. er ohne weitere Begründung die Zahlenauflösung beifügte, zur 2. und 4. nicht einmal diese. Jakob Bernoulli hat in dem genannten Anhange die 1., 2., 3., 5. Aufgabe behandelt[4]), für die 4. auf seinen III. Abschnitt verwiesen, wo sie denn auch gelöst wird[5]), ebenso wie die 3. Aufgabe dort eine abermalige Lösung findet[6]). Jakob Bernoulli zeigt, aus welchem Grunde Huygens der 2. Aufgabe keine Lösung beifügte. Sie lässt nämlich ihrem Wortlaute nach verschiedene Deutungen zu, deren jede naturgemäss zu anderen Zahlen führt, so dass in der einen Aufgabe mehrere verborgen liegen.

Der II. Abschnitt[7]) ist der Lehre von den Permutationen und Combinationen gewidmet. Der Name der Permutationen dürfte von Jakob Bernoulli erfunden sein, wenigstens sagt er[8]), er nenne Permutationen diejenigen Aenderungen, durch welche unter Beibehaltung der Anzahl der Dinge ihre Ordnung und Stellung verschiedentlich vertauscht wird, während bei den Combinationen der Wortlaut dahin geht[9]), sie seien Verbindungen von solcher Art, dass aus gegebenen Dingen welche abgesondert und mit einander vereinigt werden, ohne dass auf ihre Ordnung und Stellung irgend welche Rück-

[1]) *Ars Conjectandi* pag. 1—71. [2]) Ebenda pag. 37. [3]) Ebenda pag. 30 und 38, beidemal mit der Ueberschrift: *Ad propositionem in genere.* [4]) Ebenda pag. 49—57, 57—65, 66, 67—71. [5]) Ebenda pag. 145—146. [6]) Ebenda pag. 144—145. [7]) Ebenda pag. 72—137. [8]) Ebenda pag. 74: *Permutationes rerum voco Variationes, juxta quas servata eadem rerum multitudine ordo situsque inter ipsas diversimodo permutatur.* [9]) Ebenda pag. 82: *Combinationes rerum sunt Conjunctiones, juxta quas ex data rerum multitudine nonnullae eximuntur, interque se conjunguntur nullo ordinis situsve ipsarum respectu habito.*

sicht genommen werde. Jakob Bernoulli nennt als Vorgänger auf dem Gebiete der allen Wissenschaften gleich unentbehrlichen Combinationslehre: Schooten, Leibniz, Wallis, Prestet[1]), während er Pascal's einschlagende Arbeiten, abgesehen von dem, was in den Briefen an Fermat stand, nicht gekannt zu haben scheint, trotzdem sie seit 1665 im Buchhandel waren (Bd. II, S. 684). Dieselbe Unkenntniss müssen wir auch auf die bei Pascal's combinatorischen Arbeiten zuerst auftretende Methode der vollständigen Induction, d. h. des Beweisverfahrens von n auf $n+1$ ausdehnen. Jakob Bernoulli scheint demnach diese Methode, deren er sich in einem kleinen Aufsatze sehr einfachen, auf arithmetische Reihen bezüglichen Gegenstandes[2]) in den A. E. für September 1686 bedient hatte, die dann in der Ars Conjectandi wiederholt benutzt wird[3]) selbständig nacherfunden zu haben. Das Vorrecht Pascal's kann dadurch nicht beeinträchtigt werden, aber es wird begreiflich, dass man lange Zeit Jakob Bernoulli für den Erfinder der Methode hielt und sie vielfach nach ihm benannte. Ging es doch mit der Methode der unbestimmten Coefficienten nicht viel anders, von welcher man durch die grosse Verbreitung der Descartes'schen Geometrie aller Orten Kenntniss haben musste, und von welcher Newton wie Leibniz bei den verschiedensten Gelegenheiten Gebrauch machten, ohne je den damals vermuthlich allgemein bekannten Urheber der Methode zu nennen, so dass spätere Schriftsteller bald Newton, bald Leibniz für den Erfinder hielten. Bei Betrachtung der Permutationen unterscheidet Jakob Bernoulli die zwei Möglichkeiten, dass alle Elemente verschieden[4]), oder dass sie zum Theil unter einander gleich[5]) sein sollen. Die Ableitung der Formel für die Permutationszahlen erfolgt, wenn alle Elemente verschieden sind, durch Betrachtung von 1, 2, 3 ... der Reihe nach auftretenden Elementen. Von n Elementen kann jedes als erstes geschrieben werden, worauf ihm so viele Permutationsformen nachfolgen, als aus den anderen $n-1$ sich bilden lassen, die Permutationszahl für n Elemente ist also n mal so gross als die für $n-1$ Elemente. Mit einander übereinstimmende Elemente werden erst als verschieden gedacht, und ihr Gleichwerden findet nachträgliche Berücksichtigung. Bei den Combinationen muss der *Exponens*[6]), d. h. die Anzahl der in jeder Form enthaltenen Elemente oder die Klasse, zu welcher combiniert wird, beachtet werden. Er findet in den Wörtern *Unionen*, *Binionen*, *Ternionen*, *Quaternionen* für Formen mit 1, 2, 3, 4 Elementen seinen Wiederklang, und sogar das Wort *Nullio* wird gebildet, um

[1]) *Ars Conjectandi* pag. 73. [2]) Jac. Bernoulli, *Opera* I, 282—283. [3]) *Ars Conjectandi* pag. 92 und häufiger. [4]) Ebenda pag. 75. [5]) Ebenda pag. 77. [6]) Ebenda pag. 82.

anzudeuten, dass man gar kein Element nehme. Auch bei den Combinationen wird die Verschiedenheit aller benutzten Elemente einen Hauptfall bilden, ihre theilweise Gleichheit einen zweiten. Die Elemente treten allmälig neu hinzu, werden aber dann mit den schon vorhandenen in jeder denkbaren Weise verbunden, d. h. die Combinationen von n Elementen zu allen Klassen von den Unionen bis zu den N-ionen (Formen von je n Elementen) werden gleichzeitig gebildet. Eine kleine diese Entstehung versinnlichende Tafel, deren Vorbild für Jakob Bernoulli in den *Exercitationes mathematicae* von Franciscus van Schooten gefunden sein dürfte[1]), ist folgende:

$$a$$
$$b \,.\, ab$$
$$c \,.\, ac \,.\, bc \,.\, abc$$
$$d \,.\, ad \,.\, bd \,.\, cd \,.\, abd \,.\, acd \,.\, bcd \,.\, abcd$$
$$e \,.\, ae \,.\, be \,.\, ce \,.\, de \,.\, abe \,.\, ace \,.\, bae \,.\, ade \,.\, bde \,.\, cde \,.\, abce \,.\, abde \,.\, acde \,.\, bcde \,.\, abcde.$$

In jeder Zeile steht eine Form mehr (die neu hinzutretende Union) als in sämmtlichen früheren Zeilen zusammen, mithin in der ersten Zeile 1, in der zweiten $1 + 1 = 2$, in der dritten $1 + 1 + 2 = 2^2$, in der vierten $1 + 1 + 2 + 2^2 = 2^3$, in der $n$ten

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

Formen. Alle Zeilen zusammen geben

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Formen[2]). Die Formen der einzelnen Zeilen klassenweise geordnet geben für die Unionen der Reihenfolge der Zeilen nach $1+1+1+1+1+\cdots$, für die Binionen $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$, für die Ternionen $0 + 0 + 1 + 3 + 6 + \cdots$ u. s. w., so dass die Uebereinstimmung mit den figurierten Zahlen zu Tage tritt[3]). Das ist aber ein Gegenstand, mit welchem schon die beiden Ulmer Mathematiker Faulhaber und Remmelin, mit welchem Wallis, Mercator, Prestet sich beschäftigt haben[4]). Werden die Zahlen

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots, \quad 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots,$$
$$0 + 0 + 1 + 3 + 6 + \cdots$$

je in einer Columne unter einander, die Columnen selbst neben einander geschrieben, so entsteht ein Zahlenrechteck[5])

[1]) Vergl. Franc. van Schooten, *Exercitationes mathematicae* pag. 373 mit *Ars Conjectandi* pag. 83. [2]) *Ars Conjectandi* pag. 84. [3]) Ebenda pag. 86. [4]) Ebenda pag. 95. [5]) Ebenda pag. 87.

1	0	0	0	0	...
1	1	0	0	0	...
1	2	1	0	0	...
1	3	3	1	0	...
1	4	6	4	1	...
.	.	.	.	.	. . . . ,

in welchem die Stellen über der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonale durch Nullen eingenommen sind, nach deren Entfernung eine dreieckförmige Tafel der Binomialcoefficienten übrig bleibt, nicht übereinstimmend, aber doch nahe verwandt mit der seiner Zeit von Michael Stifel erfundenen Anordnung (Bd. II, S. 398), mit der von Tartaglia später benutzten Nachbildung (Bd. II, S. 480 und 482). Weder Stifel noch Tartaglia kommen aber unter den von Jakob Bernoulli erwähnten Vorgängern vor. Er dürfte beide Schriftsteller demnach nicht gekannt haben, ein ganz interessanter Beleg für die Raschheit, mit welcher mitunter auch ganz hervorragende Werke aus dem Gedächtnisse verschwinden. Die vorher von ihm genannten Mathematiker, fährt Bernoulli fort, hätten durch Induction Formeln für die figurierten Zahlen gefunden, Wallis auch die Summe von Potenzen der aufeinander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, aber von Beweisen sei nirgend die Rede gewesen. Wer allerdings glaubt, Bernoulli sei diesem seinem eigenen Vorwurfe nicht verfallen, er habe vielmehr jede Induction verschmäht, befindet sich im Irrthum. Bernoulli's Gedankengang ist folgender[1]). Den Ausgangspunkt bildet ein Satz, der unter Anwendung des Zeichens $\overset{k}{C}_h$ für die Zahl der Combinationen ohne Wiederholung aus h Elementen zur Klasse k, wodurch $\overset{k}{C}_h = 0$, so lange $h < k$, sich in der Formel $\overset{k}{C}_n = \overset{k-1}{C}_1 + \overset{k-1}{C}_2 + \cdots + \overset{k-1}{C}_{n-1}$ ausspricht, oder als

$$\frac{n(n-1)\ldots(n+1-k)}{1.2\ldots k} = \overset{h=n}{\underset{h=1}{S}} \frac{(h-1)(h-2)\ldots(h+1-k)}{1.2\ldots(k-1)}.$$

Bernoulli findet den Satz für $k = 2, 3, 4 \ldots$ richtig und dehnt ihn dann inductiv aus. Bei $k = 3$ ist demnach (sofern $\overset{h=n}{\underset{h=1}{S}} \frac{(h-1)(h-2)}{1.2}$ mit Jakob Bernoulli noch kürzer $S\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ geschrieben wird)

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = S\frac{(n-1)(n-2)}{2} = S\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1\right)$$
$$= \frac{1}{2}Sn^2 - \frac{3}{2}Sn + n.$$

[1]) *Ars Conjectandi* pag. 96—98.

Aber $Sn = \frac{n^2 + n}{2}$, und setzt man diesen Werth in die Gleichung ein und löst sie dann nach Sn^2 auf, so findet sich

$$Sn^2 = 2\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + 3Sn - 2n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

und diese Summe der Quadratzahlen lässt sich weiter als bekannt betrachten, zunächst bei $k = 4$. Diese Annahme liefert

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = S\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} = S\left(\frac{n^3}{6} - n^2 + \frac{11n}{6} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{6}Sn^3 - Sn^2 + \frac{11}{6}Sn - n$$

und daraus $Sn^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$. Bernoulli hat die Rechnung, von welcher er behauptet, sie werde mit leichter Mühe[1]) vollzogen, bis zu $k = 11$, d. h. bis zur Darstellung der 10ten Potenzen durchgeführt. Ihr Ergebniss ist:

$$Sn = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$
$$Sn^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$
$$Sn^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$
$$Sn^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$
$$Sn^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$
$$Sn^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$
$$Sn^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$
$$Sn^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$
$$Sn^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$
$$Sn^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1\,n^7 + 1\,n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n.$$

Wer aber, heisst es unmittelbar weiter, das Gesetz der Reihen genauer betrachtet, kann auch ohne die Umschweife der Rechnung die Tabelle fortsetzen. Ist c der ganzzahlige Exponent irgend einer Potenz, so wird

$$Sn^c = \frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2.3.4}Bn^{c-3}$$
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2.3.4.5.6}Cn^{c-5} + \cdots.$$

[1]) *levi negotio.*

Die Exponenten der Potenzen von n nehmen von $c-1$ anfangend regelmässig um je 2 ab, so dass das letzte Glied n^2 oder n wird, je nachdem c ungrad oder grad war. Die Buchstaben $A, B, C \ldots$ werden nach und nach bei der Bildung der Summen Sn^c mit gradem c gefunden. Es gehört also zusammen

$$c = 2 \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{2}$$

$$c = 4 \quad \text{und} \quad B = -\frac{1}{30}$$

$$c = 6 \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{42}$$

$$c = 8 \quad \text{und} \quad D = -\frac{1}{30}$$

$$c = 10 \quad \text{und} \quad E = \frac{5}{66}.$$

Diese grossen Buchstaben werden vermittelst ihrer grundlegenden Eigenschaft gefunden, dass sie die übrigen Coefficienten, welche bei Entwicklung der betreffenden Potenzsumme auftreten, zur Einheit ergänzen. Bei Sn^8 sind beispielsweise, wie aus der kleinen Tabelle entnommen werden kann, die Coefficienten der fünf ersten Glieder $\frac{1}{9}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{15}, \frac{2}{9}$. Deren Summe $\frac{31}{30}$ wird durch D zur Einheit ergänzt, d. h. $\frac{31}{30} + D = 1$, $D = -\frac{1}{30}$. Wie Jakob Bernoulli zu diesen wichtigen Sätzen gekommen sein mag, welche geniale Induction ihn dazu führte, die Exponenten von $c-1$ an um je 2 abnehmen zu lassen und die auftretenden Coefficienten durch aus ihnen hervorgehobene Factoren so zuzustutzen, dass die Zahlen $A, B, C, D, \ldots$ immer wieder auftreten, das zu errathen ist unmöglich. Der letzte Satz allein ist leicht einzusehen. Ist nämlich $n = 1$, so besteht Sn^c nur aus dem einen Gliede $1^c = 1$, während rechts vom Gleichheitszeichen gleichfalls alle Potenzen von n durch Einheiten zu ersetzen sind, mithin die einzelnen Coefficienten durch den Schlusscoefficienten zur Einheit ergänzt werden müssen. Die Zahlen $A, B, C, D \ldots$ haben bekanntlich später den Namen der Bernoulli'schen Zahlen erhalten. Eine Operation, auf welche Jakob Bernoulli ein berechtigt grosses Gewicht legt, ist die Bildung von Combinationen nebst deren Permutationen[1]. Er behandelt sie, beziehungsweise sucht die Anzahl ihrer Formen sowohl unter der Voraussetzung lauter von einander verschiedener, als auch wiederholt auftretender Elemente, und zwar sind in letzterem Falle sowohl Combinationen mit unbedingter als mit bedingter Wiederholbarkeit[2]) der Untersuchung unterworfen. Bei den Combinationen

[1] *Ars Conjectandi. Pars secunda. Caput VII De Combinationibus et Permutationibus mixtim spectatis.* pag. 124 sqq. [2] *Ars Conjectandi* pag. 133.

mit unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente erscheint der polynomische Lehrsatz[1]) als naheliegende und wichtige Anwendung.

Der III. Abschnitt[2]) wendet die combinatorischen Lehren auf Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung an. Etwas bunt durcheinander gewürfelt erscheinen hier theilweise recht schwierige und mit grosser Gewandtheit angefasste Aufgaben, über welche in Kürze zu berichten nicht wohl angeht.

Der IV. Abschnitt[3]) blieb leider unvollendet. Er sollte seiner Ueberschrift nach[4]) die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihren Anwendungen auf bürgerliche, sittliche und wirthschaftliche Verhältnisse untersuchen. Er beginnt mit einem Einleitungskapitel über Gewissheit, Wahrscheinlichkeit, Nothwendigkeit und Zufälligkeit der Dinge[5]). Die Wahrscheinlichkeit wird als ein Grad der Gewissheit erklärt, von der sie sich unterscheide wie der Theil vom Ganzen[6]). In den nachfolgenden Kapiteln fährt Jakob Bernoulli fort, das zu entwickeln, was man eine von Rechnung freie Darstellung der Wahrscheinlichkeitslehre nennen könnte, mit wesentlicher Berücksichtigung der im IV. Abschnitte zu behandelnden Gegenstände. Sie sind ganz anderer Art als die gewöhnlichen Glücksspiele. Man ist bei Erscheinungen der Natur oder des menschlichen Geistes- wie Körperlebens nicht im Stande, alle möglichen oder einem Ereignisse günstigen und ungünstigen Fälle zum voraus genau zu zählen, aber was man a priori nicht hervorlocken kann, das kann man wenigstens a posteriori, d. h. aus dem, was bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde, herausscharren[7]). Neu sei weder dieses Verfahren, welches regelmässig im täglichen Gebrauche geübt werde, noch auch das Bestreben, sich auf so zahlreiche Erfahrungen als immer möglich zu stützen, weil dadurch die Gefahr, vom Ziele abzuirren, verringert wird. Dagegen sei der Beweis neu, dass solches aus den Grundgesetzen der Kunst mit Nothwendigkeit folge. Aber noch weiteres sei möglich, woran vielleicht Niemand auch nur gedacht habe. Man könne untersuchen, ob bei Häufung der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, dem eigentlichen Verhältnisse zwischen den günstigen und den ungünstigen Fällen auf die Spur zu kommen, sich so steigere, dass sie jede gegebene Wahrscheinlichkeit übertreffe,

[1]) *Ars Conjectandi* pag. 132: *ubi quantitas literalis* $a + b + c + d$ *ducenda est in se quadrate, cubice* etc. [2]) Ebenda pag. 138—209. [3]) Ebenda pag. 210—239. [4]) Ebenda pag. 210: *Pars quarta tradens usum et applicationem praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis.* [5]) *Caput I. Praeliminaria quaedam de Certitudine, Probabilitate, Necessitate et Contingentia Rerum.* [6]) Ebenda pag. 211: *Probabilitas est gradus certitudinis et ab hac differt ut pars a toto.* [7]) Ebenda pag. 224: *quod a priori elicere non datur, saltem a posteriori, hoc est ex eventu in similibus exemplis multoties observato eruere licebit.*

oder ob diese Aufgabe so zu sagen ihre Asymptote habe[1]), d. h. ob es einen bei beliebiger Häufung der Beobachtungen dennoch nicht überschreitbaren Grad der Wahrscheinlichkeit, das wahre Verhältniss der Fälle gefunden zu haben, gebe. Man sieht, dass Jakob Bernoulli hier das Gesetz der grossen Zahlen enthüllt hat. Das Gesetz selbst, darin hat er ganz Recht, war keineswegs neu. Wir wissen, dass Cardano (Bd. II, S. 495) es schon ziemlich deutlich aussprach, aber auch darin hat er Recht, dass noch nie versucht worden war, das Gesetz mathematisch zu beweisen. Der Bernoulli'sche Beweis[2]), der sich auf die Binomialentwicklung und nicht grade naheliegende Eigenschaften der Binomialcoefficienten, insbesondere des mittleren, stützt, ist allzu verwickelt, als dass er in der uns gebotenen Kürze hier mitgetheilt werden könnte. Spätere Bearbeiter der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben ihn vereinfacht und dadurch die Richtigkeit des Gesetzes nur um so zweifelloser festgestellt.

Gemeinschaftlich mit der Ars Conjectandi hat Niclaus I. Bernoulli einen französisch geschriebenen Brief über das Ballspiel, das sogenannte *Jeu de paume*, veröffentlicht[3]). Auch dieser Brief rührt, wie Niclaus Bernoulli in der Vorrede versichert, von Jakob Bernoulli her. Er behandelt jenes Geschicklichkeitsspiel unter der Voraussetzung, dass die Kunstfertigkeit der einzelnen Spieler aus zahlreich durch dieselben abgelegten Proben bekannt sei. Das ist wieder eine Wahrscheinlichkeit a posteriori, und der Briefschreiber bedient sich hier wie in der Ars Conjectandi dieses Wortes, das nunmehr der Wissenschaft erworben war. Als Beispiel der Wahrscheinlichkeit a posteriori dient eine unbekannte Menge weisser und schwarzer Zettel, die in einem Säckchen vereinigt einzeln herausgezogen und sofort wieder hineingeworfen werden, worauf jedesmal auf's Neue gehörige Mischung der Zettel vorausgesetzt ist. Man könne beweisen[4]), dass das Verhältniss der so gezogenen beiderfarbigen Zettel von dem der wirklich vorhandenen schliesslich so gut wie gar nicht abweiche, so dass die Gleichheit der beiden Verhältnisszahlen zur moralischen Gewissheit werde[5]).

Auf die Ars Conjectandi, deren hohe wissenschaftliche Bedeutung schon aus unserem Auszuge erkennbar sein dürfte, folgte im gleichen

[1]) *Ars Conjectandi* pag. 225: *an vero Problema, ut sic dicam, suam habeat Asymptoton.* [2]) Ebenda pag. 228–238. Ein sehr übersichtlicher Bericht bei Eggenberger, Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems etc. in den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Jahrgang 1893, S. 121—129. [3]) Auf dem Titelblatte des Druckes von 1713 heisst es: *Epistola Gallice scripta de Ludo pilae reticularis* [4]) *étant même une chose démontrée.* [5]) *qu'il sera moralement certain*

Jahre 1713 die zweite Ausgabe von De Montmort's *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard.* Auch sie stellte keinen Verfassernamen auf das Titelblatt, aber der Schleier, der schon bei der ersten Ausgabe für Fachmänner kaum vorhanden gewesen sein kann, da De Montmort sein Buch vielfach verschenkte, war dadurch einigermassen gelüftet, dass Briefe, die in dem letzten Abschnitte abgedruckt sind, von Montmort aus datiert sind[1]), und dass bei einem derselben[2]) die Unterschrift R. de M... vorkommt. Diese Briefe sind Bestandtheile eines Briefwechsels mit Johann Bernoulli und Niclaus I. Bernoulli, durch dessen Veröffentlichung De Montmort, wie er in der Ankündigung an die Leser[3]) sagt, seine Schriftstellereitelkeit der Liebe zur Wissenschaft opferte. In demselben neuen Vorworte[4]) wendet sich De Montmort gegen De Moivre und dessen (S. 325) von uns erwähnte Bemängelung der ersten Ausgabe in einer eigentlich durch die Aeusserungen in der *Mensura sortis* nicht gerechtfertigten Breite. Er fügte geschichtliche Notizen hinzu. Dahin gehört, dass De Montmort seit April 1713 den Anfang des *Commercium Epistolicum* kannte[5]), der ihm von Seiten der Royal Society zugeschickt worden war. Dahin gehört ferner eine Erwähnung von Cardano's Abhandlung *De ludo aleae* (Bd. II, S. 494—495), deren Bedeutung De Montmort aber nicht richtig würdigte, wenn er sagte, man finde dort nur Belesenheit und die Moral betreffende Gedanken[6]). Auch Caramuel (Bd. II, S. 702—703) wird als Verfasser einer als sehr unbedeutend geschilderten Schrift über das Würfelspiel, *Kybeia*, genannt[7]), die uns im Uebrigen unbekannt ist. Endlich ist von einem Aufsatze Leibnizens über Spiele in den Miscellan. Berolin. I die Rede[8]). In dem eigentlichen Texte fehlt es gleichfalls nicht an geschichtlichen Erinnerungen. Von einigem Interesse dürfte es sein, dass Descartes[9]) als der Erfinder der Methode der unbestimmten Coefficienten gerühmt ist, und dass die Erscheinungszeit der *Ars Conjectandi* auf den Anfang des Monats September 1713 angegeben ist[10]). Aus diesem Datum, zusammengehalten mit dem des 9. November 1713, unter welchem die neue Auflage des Essay d'Analyse gutgeheissen ist, ergiebt sich die Unabhängigkeit, mit welcher beide Drucke neben einander hergingen. Das Werk De Montmort's konnte von dem Jakob Bernoulli's unmöglich mehr stark beeinflusst werden, weil es, als dieses herauskam, selbst schon nahezu im Drucke vollendet war.

---

[1]) *Essay d'Analyse* etc. pag. 303 und öfter. [2]) Ebenda pag. 370. [3]) Ebenda *Avertissement* pag. XXVI. [4]) Ebenda pag. XXVII—XXXI. [5]) Ebenda pag. XXXV. [6]) Ebenda pag. XL: *On n'y trouve que de l'érudition et des réflexions morales.* [7]) Ebenda pag. XL und 387. [8]) Ebenda pag. XLI. [9]) Ebenda pag. 321. [10]) Ebenda pag. 401.

Was nun die eigentlich analytischen Ergebnisse der neuen Ausgabe betrifft, so können wir uns mit wenigen Bemerkungen begnügen. Während in der ersten Ausgabe combinatorische Betrachtungen erst späterhin auftreten, sind sie, und zwar auf den Rath von Niclaus I. Bernoulli[1]), in der zweiten Ausgabe als erster Abschnitt an die Spitze gestellt. Grade diesem ersten Abschnitte gehören drei Sätze an, die wir hervorheben. De Montmort macht[2]) auf die zwischen Wahrscheinlichkeitszahlen und Polynomialcoefficienten vorhandenen Beziehungen aufmerksam. Er spricht aus[3]), dass die 1 als Divisor mitgerechnet und $a_1, a_2, \ldots a_\mu$ als Primzahlen gedacht, die Divisorenzahl von $a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_\mu^{e_\mu}$ sich durch das Product

$$(e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_\mu + 1)$$

darstelle. Er lässt[4]) figurierte Zahlen mit in jeder neuen Zeile neu hinzutretenden Erzeugungszahlen, *generateurs*, bilden. Der Name generateur und die Bildungsweise von

$$\begin{array}{cccccc} a & a & a & a & a & a \\ & b & a+b & 2a+b & 3a+b & 4a+b \\ & & c & a+b+c & 3a+2b+c & 6a+3b+c \\ & & & d & a+b+c+d & 4a+3b+2c+d \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a & a \\ 5a+b & 6a+b \\ 10a+4b+c & 15a+5b+c \\ 10a+6b+3c+d & 20a+10b+4c+d \end{array}$$

erinnern zu sehr an das, was Leibniz seiner Zeit (S. 73) als *differentiae generatrices* bekannt war, und was De Montmort in dem Commercium Epistolicum aufgefallen sein mochte, als dass wir nicht darauf hinweisen sollten. Der zweite, dritte und vierte Abschnitt handeln von Spielen, deren Gewinnwahrscheinlichkeiten combinatorisch untersucht werden. Den fünften Abschnitt bilden Briefe.

Wir haben von denselben schon oben reden müssen. Der erste Brief rührt von Johann Bernoulli her[5]), welcher an De Montmort kritische Bemerkungen zur ersten Ausgabe des Essay d'Analyse gerichtet hatte, und ähnlichen Inhaltes ist auch ein erster Brief von Niclaus I. Bernoulli[6]). An letzteren knüpfte sich dann ein ganzer Briefwechsel, in welchem neben mancherlei Spielen auch Integralrechnung und höhere Curvenlehre den Gegenstand gelehrter Unter-

[1]) *Essay d'Analyse* etc. pag 331—335. [2]) Ebenda pag. 34. [3]) Ebenda pag. 55. [4]) Ebenda pag. 63. [5]) Ebenda pag. 283—298. Der Brief steht auch in Joh. Bernoulli, *Opera* I, 453—468. [6]) *Essay d'Analyse* etc. pag 299—303.

haltung bildeten. Der Zeit nach erstrecken sich die Briefe vom 17. März 1710 bis zum 15. November 1713, der letzte muss folglich nach der Gutheissung des Druckes vom 9. November Aufnahme gefunden haben. Am bekanntesten ist ein Brief von Niclaus I. Bernoulli vom 9. September 1713 geworden. Der Briefschreiber stellt in ihm folgende Aufgabe[1]): A verspricht dem B einen Thaler, wenn er mit einem gewöhnlichen Würfel gleich beim ersten Wurfe 6 Augen werfe, 2 Thaler, wenn er die 6 im 2. Wurfe wirft, 3, 4 Thaler, wenn er erst im 3., 4. Wurfe die gewünschte Augenzahl erreicht u. s. w. In einem zweiten Falle zahlt A dem B in geometrischer Reihe wachsende Belohnungen. Man fragt nach B's moralischer Erwartung, *quelle est l'esperance de B.* De Montmort meint in seiner Antwort[2]), die Aufgabe biete keinerlei Schwierigkeit. Es handle sich nur um die Auffindung von Reihensummen, bei welchen Zähler als arithmetische oder als geometrische Progression, als 2., 3. Potenzen u. s. w., Nenner aber in geometrischer Progression auftreten. Wir werden im nachfolgenden letzten Abschnitte unseres Bandes die Arbeiten von Daniel Bernoulli aus den Jahren 1730 und 1731 kennen lernen, welche unter Abänderung der Bedingungen der Aufgabe ihre Schwierigkeit, aber auch ihre theoretische Bedeutung wesentlich steigerten.

Unter den von De Montmort genannten Arbeiten war auch eine Abhandlung von Leibniz. Dass es dem Manne, von dem wir (S. 321) sagen durften, er habe die combinatorische Analysis in das Leben gerufen, nicht an Interesse für Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen fehlte, ist nur naturgemäss. Schon 1687 äusserte sich Leibniz in einem Briefe an Vincent Plakke oder Placcius[3]), der seit 1675 Professor am akademischen Gymnasium in Hamburg war, über das thörichte Beginnen der Rechtsgelehrten und der Aerzte, welche den Mund vollnehmen mit Ausdrücken von der Art, dass Gründe nicht nach der Zahl, sondern nach dem Gewichte zu schätzen seien, und die doch von einer Waage nichts wissen, auf welcher die Gründe gewogen werden können[4]). Mit den Mathematikern müsse man die Gewissheit als Ganzes, die Wahrscheinlichkeiten als dessen Theile betrachten. Wahrscheinliches verhalte sich zum Wahren, wie ein spitzer Winkel zu einem rechten. Rechtsentscheidungen, Theilungen u. s. w. sollten nach den Gesetzen dieser Wahrscheinlichkeit stattfinden, so dass, wenn zwei Leute L und M an eine Summe Anspruch erheben, und es doppelt so wahrscheinlich sei, dass L als dass M im Recht sei, eine Theilung

[1]) *Essay d'Analyse* etc. pag. 402. [2]) Ebenda pag. 407. [3]) Allgemeine deutsche Biographie XXVI, 220 Artikel von R. Hoche. [4]) Der Brief ist abgedruckt in der 1768 durch Dutens veranstalteten Genfer Gesammtausgabe der Leibnizischen Werke Bd. VI S. 36—37.

der Summe im Verhältnisse 2 : 1 zwischen beiden stattzufinden habe. Bei den Gerichten sei freilich eine derartige Theilung nicht im Gebrauch.

Es kann ferner nicht Wunder nehmen, dass im Briefwechsel zwischen Leibniz und Jakob Bernoulli die Wahrscheinlichkeitsrechnung berührt wurde. Im April 1703 schrieb Leibniz[1]) zuerst, er habe davon gehört, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche er sehr hoch schätze, von Jenem bedeutend ausgebildet worden sei; er seinerseits wünschte, dass Jemand verschiedene Spiele rechnungsmässig behandelte, das sei eine angenehme und nützliche Aufgabe und auch eines schwerwiegenden Mathematikers nicht unwürdig. Jakob Bernoulli antwortete im October[2]), es sei wahr, dass er schon seit Jahren an einem Werke über Wahrscheinlichkeitsrechnung sitze und nur den letzten Abschnitt der Anwendung auf bürgerliche, sittliche und wirthschaftliche Gegenstände nicht vollendet habe. Er erklärt nun, was er Wahrscheinlichkeit a posteriori nenne und fährt fort, es sei merkwürdig, dass auch der Dümmste durch einen natürlichen Trieb das Gefühl habe, bei Mehrung der Beobachtungen komme man der Wahrheit immer näher. Diesen Satz könne man aber genau und mathematisch beweisen. Man könne noch weiter gehen, und er sei im Stande, die Zahl der Beobachtungen anzugeben, welche dazu führen, dass es 100mal, 1000mal, 10000mal wahrscheinlicher, mithin moralisch gewiss werde, dass ein aufgestelltes Zahlenverhältniss der vorkommenden Fälle das richtige sei, und dieses genüge, um unseren Vermuthungen im bürgerlichen Leben eine wissenschaftliche Grundlage zu geben. Sein Bruder Johann, erzählt Jakob Bernoulli in dem gleichen Briefe, wisse schon seit 12 Jahren von diesem Satze, habe aber aus Verkleinerungssucht sich unwissend gestellt, als De l'Hôpital ihn einmal darüber befragte. Leibniz[3]) wollte auf diese Erfahrungswahrscheinlichkeit nicht viel geben. Ein Brief vom 3. December enthält seinen Einwurf, eine folgende Erfahrung könne vorhergehende über den Haufen werfen. Neue Krankheiten könnten z. B. entstehen, welche frühere Annahmen über die Dauer des menschlichen Lebens umstossen. Am 20. April 1704 bleibt Bernoulli[4]) bei seinen Behauptungen. Es handle sich um einen mathematisch streng bewiesenen Satz, dessen Beweis, wie er wiederholt, Johann vor 12 Jahren sah und richtig fand. Neue Krankheiten könnten allerdings entstehen, aber daraus folge nur, dass immer neue Beobachtungen angestellt werden müssen, und dass es gewiss sei, dass Derjenige ungeheuer von

[1] Leibniz III, 71. [2] Ebenda III, 77—78. [3] Ebenda III, 83—84. [4] Ebenda III, 87—89.

der Wahrheit abweichen würde, der versuchen wollte, aus heutigen Londoner und Pariser Beobachtungen Schlüsse auf die Lebensdauer der Patriarchen vor der Sintfluth zu ziehen. Am 2. August fügte er hinzu[1]), wenn die Erfahrung auch nur näherungsweise Sterblichkeitszahlen liefere, so sei das selbst in der Geometrie nicht unerhört. Das Verhältniss des Kreisdurchmessers zur Peripherie könne genau nur durch unendlich viele Decimalstellen der Ludolphischen Zahl angegeben werden, und doch habe Archimed es genügend erklärt, indem er es zwischen die Grenzen 7 : 22 und 71 : 223 einschloss. Leibniz[2]) liess am 28. November das Beispiel mit der Ludolphischen Zahl nicht gelten. Bei dieser bringe jede neue Decimalstelle eine vermehrte Annäherung. Ob aber jede neue Erfahrung die bisherigen Annahmen stets verstärke, wisse man nicht. Jakob Bernoulli antwortete nicht mehr. Am 28. Februar 1705 fragte er zwar wiederholt[3]), ob Leibniz ihm nicht die Schrift De Witt's über Sterblichkeit, welche schon vorher in dem Briefwechsel mehrfach erwähnt wurde, leihweise zuschicken wollte, aber auf eine weitere Vertheidigung seiner Erfahrungswahrscheinlichkeit liess er sich nicht ein. Im April etwa erwiderte Leibniz[4]), er könne De Witt's Schrift zunächst nicht auffinden, Bernoulli würde aber in ihr kaum Neues entdecken. Sie beruhe auf denselben Grundlagen des zwischen gleich Ungewissem zu nehmenden arithmetischen Mittels wie Pascal's Triangle arithmétique und Huygens' Würfelabhandlung. Man wird in dieser Hinweisung Leibnizens keinen Widerspruch gegen unsere Bemerkung (S. 329), Jakob Bernoulli habe Pascal's *Triangle arithmétique* nicht gekannt, finden wollen. Jakob Bernoulli starb im August 1705. In den vier Monaten, welche höchstens zwischen seinem Tode und dem Empfang des Leibnizischen Briefes lagen, war er meistens krank. Er hat deshalb wahrscheinlich von jenem Hinweis keinen Gebrauch mehr machen können.

Im December 1705 äusserte sich Leibniz[5]) gegen den schottischen Edelmann Thomas Burnett de Kemney, er billige es sehr, wenn man über Verstandesspiele schreibe, nicht grade um ihrer selbst willen, aber weil derartige Untersuchungen in der Kunst des Denkens weiterbringen.

Der erste Band der Veröffentlichungen der Berliner Akademie, der 1710 unter dem Titel der *Miscellanea Berolinensia* im Drucke erschien, enthielt einen kurzen Aufsatz von Leibniz über einige Spiele. Das war derjenige Aufsatz, von welchem De Montmort in der zweiten Ausgabe seines Essay d'Analyse des jeux de Hazard sprach (S. 336).

[1]) Leibniz III, 91. [2]) Ebenda III, 94. [3]) Ebenda III, 95. [4]) Ebenda III, 99. [5]) Leibniz, Philosophische Schriften (herausgegeben von C. J. Gerhardt) III, 304.

Leibniz erzählt darin, dass De Méré seiner Zeit durch Spielaufgaben Pascal die erste Anregung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben habe (Bd. II, S. 688), dass dann Fermat, nach diesem Huygens tiefer eingedrungen seien. Er erwähnt, er selbst habe wiederholt zu Untersuchungen über Spiele aufgefordert, nicht der Spiele halber, sondern wegen der bei der Untersuchung anzuwendenden Kunst der Erfindung. Unter den Spielen, die er als Beispiel nennt, ist das Solitärspiel, und Leibniz meint, aus demselben lasse sich durch Umkehrung ein noch eleganteres Spiel bilden, wenn man, anstatt die Steine allmälig vom Solitärbrett zu entfernen, solche vielmehr allmälig, unter Umkehrung der für ihre Entfernung giltigen Regeln, auf das Brett zu bringen und dadurch eine vorgeschriebene Figur zu erzeugen sich bestrebe. Auch von einem chinesischen, von einem altrömischen Verstandesspiele ist gelegentlich die Rede, aber nirgend geht Leibniz über allgemeine Redensarten hinaus. Wie er insbesondere die Behandlung des Solitärspiels und dessen Umkehrung aufgefasst wissen will, sagt er nirgend.

An den geistreichen und gelehrten Louis Bourguet aus Neufchatel, der sich damals in Venedig aufhielt, schrieb Leibniz im März 1714 zur Empfehlung von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen. Er nannte hier neben De Méré und Pascal, neben Fermat und Huygens noch De Witt und Hudde und endlich Jakob Bernoulli, den er auf jenes Gebiet hingewiesen habe[1], was allerdings, wie wir wissen, nicht zutrifft. Leibniz war mit seinen Hinweisungen erst gekommen, als die Ars Cogitandi längst in Arbeit war. In dem Briefe an Bourguet ist auch der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeit *a priori* und *a posteriori* erwähnt.

Ein weiterer Correspondent Leibnizens war Nicolas Rémond in Paris, der Bruder von Pierre Rémond De Montmort. Auch ihm gegenüber rühmte Leibniz im Februar 1715 die mathematische Beschäftigung mit Spielen und erkundigte sich, ob der Bruder nach seinem Wunsche fortfahre Solches zu üben[2]).

Rémond De Montmort war gleichfalls einmal in brieflichem Verkehre mit Leibniz. Er hatte ihm seinen Essay d'Analyse des jeux de Hazard in erster wie in zweiter Auflage zugeschickt, aber beide Sendungen gingen verloren, wie wir einem Briefe De Montmort's vom Februar 1714 entnehmen[3]). Erst zwei Jahre später, im Januar 1716, antwortete Leibniz[4]), und hier finden sich immer wieder die gleichen Anpreisungen einer mathematischen, die Erfindungsgabe schärfenden

[1]) Leibniz, Philosophische Schriften (herausgegeben von C. J. Gerhardt) III, 570: *Feu Monsieur Bernoulli a cultivé cette matière sur mes exhortations.*
[2]) Ebenda III, 638—639. [3]) Ebenda III, 666. [4]) Ebenda III, 667—669.

Bearbeitung der Spiele, sowie die Erwähnung der in den Miscellanea Berolinensia von 1710 abgedruckten Bemerkungen über das Solitärspiel. Die Benutzung De Montmort's als Mittelperson im Prioritätsstreite (S. 311) fiel kurze Zeit später.

Fassen wir, was in diesem Kapitel von Leibniz zu erwähnen war, und was wir erwähnten, weil es eben um Leibniz sich handelte, zusammen, so ist das äusserst dürftige Ergebniss, dass Leibniz bei oft ausgesprochenem Interesse für die Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts in ihr leistete.

Recht geringfügig sind ferner zwei Aufsätze in den P. T. für 1715 von Niclaus I. Bernoulli[1]) und von De Moivre[2]). Sie betreffen nur anderweitige Auflösungen einer Aufgabe, welche schon in De Moivre's Mensura sortis von 1711 vorkam.

Von hoher Bedeutung war dagegen ein neues Werk von De Moivre, seine *Doctrine of Chances,* welche erstmalig 1716, dann in zweiter veränderter und vielfach erweiterter Ausgabe 1738, zum dritten Male 1756 gedruckt ist. In die zweite Ausgabe ist neben anderen Zusätzen der Inhalt einer 1724 besonders veröffentlichten kleinen Schrift De Moivre's *Annuities upon Lives*, welche selbst mehrere Auflagen erlebte, hineingearbeitet[3]) und nicht minder Theile seines *Miscellanea analytica* von 1730. Die späten Dinge übergehen wir hier selbstverständlich in unserem Berichte, um sie erst im folgenden Abschnitte, wohin sie ihrer Entstehungszeit nach gehören, zur Sprache zu bringen. Die *Doctrine of Chances* ist aus der *Mensura sortis* von 1711 herausgewachsen, und sie verleugnet diesen ihren Ursprung keineswegs. Grundlegend ist und bleibt die Binomialentwicklung (S. 325), deren einzelnen Gliedern bestimmte Deutungen als Wahrscheinlichkeitszahlen beigelegt werden. Und noch Eines ist De Moivre's Entwicklungen in noch höherem Grade als denen seiner Vorgänger eigenthümlich. Er benutzt regelmässig frühere Aufgaben in den späteren, die er auf jene zurückführt, und in jeder einzelnen Aufgabe übt er nicht minder Zurückführung in dem Sinne, dass er auftretende Zahlenergebnisse durch bestimmte Buchstaben ausdrückt, welche im weiteren Verlaufe der Rechnung mitgeführt werden. Neben diesen allgemeinen Erscheinungen sollen noch sehr wenige Einzelheiten erwähnt werden. Die eine besteht darin, dass, während andere Schriftsteller combinatorische Sätze voranstellten, aus welchen sie Folgerungen für die Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten zogen, De Moivre es grade entgegengesetzt

[1]) P. T. XXIX, 133—144. [2]) Ebenda XXIX, 145—158. [3]) Uns lagen die *Doctrine of Chances* von 1738 und die dritte Auflage der *Annuities upon Lives* von 1750 vor, nach welcher wir citiren.

machte[1]). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, fragt er, für die Elemente *aabbbcccc* grade in dieser Reihenfolge zu erscheinen? Das eine *a* zuerst zu greifen, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{9}$, alsdann das zweite *a* zu wählen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}\cdot$ Nun sind noch 7 Elemente vorhanden. Unter ihnen das erste, zweite, dritte *b* zu erfassen, geschieht mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{7}, \frac{2}{6}, \frac{1}{5}\cdot$ Die 4 zuletzt allein übrigen *c* müssen gewiss, also mit der Wahrscheinlichkeit 1, nachfolgen. Das Product aller Wahrscheinlichkeiten ist demnach $\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{1260}$, und 1260 ist die Anzahl der aus den gegebenen Elementen zu bildenden Permutationsformen, eine Rechnung, die in einem Zusatze mit allgemeinen Buchstaben statt der Zahlen 2, 3, 4 wiederholt wird. Wie gross, frägt De Moivre weiter, ist die Wahrscheinlichkeit, aus den Elementen *a, b, c, d, e, f* grade die zwei *a, b* oder die drei *a, b, c* blindlings zu ergreifen? Zuerst *a* oder *b* zu greifen, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{6}\cdot$ Alsdann den von beiden Buchstaben zu greifen, der das erste Mal verfehlt wurde, hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}\cdot$ Das Product beider Wahrscheinlichkeiten ist $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot$ Im anderen Beispiele sind, wie leicht ersichtlich, die mit einander zu vervielfachenden Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{6}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}\cdot$ Auch hier erweitert ein Zusatz die Aufgabe auf das Ziehen von *p* bestimmten Buchstaben unter *n*, die alle von einander verschieden sind, und die Anzahl der entsprechenden Combinationsformen erweist sich als $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}\cdot$ Eine andere nicht uninteressante Einzelheit[2]) besteht in der wieder von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen ausgehenden Beantwortung der Frage, wie viele Permutationsformen aus *n* von einander verschiedenen oder zum Theil unter einander gleichen Elementen es gebe, in welchen eine gegebene Anzahl von Elementen, nicht mehr noch weniger, grade an der Stelle sich befinde, welche ihrer eigenen Rangordnung entspricht.

Wir erwähnten oben, dass De Moivre 1724 ein Büchelchen unter dem Titel *Annuities upon Lives* dem Drucke übergeben habe. De Moivre ging bei diesen Untersuchungen, wie er in der Vorrede erklärt, von Halley's Tafeln aus und fand, dass die Abnahme der Lebenden innerhalb beträchtlicher Zeiträume in arithmetischer Pro-

[1]) *Doctrine of Chances.* Problem XVI, XVII, XVIII pag. 72—74. [2]) Ebenda. Problem XXXIV, XXXV pag. 95—103.

gression erfolge[1]. Rechnung lehrte ihn dann, dass man nicht einmal verschiedene arithmetische Progressionen aneinanderzureihen brauche, sondern dass man vom 12. bis zum 86. Lebensjahre eine einzige mit gleichen Unterschieden von Jahr zu Jahr abnehmende Zahl der Lebenden voraussetzen dürfe. Die nach oben und unten vorkommenden Abweichungen höben sich in ihren Ergebnissen auf. Diese Annahme bildet demnach eine Grundlage der Sätze und Tafeln, welche den Hauptbestandtheil der kleinen Schrift ausmachen. Erst einem Anhange ist es vorbehalten, die Beweise für die vorher ausgesprochenen Behauptungen zu bringen. Als Beispiel möge die erste der bewiesenen Formeln dienen[2].

Lebensergänzung[3] nennt De Moivre die Anzahl n der Jahre, welche zwischen dem Alter des Rentennehmers und dem höchsten Lebensalter, als welches das Alter von 86 Jahren gilt, liegen. Als Zinsverhältniss[4] wird unter Annahme von p-procentiger Verzinsung der Ausdruck $r = 1 + \frac{p}{100}$ benannt. Die Rente selbst soll 1 betragen. Der Baarwerth einer unter allen Umständen, also gleichgiltig ob der Rentennehmer am Leben bleibe oder inzwischen sterbe, n Jahre lang einzuzahlenden Rente 1 sei P, so wird der Baarwerth der auf Lebensdauer des $86 - n$-jährigen Rentennehmers vereinbarten Einheitsrente sich auf $\frac{1 - \frac{r}{n} \cdot P}{r - 1}$ belaufen. Wenn das Absterben der Altersgenossen des Rentennehmers innerhalb n Jahren so stattfindet, dass die Anzahl der Lebenden sich jährlich um Gleiches vermindert, so beträgt diese Durchschnittszahl der Todesfälle jährlich $\frac{1}{n}$ der zu Anfang Lebenden, oder die Wahrscheinlichkeit das nächste, das nachfolgende, ... das $n$te Jahr zu erreichen ist $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \cdots \frac{1}{n}$. Mit ihr wird die Rente 1 vervielfacht und der Baarwerth durch Division mit entsprechenden Potenzen von r gefunden. Die Baarwerthe sämmtlicher Jahresbeträge vereinigen sich also zu

$$\frac{n-1}{nr} + \frac{n-2}{nr^2} + \cdots + \frac{1}{nr^{n-1}},$$

welche $n - 1$-gliedrige Reihe zu summiren ist. Dazu bedürfe es, erklärt De Moivre[5], einer etwas mehr als gewöhnlichen Fertigkeit in

[1] *Annuities upon Lives* pag. VIII: *Two or three Years after the Publication of the first Edition of my Doctrine of Chances I took the Subject into consideration: and consulting Dr. Halley's Table of Observations, I found that the Decrements of Life, for considerable Intervals of Time, were in Arithmetic Progression.* [2] Ebenda pag. 83—86. [3] *Complement of Life.* [4] *Rate of Interest.*
[5] *As the Reasonings that led me to that general Expression, requires something*

der Reihenlehre, und deshalb wolle er die Formel nicht ableiten. Er begnügt sich damit, sie nachträglich zu beweisen. Die von ihm als P bezeichnete Grösse sei bekannt. Sie sei

$$P = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^n}.$$

Daraus folge

$$1 - \frac{r}{n} \cdot P = \frac{n-1}{n} - \frac{1}{nr} - \frac{1}{nr^2} - \cdots - \frac{1}{nr^{n-1}}.$$

Dann sei ferner

$$\frac{1}{r-1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots$$

Multipliciere man beide Reihen mit einander, so entstehen die Theilproducte

$$\begin{array}{l} \frac{n-1}{nr} - \frac{1}{nr^2} - \frac{1}{nr^3} - \frac{1}{nr^4} - \frac{1}{nr^5} - \frac{1}{nr^6} \text{ etc.} \\ \qquad \frac{n-1}{nr^2} - \frac{1}{nr^3} - \frac{1}{nr^4} - \frac{1}{nr^5} - \frac{1}{nr^6} \text{ etc.} \\ \qquad\qquad \frac{n-1}{nr^3} - \frac{1}{nr^4} - \frac{1}{nr^5} - \frac{1}{nr^6} \text{ etc.} \\ \qquad\qquad\qquad \frac{n-1}{nr^4} - \frac{1}{nr^5} - \frac{1}{nr^6} \text{ etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{n-1}{nr^5} - \frac{1}{nr^6} \text{ etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{n-1}{nr^6} \text{ etc.,} \end{array}$$

deren Addition

$$\frac{n-1}{nr} + \frac{n-2}{nr^2} + \frac{n-3}{nr^3} + \frac{n-4}{nr^4} + \frac{n-5}{nr^5} + \frac{n-6}{nr^6} \text{ etc.}$$

liefere, das heisst die Reihe, als deren Summe $\dfrac{1 - \frac{r}{n} \cdot P}{r-1}$ genannt worden sei.

Bei Untersuchung des Werthes verbundener Lebensrenten[1]) nimmt De Moivre seine Zuflucht zu einer künstlich erfundenen Lebensdauer[2]), bei welcher angenommen wird, die Wahrscheinlichkeit im folgenden Jahre bei Leben zu bleiben, beziehungsweise zu sterben, sei stets gleichbleibend $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{b}{a+b}$, oder, mittels $a+b=s$, die Lebenswahrscheinlichkeit für das je nächste Jahr sei $\frac{a}{s}$. Die Wahrscheinlichkeit ein 2., 3., 4. ... Jahr zu erreichen ist demnach $\frac{a}{s}, \frac{a^2}{s^2}, \frac{a^3}{s^3}, \cdots$, und der Baarwerth einer Einheitsrente besteht in der Summe der

more than an ordinary Skill in the Doctrine of Series, I shall forbear to mention them in this Place.

[1]) *Annuities upon Lives* pag. 87–92. [2]) *a fictitious Life.*

geometrischen Progression $\frac{a}{rs} + \frac{a^2}{r^2s^2} + \frac{a^3}{r^3s^3} + \cdots = \frac{a}{rs-a}$. Hatte man nun vorher den Werth der Einheitsrente als M kennen gelernt, so folgt $M = \frac{a}{rs-a}$, $\frac{a}{s} = \frac{Mr}{M+1}$ oder die Lebenswahrscheinlichkeit für jedes nächste Jahr unter Annahme der künstlichen Sterblichkeitsordnung ist nachträglich rechnungsmässig gefunden.

Ein späterer Schriftsteller, dessen Leistungen auf allen Gebieten der Mathematik im XVIII. Abschnitte unsere Bewunderung in Anspruch nehmen werden, aber auch dort nicht sämmtlich zur Rede kommen können, weil wir genöthigt sind eine Zeitgrenze einzuhalten, Leonhard Euler, hat in den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1760 De Moivre's künstliche Sterblichkeitsordnung als die thatsächlich vorhandene betrachtet[1]).

Wenn ein Ergebniss der Wahrscheinlichkeitsrechnung statt der Wirklichkeit genommen wird, so ist damit ein Fehler verbunden. Noch weniger vermeidet man Fehler, wenn das Ergebniss einer Beobachtung als unbedingt wahr betrachtet wird. Diesen Fehler einer Schätzung zu unterbreiten ist nach und nach eine der wichtigsten Aufgaben geworden. Schon Jakob Bernoulli hat ihr in seiner Fassung des Gesetzes der grossen Zahlen bis zu einem gewissen Grade seine Aufmerksamkeit zugewandt. Eine Fehlerschätzung bei astronomischen und geodätischen Aufgaben hat zuerst Roger Cotes in seinem nachgelassenen 1722 gedruckten Aufsatze *Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici* versucht, indem er zugleich den Begriff eines von einander verschiedenen Gewichtes der Beobachtungen einführte. Wir werden darüber im 99. Kapitel berichten, wenn wir die gleiche Abhandlung in anderem Zusammenhange besprechen. Wir verweisen einstweilen nur mit dieser leisen Andeutung auf die spätere Stelle.

97. Kapitel.

Reihenlehre. Differenzenrechnung.

Wir sahen im 85. und 86. Kapitel die Lehre von den unendlichen Reihen entstehen und sogleich ein gewaltiges Wachsthum annehmen. Wenn auch etwas geringer, ist der Zusatz, den diese Lehre in dem ersten Viertel des achtzehnten Jahrhunderts erhielt, und den wir jetzt zu schildern haben, keineswegs unbedeutend. Wir werden uns gestatten bei dieser Gelegenheit auch einige Untersuchungen zu er-

[1]) *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.*

wähnen, von denen es zweifelhaft sein könnte, ob sie mit Recht hier zur Behandlung kommen, welche wir aber anderwärts noch weniger gut unterzubringen wissen.

So z. B. gehören die 1703 in den Abhandlungen der Pariser Akademie des Sciences von Leibniz[1]) veröffentlichten Gedanken über ein Zahlensystem mit der Grundzahl 2 nur sehr bedingter Weise zur Reihenlehre. Leibniz hat schon 1698 die Grundzüge seiner Dyadik in einem Briefe an Joh. Ch. Schulenburg[2]) auseinandergesetzt und dort behauptet, sich schon seit zwanzig und mehr Jahren damit beschäftigt zu haben[3]). Im Drucke aber sprach er, wie bemerkt, erst 1703 es aus, dass die beiden Zahlzeichen 0 und 1 genügen, jede beliebige Zahl darzustellen, oder anders ausgedrückt, dass jede Zahl in eine nach Potenzen der Grundzahl 2 fortschreitende Reihe entwickelt werden könne, deren Coefficienten nur 0 oder 1 seien. Zum praktischen Gebrauche empfiehlt Leibniz dieses Zweiersystem allerdings nicht. Die Reihen werden für nur mässig grosse Zahlen viel zu lang, jedenfalls weit länger als sie in dem Systeme von der gewohnten Grundzahl 10 ausfallen, oder gar in einem solchen von der Grundzahl 12 oder 16 ausfallen würden, wenn man ein solches in Uebung hätte. Nur das theoretische Interesse wird hervorgehoben, und ferner glaubte Leibniz irrigerweise die chinesischen Kuas als dyadisch geschriebene Zahlen erklären zu können (Bd. I, S. 9).

Eine mit der Reihenlehre nahe verwandte Aufgabe ist die Auffindung des Zusammenhangs zwischen trigonometrischen Functionen eines einfachen und eines vielfachen Winkels. Vieta (Bd. II, S. 557—558) hat sich 1594 dieser Aufgabe zugewandt, rund ein Jahrhundert später erschien sie neuerdings auf der Tagesordnung. Johann Bernoulli[4]) wies im Juniheft 1700 der A. E. darauf hin. Im Decemberhefte äusserte sich Jakob Bernoulli[5]) darüber. Die Aufgabe der Winkeltheilung sagte er, sei algebraisch, wenn die Theilung in ganzzahligen Verhältnissen ausgeführt werden solle, transcendent, wenn eine unbestimmte Theilung in ganz beliebigem Verhältnisse verlangt werde. Wir wissen, dass die beiden Brüder Bernoulli jede Gelegenheit, ob passend oder unpassend, ergriffen, um sich Unannehmlichkeiten zu sagen, und dass die Wissenschaft aus ihrem gehässigen Verfahren Nutzen zu ziehen pflegte. Johann Bernoulli[6]) gab im Aprilhefte 1701 eine Reihe, welche die Sehne des $n$fachen Bogens auf die des einfachen zurückführte, und welche nur bei ganzzahlig

[1]) Leibniz VII, 223—227. [2]) Ebenda VII, 240—242. [3]) *Etsi haec jam a viginti ac amplius annis in mente habuerim.* [4]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 331—332. [5]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 892. [6]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 386—389.

positivem n abbrechend, in anderen Fällen unendlich verlaufend, das Algebraische mit dem Transcendenten in eine Formel vereinigte; ein Beweis wurde nicht gegeben. Dafür erbrachte ihn Jakob Hermann[1]) im Augustheft 1703 derselben Zeitschrift. Der Beweis stützte sich auf den sogenannten ptolemäischen Lehrsatz vom Sehnenviereck.

Hermann befand sich fortwährend in engster Fühlung mit seinem Lehrer Jakob Bernoulli, und dieser kannte Hermann's Aufsatz, Hermann einen solchen von ihm, bevor beide im Druck erschienen. Der Bernoulli'sche Aufsatz kam in dem Jahrgange 1702 der Abhandlungen der Académie des Sciences heraus[2]). Auch Jakob Bernoulli begründete die Formel der Winkelvervielfachung geometrisch und zwar in doppelter Weise. Einmal machte er den Uebergang von einem Bogen zum doppelten, von diesem zum vierfachen u. s. w. und zeigte nun inductiv, wie die Coefficienten der einzelnen Glieder gebildet seien, um das Gesetz dieser Bildung auch bei anderen Vervielfachungen als fortgesetzten Verdoppelungen anzuwenden. Das andere Mal liess er die Bögen, deren Sehnen ermittelt werden sollten, in arithmetischer Reihe wachsen, so dass der Reihe nach der doppelte, der dreifache, der vierfache, ... der $n$fache Bogen untersucht wurde.

Nun nahm Johann Bernoulli[3]) wieder das Wort. Er veröffentlichte in ebendemselben Jahrgange 1702 der Abhandlungen der Académie des Sciences einen Aufsatz, der zunächst mit Winkelvervielfachung nicht im Geringsten zusammenzuhängen schien. Es handelte sich um die jüngst durch Leibniz und ziemlich gleichzeitig durch Johann Bernoulli mittels Zerlegung in Partialbrüche bewerkstelligte Integration rationalgebrochener Ausdrücke, von der im 93. Kapitel die Rede war. Bei dieser Gelegenheit lehrte Johann Bernoulli die Umformung $\frac{a}{b^2-z^2}dz = \frac{a}{2bt}dt$ mittels $z = \frac{(t-1)b}{t+1}$ und die Umformung $\frac{a}{b^2+z^2}dz = -\frac{a}{2bt\sqrt{-1}}dt$ mittels $z = \frac{(t-1)b}{t+1}\sqrt{-1}$. Der Uebergang von einem Arcustangens zum Logarithmen einer imaginären Zahl war damit vollzogen.

Es mag wohl als auffallend bezeichnet werden, dass dieser *Logarithme imaginaire*, wie Johann Bernoulli sich ausdrückte, keinerlei Anstoss erregte und von Niemand in Zweifel gezogen wurde, auch dann nicht, als er ihn im Junihefte 1712 der A. E. mit der Bogenvervielfachung in Verbindung brachte[4]). Johann Bernoulli nahm irgend einen Bogen A, einen zweiten $B = nA$. Als Einheit war der Halbmesser gewählt und $\operatorname{tang} A = x$, $\operatorname{tang} B = y$ gesetzt. Daraus

[1]) A. E. 1703 pag. 345—351. [2]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 921—929.
[3]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 393—400. [4]) Ebenda I, 511—514.

folgt einestheils $dA = \frac{dx}{x^2+1}$ und $dB = \frac{dy}{y^2+1}$, anderntheils $dB = n\,dA$, also $\frac{dy}{y^2+1} = \frac{n\,dx}{x^2+1}$, beziehungsweise $\frac{2\sqrt{-1}}{y^2+1}\,dy = \frac{2n\sqrt{-1}}{x^2+1}\,dx$, oder $\frac{dy}{y-\sqrt{-1}} - \frac{dy}{y+\sqrt{-1}} = \frac{n\,dx}{x-\sqrt{-1}} - \frac{n\,dx}{x+\sqrt{-1}}$. Die Integration dieser Differentialgleichung liefert

$\log(y-\sqrt{-1}) - \log(y+\sqrt{-1}) = n\log(x-\sqrt{-1}) - n\log(x+\sqrt{-1})$,

und der Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen lässt

$$\frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}} = \left(\frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}}\right)^n$$

erkennen, woraus $(x-\sqrt{-1})^n.(y+\sqrt{-1}) = (x+\sqrt{-1})^n.(y-\sqrt{-1})$ entsteht. Die auftretende unmögliche Grösse $\sqrt{-1}$ bildet kein Hinderniss, weil sie sich weghebt[1]. Das Gesetz, nach welchem y aus x sich bildet, werde bei genauem Zusehen als das nachfolgende erkannt: Man habe $(x+1)^n$ nach dem Binomialtheoreme in fallender Ordnung zu entwickeln; von den so entstehenden Gliedern nehme man, und zwar mit alternirendem Vorzeichen, die ungraden Glieder als Zähler, die graden als Nenner eines Bruches; der so entstehende Werth sei bei ungradem n Tangente, bei gradem n Cotangente von nA. In einer Fortsetzung, welche das Juliheft 1712 der A. E. brachte[2], schrieb Johann vor, die Entwicklung von $(1+x)^n$ nach steigenden Potenzen von x vorzunehmen und hierauf als Werth von y den Bruch anzuschreiben, der im Zähler die ungraden, im Nenner die graden Glieder jener Entwicklung unter Einführung alternirender Vorzeichen besitze. Die so aufgestellte Regel habe einen doppelten Vorzug vor der früheren Fassung, sie vermeide die Unterscheidung grader oder ungrader n, und sie bleibe auch dann noch anwendbar, wenn n nicht ganzzahlig gewählt worden sei.

Der Uebergang zwischen trigonometrischen Functionen einfacher und vielfacher Bögen war vollzogen. Ein verwandtes Gebiet bildete die Aufsuchung eines Bogens, wenn eine trigonometrische Function desselben gegeben war, und auch hier haben wir einen nicht unbeträchtlichen Fortschritt zu bemerken. Gregory hatte (S. 72) die Reihe $x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3 + \frac{1}{5}\operatorname{tg} x^5 - \frac{1}{7}\operatorname{tg} x^7 + \cdots$ gefunden, und einen besonderen Fall dieser allgemeinen Formel stellte

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

[1] *nec obstat quod $\sqrt{-1}$ quantitas impossibilis in illa reperiatur: ea enim in applicatione ad speciale quodlibet exemplum reperietur in singulis aequationis terminis, et ideo per divisionem tolletur.* [2] Joh. Bernoulli *Opera* I, 514.

vor Augen. Ihn hat Leibniz (S. 75) selbständig nachentdeckt, und auch De Lagny hat ihn 1682 aufgefunden, wie er später gelegentlich sich äusserte[1]). Zur thatsächlichen Ausrechnung der Zahl π war freilich diese Reihe nicht zu empfehlen. De Lagny berichtet im Zusammenhang mit der eben erwähnten Aeusserung, Ozanam habe bemerkt, man müsse, um auch nur die Genauigkeit $\pi = 3{,}14$ zu erreichen, mehr als 300 Stellen jener Reihe in Rechnung ziehen. Eine zweckmässige Umformung der Gregory'schen Reihe gab dagegen John Machin, ein Astronom, der zur Untersuchungscommission im Prioritätsstreite gehörte, und von dessen Berechnung der Zahl π wir (S. 295), als wir die Mitglieder jenes Ausschusses musterten, sagten, sie sei 1706 in Jones' Synopsis palmariorum matheseos der Oeffentlichkeit übergeben worden. Machin's Umformung beruht auf dem Kunstgriffe[2]), einen Bogen zu finden, der selbst eine in die Berechnung sich leicht einfügende Tangente habe, und von welchem ein Vielfaches sich nur um einen geringen Betrag von $\frac{\pi}{4}$ unterscheide. Sei z. B. $\operatorname{tg} a = \frac{1}{5}$, so ist

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - (\operatorname{tg} a)^2} = \frac{5}{12} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} 4a = \frac{2 \operatorname{tg} 2a}{1 - (\operatorname{tg} 2a)^2} = \frac{120}{119}.$$

Nun ist $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ von $\operatorname{tg} 4a$ nur um $\frac{1}{119}$ unterschieden, folglich liegt auch $4a = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ nahe bei $\frac{\pi}{4}$. Um dann $\frac{\pi}{4}$ selbst zu erhalten, wird von der Formel $\operatorname{tg}(A - B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}$ Gebrauch gemacht. Setzt man $A = 4a$, $B = \frac{\pi}{4}$, so wird $\operatorname{tg}\left(4a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119} \cdot 1} = \frac{1}{239}$, also $4a - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ und

$$\frac{\pi}{4} = 4a - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Die zweimal in Anwendung gebrachte Gregory'sche Formel liefert also

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \cdots\right)$$

und mit Hilfe dieser Reihen hat Machin $\frac{\pi}{4}$ auf 100 Decimalstellen genau ausgerechnet.

---

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1719, pag. 144. [2]) Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. 2e édition.* Paris 1831. pag. 156 Note 1 und pag. 279—282.

De Lagny[1]) hat in dem wiederholt erwähnten der Pariser Académie des Sciences am 23. Juni 1717 vorgelegten Aufsatze nun gar π bis auf 127 Decimalstellen genau ausgerechnet, indem er von $\operatorname{tg} 30^0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ausging.

In die eigentliche Reihenlehre gehören Untersuchungen, welche in Italien zuerst veröffentlicht wurden, dann in Deutschland und Frankreich Gelegenheit zu wenig fruchtbaren Streitigkeiten[2]) gaben, welche gleichwohl besprochen werden müssen, weil sie kennzeichnend für die Auffassung sind, mit welcher man damals in den genannten Ländern an diese Dinge herantrat. Guido Grandi[3]) (1671—1742), ein in Cremona geborener Camaldulensermönch, war seit 1700 Professor der Philosophie an der Universität Pisa, welcher er von 1714 an als Professor der Mathematik angehörte. Er gab 1703 eine Schrift unter dem Titel: Geometrisch dargelegte Quadratur des Kreises und der Hyperbel mit Hilfe unendlich vieler Hyperbeln und Parabeln[4]) heraus, in welcher die Division $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ als Ausgangspunkt diente, von welchem aus die Einsetzung von $x = 1$ zu der Gleichung $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ führte. Allerdings hatte Jakob Bernoulli bereits in seiner Abhandlung von 1696 auf dieses Paradoxon hingewiesen (S. 92), aber er hatte die Erklärung beigefügt, die auffallende Form entstehe, weil bei fortgesetzter Division der Rest jedesmal der gleiche nur mit anderem Vorzeichen versehene sei, und hatte anderweitige Folgerungen nicht gezogen. Grandi dagegen vereinigte je zwei aufeinander folgende Reihenglieder $1 - 1$ zu 0 und schrieb nun $0 + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{2}$ als Symbol der Schöpfung der Welt aus dem Nichts. Ihm trat Marchetti[5]), der gleichfalls in Pisa lehrte, entgegen. Grandi liess 1710 ein zweites Buch folgen: Untersuchung über die unendlich vielen Ordnungen des Unendlichgrossen und Unendlichkleinen[6]), in welchem die gleiche Behauptung wiederholt war. Ueberdies beschäftigte sich Grandi jetzt auch mit Leibniz, dessen Differentialen und dessen philosophischer Auffassung des Unendlichkleinen[7]). Es mag wohl sein, dass diese Einbeziehung des berühmten Gelehrten wesentlich dazu beitrug, Grandi's Buch ausser-

---

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1719 pag. 135–144. [2]) Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen S. 65—70. [3]) Poggendorff I, 940. [4]) *Quadratura circuli et hyperbolae per infinitas hyperbolas et parabolas geometrice exhibita.* [5]) Poggendorff II, 44. [6]) *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus disquisitio.* [7]) Vivanti, *Il concetto d'infinitesimo* an den im Register unter dem Worte *Grandi* angegebenen Stellen.

halb Italien Leser und Gegner zu verschaffen. Leibniz trat in den A. E. von 1712[1]) und ausserdem in dem V. Supplementbande der A. E. in Gestalt eines an Wolf gerichteten offenen Briefes[2]) in den Streit ein, der besonders von Varignon[3]) geführt wurde. Ausserdem wurden über den gleichen Gegenstand noch zahlreiche Briefe zwischen Leibniz und Wolf[4]), zwischen Leibniz und Varignon[5]), zwischen Leibniz und Grandi[6]), zwischen Leibniz und Niclaus I. Bernoulli[7]) gewechselt. Grandi berief sich, um den Satz $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$ zu erläutern, auf ein dem Rechtsleben entnommenes Beispiel. Ein Vater hinterlässt zwei Söhnen einen werthvollen Edelstein, der abwechselnd je ein Jahr in dem Besitze eines jeden von beiden bleiben solle, ohne veräussert werden zu dürfen; dann gehöre er thatsächlich jedem zur Hälfte, während dessen Besitzrecht durch die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ dargestellt werde. Leibniz liess das Beispiel in seinem offenen Briefe an Wolf[8]) nicht gelten. Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem angenommenen Falle und der unendlichen Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ liege darin, dass die gleiche Erbberechtigung der beiden Brüder unangetastet bleibe, wenn sie auch nicht für ewige Zeiten, sondern nur etwa für 100 Jahre den Edelstein umschichtig besitzen sollen, während die Reihe auf 100 Glieder beschränkt den Werth 0 habe und erst bei unendlich vielen Gliedern zu $\frac{1}{2}$ werde. Die Unendlichkeit sei also der wesentlichste Umstand bei der Zusammenfassung der Reihe in eine Summe, und zwar verhalte sich die Sache so: Die unendliche Anzahl der Reihenglieder könne nur grad oder ungrad sein. Sei sie grad, so entstehe 0 als Reihensumme, 1 dagegen, wenn die Gliederzahl ungrad sei. Da aber kein Vernunftgrund für das vorzugsweise Gradsein oder das vorzugsweise Ungradsein der Gliederzahl geltend gemacht werden könne, so geschehe es durch wunderbare Eigenart der Natur[9]), dass beim Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen zugleich ein Uebergang von dem Disjunctiven, welches aufhöre, zu dem Bleibenden, welches in der Mitte zwischen dem Disjunctiven liege, stattfinde. Wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vorschreibe, man habe das arithmetische Mittel, d. h. die Hälfte der Summe gleich leicht erreichbarer Grössen in Rechnung zu ziehen, so beobachte hier die Natur der Dinge das gleiche Gesetz der Gerechtigkeit. Diese Art zu schliessen sei freilich

[1]) Leibniz V, 387—389. [2]) Ebenda V, 382—387. [3]) A. E. 1712 pag. 154—166 und *Histoire de l'Académie des Sciences*. Année 1715 pag. 203—225. [4]) Leibniz, Supplementband zum mathematischen Briefwechsel 143—149. [5]) Ebenda IV, 187—190. [6]) Ebenda IV, 215—220. [7]) Ebenda III, 979—992. [8]) Ebenda V, 386. [9]) *admirabili naturae ingenio.*

mehr metaphysisch als mathematisch, aber dennoch sicher, wie denn überhaupt die Anwendung der Vorschriften der wahren Metaphysik in der Mathematik, in der Analysis, in der Geometrie sogar weit häufiger von Nutzen sei, als man gemeinhin glaube. Die Natur, so sagt Leibniz in einem an Grandi gerichteten Briefe[1]), schreibe den Dingen das Gesetz der Continuität vor, und dessen Anwendung führe niemals irre, wenn es auch hier nicht auf strenger Beweisführung, sondern auf Gründen des Uebereinkommens[2]) beruhe, dass man sagen dürfe, Gott selbst habe auf das Stetigkeitsgesetz Rücksicht genommen. Hier greift Leibniz auf Dinge, welche er, wie wir uns erinnern (S. 266), am Anfange des Jahrhunderts öffentlich zu vertheidigen gehabt hatte.

In Grandi's Schrift war noch ein misslicher Punkt, an welchen seine Gegner sich stiessen. Wallis hatte (Bd. II, S. 825) das Negative mehr als unendlich genannt. Leibniz hatte in den höheren Differentialen Unendlichkleines von verschiedener Ordnung in die Mathematik eingeführt, und dem Unendlichkleinen entsprach auch Unendlichgrosses verschiedener Ordnung. Grandi hat beide Auffassungen des mehr als Unendlichen in unklarer Weise vermengt. Dagegen wandte sich Leibniz in dem oben erwähnten Aufsatze[3]) in den A. E. von 1712. Schon Antoine Arnauld[4]) habe seiner Zeit in Paris ihm seine Verwunderung darüber ausgesprochen, dass die Mathematiker die Proportion $1 : -1 = -1 : 1$ für richtig halten könnten. Unter allen Umständen sei -1 kleiner als $+1$, und so besage jene Proportion: ein Grösseres verhalte sich zu einem Kleineren wie ein Kleineres zu einem Grösseren, und das sei unmöglich. Dieser Ansicht schliesst sich Leibniz der Sache nach vollständig an, der Form nach könne man sich aber solcher Proportionen bei der Rechnung mit gleicher Sicherheit und demselben Nutzen wie anderer nur eingebildeter Grössen bedienen[5]). Imaginär könne man ein Verhältniss nennen, dem kein Logarithmus entspreche, und das sei hier der Fall. Da $\log 1 = 0$ sei, so würde $\log\left(\frac{-1}{1}\right) = \log(-1) - \log 1 = \log(-1)$ sein, und einen Logarithmus von -1 gebe es nicht. Er könne nämlich nicht positiv sein, denn einem positiven Logarithmen entspreche eine die Einheit übersteigende positive Zahl. Er könne ebensowenig negativ sein, denn einem negativen Logarithmen entspreche eine unterhalb der Einheit befindliche abermals positive Zahl. Da mithin

---

[1]) Leibniz IV, 219. [2]) *convenientiae rationibus.* [3]) Leibniz V, 387—389. [4]) Einer der Führer der sogenannten Partei von Port-Royal und naher Freund von Blaise Pascal. [5]) *etsi in calculo haec, ut alia imaginaria, tuto et utiliter adhibeatur.*

der Logarithmus von — 1 weder positiv noch negativ sein könne, so bleibe nichts anderes übrig, als dass er überhaupt nicht wahrhaft vorhanden, sondern imaginär sei[1]). Man könne den Beweis dieser Behauptung auch dadurch führen, dass, wenn es in Wahrheit einen Logarithmus von — 1 gäbe, dessen Hälfte der Logarithmus von $\sqrt{-1}$, also von einer imaginären Zahl sein müsste, was widersinnig sei. Aus allen diesen Erwägungen folge, dass Wallis etwas Menschliches begegnet sei, als er sagte, das Verhältniss von 1 zu — 1 sei mehr als unendlich[2]). Damit wolle keineswegs in Abrede gestellt werden, dass — 1 kleiner als Null sei, nur müsse man diesem Ausdrucke den richtigen Sinn beilegen, wie es überhaupt in der Mathematik manche Benennungen gebe, deren Sinn besondere Erörterung bedürfe. Mittels dieses Ausspruches war für Leibniz der Uebergang zum Unendlichgrossen und Unendlichkleinen gewonnen und er erörtert jene Begriffe wieder in ganz ähnlicher Weise, wie im Journal de Trévoux von 1701 (S. 264). Ein unendlich kleiner Irrthum sei ein solcher, der kleiner als jeder gegebene, also in Wahrheit nicht vorhanden sei, und wenn man Gewöhnliches, Unendlichgrosses und Unendlichmalunendlichgrosses vergleiche, so sei das wie wenn man die Durchmesser eines Staubkornes, der Erde und des Fixsternhimmels vergleiche. Solche Erörterungen seien wohl im Stande Streitigkeiten wie die zwischen Grandi und Varignon beizulegen, beziehungsweise zu verhüten.

Varignon's Bemängelungen von Grandi's Buch, deren Abdruck im Aprilheft 1712 der A. E. oben gleichfalls Erwähnung fand, zielten auf die irrige Vermengung Leibnizischer und Wallis'scher Auffassung des Mehralsunendlichen, deren Grandi sich schuldig gemacht hatte, und welche uns heute von Seiten eines Mannes, dem man bei alledem den Namen eines ganz tüchtigen Mathematikers nicht absprechen kann, gradezu verblüffend erscheint. In dem Aufsatze vom 16. Februar 1715, welcher in den Veröffentlichungen der Académie des Sciences gedruckt ist, hat Varignon den Satz ausgesprochen, eine aus der Division durch ein Binomium hervorgegangene unendliche Reihe sei:

1. immer richtig, wenn die beiden das Binomium bildenden Glieder unter einander ungleich seien, und das Grössere derselben an erster Stelle stehe;

2. immer falsch, wenn unter der gleichen Voraussetzung das kleinere der beiden das Binomium bildenden Glieder an erster Stelle stehe;

[1]) *superest ut sit non verus, sed imaginarius.* [2]) *Et proinde nonnihil humani passus est insignis in paucis Geometra Iohannes Wallisius, cum dixisset rationem* 1 *ad* — 1 *esse plus quam infinitam.*

3. liefere die Division, sofern beide Glieder des Divisors einander gleich seien, einen vorher bekannten unendlich grossen Quotienten, wenn die Glieder des Binomiums von einander abzuziehen, und Falsches, wenn jene zu addiren seien.

Varignon fügte dann ähnliche Regeln für die Potenzentwicklung eines Binomiums bei negativ ganzzahligem Exponenten hinzu. Bezüglich der Entwicklung bei gebrochenem Exponenten gesteht er ein, noch kein abschliessendes Ergebniss gefunden zu haben. Am Anfang des für die Lehre von der Reihenconvergenz hochwichtigen Aufsatzes erklärt Varignon, dessen Inhalt sei eigentlich schon seit October 1712 druckfertig und nur äussere Hindernisse hätten die Veröffentlichung verzögert. Damit stimmt ein an Leibniz gerichteter Brief vom 19. November 1712 überein[1]), in welchem der Hauptsatz, wann die Division eine richtige Reihe ergebe, sich bereits vorfindet.

Wir haben (S. 352) mit Beziehung auf Grandi's Reihe auch einen Briefwechsel zwischen Leibniz und Niclaus I. Bernoulli erwähnt. Dieser Briefwechsel betraf freilich nicht einzig die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

die Giltigkeit von Reihen im Allgemeinen trat in Untersuchung. Niclaus I. Bernoulli warf am 25. October 1712 die Frage auf, wann wohl die Summe einer Reihe unmöglich werde, und beantwortete sie sogleich dahin[2]), das sei der Fall, wenn die Reihe

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \cdots$$

heisse, oder aus dieser Reihe durch Addition, durch Multiplication, durch Differentiation entstehe, während x einen negativen, die Einheit überschreitenden Werth besitze und n eine echt oder unecht gebrochene Zahl mit gradem Nenner sei. Divergenz der Reihe, heisst es in einem späteren Briefe[3]) vom 7. April 1713, genüge nicht für sich allein, um die Unmöglichkeit ihres Werthes darzuthun. So sei

$$(1-x)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1\,.\,4}{3\,.\,6}x^2 + \frac{1\,.\,4\,.\,7}{3\,.\,6\,.\,9}x^3 + \frac{1\,.\,4\,.\,7\,.\,10}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,12}x^4 + \cdots$$

und

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^2 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^3 + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}x^4 + \cdots.$$

Beide Reihen seien divergent, wenn $x > 1$, aber dabei habe die erste Reihe einen möglichen, die zweite einen imaginären Werth.

---

[1]) Leibniz IV, 189. [2]) Ebenda III, 980. [3]) Ebenda III, 982—984.

Der Grund der vorhandenen Ungewissheit liege in dem Reste R[1]), welcher eigentlich der Reihe noch fehle. Dieser könne trotz der Rationalität aller eigentlichen Reihenglieder unmöglich sein, und dann mache er die Reihe selbst unmöglich. Das Restglied sei es auch, auf welchem der Wortstreit[2]) zwischen Varignon und Grandi beruhe. Niclaus I. Bernoulli hat hier ganz unbefangen des Ausdruckes einer divergenten Reihe sich bedient, ohne eine Begriffsbestimmung zu geben, ohne zu sagen, was für ihn divergent heisse, wenn es auch nahe liegt zu vermuthen, er habe das Wachsen der Reihenglieder darunter verstanden. Leibniz bediente sich in seiner Antwort vom 28. Juni 1713 des Wortes advergente Reihe und erläuterte es auch[3]). Eine advergente Reihe muss nach Leibniz sich so weit fortsetzen lassen, dass sie sich von einem endlichen möglichen Werthe um weniger als eine angebbare Grösse unterscheide und kann daher nicht unmöglich sein. Von einer nicht advergenten Reihe kann man dagegen nicht als gewiss behaupten, sie stelle eine endliche unmögliche Grösse dar, denn sie kann auch ein Unendlichgrosses darstellen. Von einem unmittelbaren Erkennungszeichen advergenter wie divergenter Reihen ist freilich bei Leibniz so wenig wie bei Niclaus I. Bernoulli die Rede. Bemerkenswerth erscheint Leibnizens Vorschlag[4]), die zu untersuchenden Reihen nicht auf die Form der binomischen Reihe zurückzuführen, sondern zu versuchen, ob man nicht alternirende Theile, deren jeder aus einem oder mehreren Gliedern bestehen könne, hervorzubringen im Stande sei. Nahezu gleichzeitig schrieb Leibniz unter dem 25. October 1713 an Johann Bernoulli[5]), jede Reihe, welche aus alternirenden ins Unendliche abnehmenden Theilen bestehe, sei advergent, und eine Methode scheine erdacht werden zu können, jede advergente Reihe in eine solche von der erwähnten Art umzuformen. Unsere Leser erinnern sich aus dem 86. Kapitel (S. 78—79), dass ähnliche Gedanken schon in dem Entwurfe *Compendium quadraturae arithmeticae* geäussert waren, dass sie in dem am 10. Januar 1714 an Johann Bernoulli gerichteten Briefe[6]) bis zur Einschliessung alternirender Reihen mit unendlich abnehmenden Gliedern zwischen zwei Grenzen sich klärten.

Wir haben im Laufe dieses Kapitels zweimal einen Gegenstand

---

[1]) *residuum R.* [2]) *logomachia.* [3]) Leibniz III, 985: *Illud certum est, quoties quantitas est impossibilis, seriem non posse esse advergentem, seu talem, quae tamdiu continuari possit, ut a quantitate aliqua finita possibili differat quantitate minore quam sit data: alioquin enim utique possibili illi finitae aequabitur. Etsi autem non possit pro certo dici, vice versa seriem non advergentem exprimere quantitatem finitam impossibilem, cum fortasse infinitam exprimere possit.* [4]) Ebenda III, 990. [5]) Ebenda III, 923. [6]) Ebenda III, 926.

gestreift, dem wir uns nunmehr zuwenden müssen. Wir sagten (S. 348) Johann Bernoulli habe imaginäre Logarithmen eingeführt und (S. 353) Leibniz habe das Vorhandensein des Logarithmus von — 1 geleugnet. Beide Aeusserungen waren der Oeffentlichkeit über geben, waren gewiss von zahllosen Lesern bemerkt worden, ohne dass von irgend einem Dritten bekannt geworden wäre, dass er durch die Anregung zu eigenen Forschungen veranlasst wurde. Johann Bernoulli und Leibniz waren zunächst und noch für geraume Zeit die Einzigen, für welche eine Frage der Logarithmen negativer Zahlen bestand. Sie kamen darüber in einen durchweg freundschaftlich geführten brieflichen Streit, der sich vom März 1712 bis zum Juli 1713 hinzog[1]). Leibniz machte nämlich am 16. März 1712 Johann Bernoulli zum voraus auf den Aufsatz Varignon's und auf seinen eigenen im Aprilhefte jenes Jahres der A. E. und auf die darin behauptete Unmöglichkeit der Logarithmen negativer Zahlen aufmerksam. Johann Bernoulli widersprach dieser Behauptung in seiner Antwort vom 25. Mai. Bekanntlich sei $d \log x = \frac{dx}{x}$. Nun sei genau ebenso $d \log(-x) = \frac{-dx}{-x}$. Aber $\frac{dx}{-x} = \frac{dx}{x}$, und folglich müsse $\log(-x) = \log x$ sein. Geometrisch zeige sich die Wahrheit dieser Gleichung daran, dass (Fig. 48) der logarithmischen Curve ABC eine symmetrische Gefährtin $\alpha\beta\gamma$ zuzugesellen sei. Während fünfviertel Jahre gingen Briefe herüber und hinüber, ohne dass einer der beiden Briefschreiber den anderen zu überzeugen vermocht hätte, und erst als 1745 der Briefwechsel im Drucke erschien, wurde, wie wir im XVIII. Abschnitte sehen werden, die Frage durch Einmischung eines neuen Forschers spruchreif.

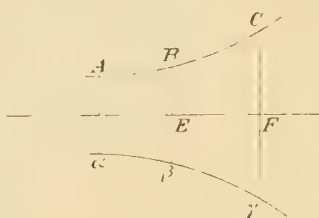


Fig. 48.

Aus demselben Briefwechsel haben wir (S. 221) die von Leibniz erkannte Verwandtschaft zwischen der höheren Differenzirung eines Productes und der Potenzirung einer Summe hervorgehoben. Wir haben damals angegeben, Leibniz habe das in jener Zeit Gefundene erst später in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie zum Drucke gegeben. Wir müssen hier, wo wir innerhalb der Zeit jener Drucklegung uns bewegen, die Angabe wiederholen. Ein näheres Eingehen auf die Abhandlung[2]) dürfte nur insofern erforderlich sein,

[1] Leibniz III, 881, 886, 888, 891—892, 895—896, 898—900, 901, 902, 905—906, 907—909, 912—913, 915. [2]) Ebenda V, 377—382.

als wir zu bemerken haben, Leibniz sei bei dem Producte zweier Factoren nicht stehen geblieben, sondern habe allgemein die Beziehungen zwischen $d^n(xyz\ldots)$ und $(dx + dy + dz + \cdots)^n$ aufgezeigt.

Wir haben aus der gleichen Zeit, in welcher die Mathematiker des europäischen Festlandes im Streite mit und über Grandi die grundlegenden Begriffe der Reihenlehre erörterten, wenn auch nicht wesentlich förderten, eine kleine durchaus praktischen Zwecken dienende Abhandlung Newton's zu erwähnen. Schon in seinem zweiten Briefe an Leibniz vom 24. October 1676 hat Newton den Gedanken ausgesprochen, man könne zur bequemeren Quadratur einer krummlinig begrenzten Figur sich einer Hilfscurve bedienen, welche durch beliebig viele gegebene Punkte der ursprünglichen Begrenzung hindurchgehe (S. 180). In den Principien, und zwar im V. Lemma ihres dritten Buches, sprach er die Aufgabe abermals in der Form aus, man solle eine durch beliebig viele gegebene Punkte hindurchgehende parabolische Curve sich verschaffen[1]), und gab als Mittel zur Erreichung des beabsichtigten Zweckes an, man solle die aufeinander folgenden Differenzen der Ordinaten der gegebenen Curvenpunkte bilden. Er erörterte alsdann diesen ziemlich dunkeln Ausspruch mit grösserer Deutlichkeit in einer besonderen kurzen Abhandlung *Methodus differentialis*[2]), welche 1711 durch William Jones mit Genehmigung des Verfassers herausgegeben wurde, und sie ist es, von der wir zu reden haben. Wir bedienen uns dabei, um heutiger Schreibweise näher zu kommen und dadurch leichter verständlich zu sein, einer von Newton sehr abweichenden Bezeichnung, bemerken aber, dass Newton doch bereits indicierte Buchstaben mit rechts vom Buchstaben befindlichen Stellenzeiger gebrauchte, dass also diese Sitte nunmehr auch nach England herübergekommen war, und dass andrerseits das von ihm nicht benutzte Differenzenzeichen damals schon vorhanden war, wovon wir im 100. Kapitel uns überzeugen werden. Eine parabolische Curve soll also durch die Punkte x_0y_0, x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, ... hindurchgelegt werden, wobei angenommen ist, die $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ seien in arithmetischer Reihe wachsende Abscissen, so dass $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \cdots = h$. Als Gleichung der Curve wird versuchsweise

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$$

gesetzt. Der Annahme zufolge finden die Gleichungen statt:

[1]) *Invenire lineam curvam generis Parabolici, quae per data quotcunque puncta transibit.* [2]) *Opuscula Newtoni* I, 271—282.

$$
\begin{aligned}
y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + a_4 x_0^4 + \cdots \\
y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4 + \cdots \\
y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + a_4 x_2^4 + \cdots \\
y_3 &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + a_4 x_3^4 + \cdots \\
y_4 &= a_0 + a_1 x_4 + a_2 x_4^2 + a_3 x_4^3 + a_4 x_4^4 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

deren Anzahl gleich der Anzahl der rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Glieder, gleich der der gegebenen Punkte sein muss. Zieht man jede Gleichung von der nächstfolgenden ab und nennt $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, so entsteht:

$$
\begin{aligned}
\Delta y_0 &= a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1^2 - x_0^2) + a_3(x_1^3 - x_0^3) + a_4(x_1^4 - x_0^4) + \cdots \\
\Delta y_1 &= a_1(x_2 - x_1) + a_2(x_2^2 - x_1^2) + a_3(x_2^3 - x_1^3) + a_4(x_2^4 - x_1^4) + \cdots \\
\Delta y_2 &= a_1(x_3 - x_2) + a_2(x_3^2 - x_2^2) + a_3(x_3^3 - x_2^3) + a_4(x_3^4 - x_2^4) + \cdots \\
\Delta y_3 &= a_1(x_4 - x_3) + a_2(x_4^2 - x_3^2) + a_3(x_4^3 - x_3^3) + a_4(x_4^4 - x_3^4) + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

und jedes der Glieder rechts vom Gleichheitszeichen, also auch die links angedeutete Summe dieser Glieder, ist durch den regelmässig gleichbleibenden Unterschied h der auf einander folgenden x, den man auch Δx nennen könnte, theilbar, ein Satz, den unter Anderen auch De Sluse (S. 132) ausgesprochen hatte. Die Vollziehung der Division durch Δx liefert, wenn $\frac{\Delta y_k}{\Delta x} = z_k$ gesetzt wird, die neuen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= a_1 + a_2(x_1 + x_0) + a_3(x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2) \\
&\qquad + a_4(x_1^3 + x_1^2 x_0 + x_1 x_0^2 + x_0^3) + \cdots \\
z_1 &= a_1 + a_2(x_2 + x_1) + a_3(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) \\
&\qquad + a_4(x_2^3 + x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2 + x_1^3) + \cdots \\
z_2 &= a_1 + a_2(x_3 + x_2) + a_3(x_3^2 + x_3 x_2 + x_2^2) \\
&\qquad + a_4(x_3^3 + x_3^2 x_2 + x_3 x_2^2 + x_2^3) + \cdots \\
z_3 &= a_1 + a_2(x_4 + x_3) + a_3(x_4^2 + x_4 x_3 + x_3^2) \\
&\qquad + a_4(x_4^3 + x_4^2 x_3 + x_4 x_3^2 + x_3^3) + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Diese werden abermals jede von der nächstfolgenden abgezogen, und Werthe $\Delta z_0, \Delta z_1, \Delta z_2 \ldots$ werden dadurch ermittelt, deren jeder sich durch $x_{k+2} - x_k = 2\Delta x$ theilbar erweist. Man vollzieht die Division und setzt $\frac{\Delta z_k}{2\Delta x} = u_k$. Die Anzahl der Gleichungen, welche alsdann der Untersuchung noch unterbreitet sind, ist naturgemäss wieder um die Einheit vermindert. Die Gleichungen selbst heissen:

$$u_0 = a_2 + a_3(x_2 + x_1 + x_0) + a_4(x_2^2 + x_2 x_1 + x_2 x_0 + x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2) + \cdots$$
$$u_1 = a_2 + a_3(x_3 + x_2 + x_1) + a_4(x_3^2 + x_3 x_2 + x_3 x_1 + x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) + \cdots$$
$$u_2 = a_2 + a_3(x_4 + x_3 + x_2) + a_4(x_4^2 + x_4 x_3 + x_4 x_2 + x_3^2 + x_3 x_2 + x_2^2) + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Der nächste Schritt führt zur Ermittelung von Δu_0, $\Delta u_1 \ldots$ und deren Division durch $x_{k+3} - x_k = 3\Delta x$. Dabei mag $\frac{\Delta u_k}{3\Delta x} = v_k$ heissen. So bekommt man

$$v_0 = a_3 + a_4(x_3 + x_2 + x_1 + x_0) + \cdots$$
$$v_1 = a_3 + a_4(x_4 + x_3 + x_2 + x_1) + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

woraus $\Delta v_0 = a_4(x_4 - x_0) = 4 a_4 \Delta x + \cdots$ folgt, beziehungsweise $w_0 = \frac{\Delta v_0}{4\Delta x} = a_4 + \cdots$.

Denken wir uns, um festen Boden zu gewinnen, es seien genau 5 Punkte, durch welche die parabolische Curve hindurchgehen soll, so schliesst die Rechnung mit $a_4 = w_0$ ab. Allmähliche Einsetzung in die entwicklungsmässig vorausgehenden Gleichungen liefert

$$a_3 = v_0 - (x_3 + x_2 + x_1 + x_0) w_0$$
$$a_2 = u_0 - (x_2 + x_1 + x_0) v_0$$
$$+ (x_3 x_2 + x_3 x_1 + x_3 x_0 + x_2 x_1 + x_2 x_0 + x_1 x_0) w_0$$
$$a_1 = z_0 - (x_1 + x_0) u_0 + (x_2 x_1 + x_2 x_0 + x_1 x_0) v_0$$
$$- (x_3 x_2 x_1 + x_3 x_2 x_0 + x_3 x_1 x_0 + x_2 x_1 x_0) w_0$$
$$a_0 = y_0 - x_0 z_0 + x_1 x_0 u_0 - x_2 x_1 x_0 v_0 + x_3 x_2 x_1 x_0 w_0.$$

Somit sind die Coefficienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 gewonnen, welche in die angenommene Curvengleichung $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ eingesetzt werden können. Es ist bei dieser Einsetzung vortheilhafter, die Ordnung nach Potenzen von x fallen zu lassen und vielmehr die Theile zusammenzufassen, welche je mit y_0, z_0, u_0, v_0, w_0 vervielfacht sind. Alsdann entsteht:

$$y = y_0 + (x - x_0) z_0 + (x^2 - (x_1 + x_0) x + x_1 x_0) u_0$$
$$+ (x^3 - (x_2 + x_1 + x_0) x^2 + (x_2 x_1 + x_2 x_0 + x_1 x_0) x - x_2 x_1 x_0) v_0$$
$$+ (x^4 - (x_3 + x_2 + x_1 + x_0) x^3 + (x_3 x_2 + x_3 x_1 + x_3 x_0 + x_2 x_1 + x_2 x_0 + x_1 x_0) x^2$$
$$- (x_3 x_2 x_1 + x_3 x_2 x_0 + x_3 x_1 x_0 + x_2 x_1 x_0) x + x_3 x_2 x_1 x_0) w_0.$$

Hier lassen aber die Coefficienten von u_0, von v_0, von w_0 sich leicht als Producte aus einfachen Factoren schreiben, und die Curvengleichung nimmmt die Gestalt an:

$$y = y_0 + (x - x_0) z_0 + (x - x_1)(x - x_0) u_0 + (x - x_2)(x - x_1)(x - x_0) v_0$$
$$+ (x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)(x - x_0) w_0.$$

Endlich sei noch eine Umformung angedeutet, welche Newton, da er kein Differenzenzeichen besass, nicht vornehmen konnte. Uns war $z_0 = \frac{\Delta y_0}{\Delta x}$, $u_0 = \frac{\Delta z_0}{2\,\Delta x}$, $v_0 = \frac{\Delta u_0}{3\,\Delta x}$, $w_0 = \frac{\Delta v_0}{4\,\Delta x}$. Fortgesetzte Differenzenbildung der Ordinaten liegt also dem Sinne dieser Buchstaben zu Grunde, und ein Mathematiker unserer Zeit würde in der letzten Gleichung für y noch

$$z_0 = \frac{\Delta y_0}{\Delta x}, \quad u_0 = \frac{1}{1\,.\,2}\,\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}, \quad v_0 = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{\Delta^3 y_0}{\Delta x^3}, \quad w_0 = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{\Delta^4 y_0}{\Delta x^4}$$

schreiben. Eine Durchsichtigkeit der Form würde dadurch erzielt, welche die Tragweite des in der Methodus differentialis gelehrten Verfahrens deutlich erkennen liesse.

Was Newton mit seinem Verfahren bezweckte, hat er wie in dem Briefe vom 24. October 1676, wie in den Principien (S. 358) auch in der Methodus differentialis selbst ausgesprochen. Die 6. und letzte Aufgabe verlangt, irgend eine krummlinige Figur so genau als möglich zu quadriren, wenn eine Anzahl von Ordinaten gefunden werden könne[1], und als Vorschrift zur Auflöung der Aufgabe ist kurzweg gesagt, man solle nach den gegebenen Regeln eine parabolische Curve durch die Endpunkte jener bekannten Ordinaten legen; diese lasse sich dann immer quadriren. Aber Newton bemerkt ferner in einem an die 6. Aufgabe sich anschliessenden Scholium, die erörterten Sätze seien nützlich zur Herstellung von Tabellen mittels Reiheninterpolation[2], und von dieser Aeusserung hat die oben mitgetheilte Formel den Namen der Newton'schen Interpolationsformel enthalten, unter welcher sie bekannt ist.

Als Beispiel einer Curvenquadratur nimmt das eben erwähnte Scholium an, es sollen 4 Ordinaten in gleichen Zwischenräumen, deren jeder auf der Abscissenaxe gemessen $\frac{R}{3}$ heisse, gegeben sein: die Summe der beiden äussersten Ordinaten soll A, die der beiden mittleren Ordinaten B sein. Eine neue in der Mitte errichtete Ordinate, wird behauptet, werde alsdann die Länge $\frac{9B - A}{16}$ besitzen, und die Fläche betrage $\frac{A + 3B}{8} \cdot R$. Newton sagt nicht, wie er die Rechnung vollzogen habe, aber der 3. und 4. Satz der Methodus differentialis, welche wir in unserem Berichte mit Stillschweigen übergangen haben, gestattet Newton's Gedankenfolge mit an Sicherheit grenzender

[1] *Figuram quamcunque curvilineam quadrare quamproxime, cujus Ordinatae aliquot inveniri possunt.* [2] *Utiles sunt hae propositiones ad tabulas construendas per interpolationem serierum.*

Wahrscheinlichkeit herzustellen. Denken wir uns (Fig. 49) $M_0P_0 = y_0$, $M_1P_1 = y_1$, $M_2P_2 = y_2$, $M_3P_3 = y_3$ als die vier genannten Ordinaten, $P_0P_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \frac{R}{3}$. Wir wählen O, den Mittelpunkt der P_0P_3, zum Coordinatenanfangspunkt, messen die positiven Abscissen nach links, die negativen nach rechts, also $OP_0 = \frac{R}{2}$, $OP_1 = \frac{R}{6}$, $OP_2 = -\frac{R}{6}$, $OP_3 = -\frac{R}{2}$. Die Curvengleichung setzen wir als $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ voraus und erhalten

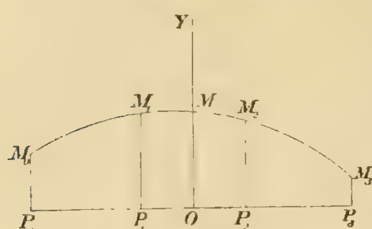


Fig. 49.

$$y_0 = a_0 + \frac{R}{2}a_1 + \frac{R^2}{4}a_2, \quad y_1 = a_0 + \frac{R}{6}a_1 + \frac{R^2}{36}a_2,$$

$$y_2 = a_0 - \frac{R}{6}a_1 + \frac{R^2}{36}a_2, \quad y_3 = a_0 - \frac{R}{2}a_1 + \frac{R^2}{4}a_2.$$

Man sieht hieraus

$$y_0 + y_3 = A = 2a_0 + \frac{R^2}{2}a_2, \quad y_1 + y_2 = B = 2a_0 + \frac{R^2}{18}a_2.$$

Diese Gleichungen liefern weiter $A - B = \frac{4R^2}{9}a_2$ und $a_2 = \frac{9A - 9B}{4R^2}$. Dann ist aber $a_0 = \frac{A}{2} - \frac{R^2}{4}a_2 = \frac{9B - A}{16}$. Die Curvengleichung hat mithin die Gestalt $y = \frac{9B - A}{16} + a_1x + \frac{9A - 9B}{4R^2}x^2$, und bei $x = 0$ ist $OM = \frac{9B - A}{16}$ in Uebereinstimmung mit Newton's Behauptung. Die Unbestimmtheit des Buchstabens a_1 stört nicht bei der Quadratur vermöge der geschickten Wahl des Coordinatenanfangspunktes O. Die gesuchte Fläche ist nämlich

$$\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} (a_0 + a_1x + a_2x^2)dx = \left\{a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3}\right\}_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}}$$

$$= R\left(a_0 + \frac{a_2R^2}{12}\right) = \frac{A + 3B}{8} \cdot R$$

in abermaliger Uebereinstimmung mit Newton's Angabe.

Auf Grundlage der ersten in den Principien veröffentlichten Bemerkungen Newton's hat auch Cotes sich mit der Interpolationsaufgabe beschäftigt. Roger Cotes[1]) (1652—1716) war Sohn eines Geistlichen. Sein Oheim John Smith erkannte frühzeitig die mathematische Begabung des Knaben und nahm ihn zu sich, um grade diese Geistesrichtung zu fördern. Cotes bezog 1699 die Universität

[1]) *National Biography* XII, 282—284 (London 1887, edited by Leslie Stephen).

Cambridge, und als 1706 ebendort durch eine Stiftung von Plume eine neue Professur der Astronomie und Physik in's Leben gerufen wurde, traf die einstimmige Wahl auf Cotes als ersten Inhaber. Einer der Wähler, Professor Whiston, äusserte bei dieser Gelegenheit, er fühle sich wie ein Kind neben Cotes, und noch schmeichelhafter ist der Ausdruck, dessen Newton sich bei dem Tode von Cotes bediente, man würde, wenn er beim Leben geblieben wäre, reicher an Kenntnissen geworden sein[1]). Cotes also behandelte seit 1707 die Aufgabe, eine parabolische Curve durch gegebene Punkte zu legen und trug seine Untersuchungen 1709 in seinen Vorlesungen vor. Gedruckt sind dieselben in einem Bande nachgelassener Schriften[2]), welche Robert Smith, der Vetter des Verstorbenen und sein Nachfolger in der astronomischen Professur, 1722 herausgab.

Die erste Arbeit, durch welche Cotes auch in weiteren Kreisen bekannt wurde, war eine Abhandlung über Logarithmenberechnung unter dem Titel *Logometria*, welche in den P. T. für das erste Vierteljahr 1714 erschien[3]). Nachmals bildete sie den ersten Abschnitt der *Harmonia Mensurarum*, welche selbst den Hauptinhalt des erwähnten Bandes nachgelassener Schriften ausmacht. Als wesentlich ist daraus der Begriff des Modulus hervorzuheben, mit welchem der Logarithmus einer Zahl in einem Systeme vervielfacht werden muss, wenn man den Logarithmus derselben Zahl in einem anderen Systeme zu erhalten wünscht. Cotes hatte diesen neuen Namen schon am 25. Mai 1712 in einem Briefe an Newton benutzt und Letzteren um seine Meinung gebeten, ob er den Ausdruck für gut gewählt halte[4]). Die Sache an sich war allerdings nicht neu, denn wir wissen (S. 82), dass Halley den Modulus des Briggischen Logarithmensystems ebenso wie dessen reciproke Zahl bereits auf 60 Decimalstellen ausgerechnet und im XIX. Bande der P. T. veröffentlicht hatte, eine Arbeitsübereinstimmung, welche Halley kaum aus dem Gedächtniss gekommen sein kann, aber auch Cotes um so weniger unbekannt geblieben sein wird, als er auf Veranlassung Newton's, des Vorsitzenden der Royal Society, seine Logometria grade an Halley, den damaligen Secretär der Gesellschaft, einschickte, um den Abdruck zu veranlassen.

Der nächste Schriftsteller, mit welchem wir uns zu beschäftigen haben, ist Brook Taylor[5]) (1685—1731). Er ist in Kent geboren

---

[1]) *Had Cotes lived, we might have known something.* [2]) *Harmonia Mensurarum sive Analysis et Synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae: accedunt alia opuscula mathematica per Rogerum Cotesium.* Cantabrigiae 1722. Im Anhange pag. 32 ist über den Ursprung der hier erwähnten Schrift berichtet. [3]) P. T. XXIX, 5—45. [4]) Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 117. [5]) *Encyclopaedia Britannica* XXIII, 92 (Edition IX, 1888).

und bezog 1701 die Universität Cambridge, wo er 1709 das Baccalaureat, 1714 den Doctorhut der Rechtsgelehrsamkeit erwarb, daneben aber auch unter Machin und Keill mathematische Studien trieb. Seiner Vielseitigkeit genügten auch diese beiden Wissensgebiete noch nicht. Er besass mehr als gewöhnliche Geschicklichkeit in Musik und Malerei. Er hatte viel Familienunglück, und der Kummer darüber beschleunigte seinen Tod. Seine erste 1708 verfasste mathematische Abhandlung über Schwingungsmittelpunkte erschien 1714 in den P. T.[1]). Wir haben es mit seiner *Methodus incrementorum directa et inversa* zu thun, einem nur 118 Quartseiten starken Bändchen, welches 1715 in London die Presse verliess[2]). Der Drucker hat viel durch undeutliche Zeichen, der Verfasser noch mehr durch undeutliche Schreibart an dem kleinen Buche gesündigt, so dass man fast darüber staunen kann, dass es trotz dieser Mängel frühzeitig zur verdienten Berühmtheit gelangte. Vielleicht trugen auf dem europäischen Festlande Bemängelungen des Buches, auf die wir bald zu reden kommen, das ihrige dazu bei, es bekannt zu machen, und in England hatte es eine mächtige Empfehlung in der Stellung des Verfassers zu Newton. Newton wird auch in der Methodus incrementorum bei jeder thunlichen Gelegenheit genannt und gerühmt. Andere Namen kommen überhaupt nicht vor, es sei denn in der Vorrede, in welcher Newton's Fluxionsmethode im Gegensatze zu der Exhaustionsmethode der Alten, zu den Summationsmethoden von Cavalieri und Wallis, zu jener Auffassung von Cavalieri und den Neueren, welche Theile als unenendlich abnehmend betrachteten[3]), als allein vorwurfsfrei gepriesen wird. Diese durchaus einseitige Parteistellung hängt natürlich mit dem Prioritätsstreite zusammen, an welchem, wie wir wissen, Taylor als spät ernanntes Mitglied des Untersuchungsausschusses (S. 294) betheiligt war. Mit der gleichen Parteistellung dürfte es zusammenhängen, dass Taylor den Leibnizischen Brief vom Februar 1673 (S. 73—74), in welchem werthvolle Anfänge der Differenzenrechnung sich finden, mit keiner Silbe erwähnt, trotzdem er ihn kennen musste, da er im Commercium Epistolicum von 1713 abgedruckt war, und da doch anzunehmen ist, dass Taylor wenigstens nachträglich eine Briefsammlung genauer gelesen haben werde, für deren Inhalt er mitverantwortlich war.

Taylor lässt, um nun in unserem Berichte zu dem eigentlichen

---

[1]) P. T. XXVIII, 11. [2]) Das Exemplar der Heidelberger Universitätsbibliothek trägt die irrige Bezeichnung: Londini MDCCXVII. Wir wissen nicht, ob das ein neuer Abdruck ist, oder ob die falsche Jahreszahl auf einem Druckfehler beruht. [3]) *Cavallerius et Recentiores contemplarunt partes istas ut in infinitum diminutas.*

Buche überzugehen, unbestimmte Grössen z, x, v u. s. w. durch Incremente wachsen, durch Decremente abnehmen. Als Zeichen des Incrementes, der Veränderung wollen wir lieber anstatt des Zuwachses sagen, um auch die Abminderung einzubegreifen, benutzt Taylor ein Pünktchen unter dem Buchstaben, welches verdoppelt u. s. w. auftritt, wenn Veränderungen der Veränderungen u. s. w. vorkommen. Die durch eine Ziffer angedeutete Anzahl der Pünktchen kann auch die Pünktchen selbst ersetzen, $\underset{3}{x}$ wird anstatt x, $\underset{n}{x}$ anstatt x mit n darunter befindlichen Pünktchen geschrieben. Wird $n = 0$ oder $n = -1$, so bedeutet $\underset{0}{x}$ die unveränderte Grösse x selbst, $\underset{-1}{x}$ die Grösse, deren erste Veränderung x sein soll. Das waren Gedanken, welche auch Leibniz seit etwa 20 Jahren besass (S. 221), aber öffentlich geäussert hat dieser sie nicht, so dass Taylor's Unabhängigkeit feststeht, und ihm das Verdienst anheimfällt zuerst negative Indicirung eingeführt zu haben. Anstatt der negativen Zahlen unter den Buchstaben benutzt Taylor auch über denselben angebrachte, von links oben nach rechts unten gerichtete Strichelchen, ähnlich dem Gravis der griechischen Schrift, während der von rechts oben nach links unten geneigte Acutus die Fluente bedeutet. So ist also $\grave{x}$ eine Grösse, deren endliche Veränderung x wird, $\acute{x}$ eine solche, deren Fluxion x ist. Man sieht leicht, welche Schwierigkeiten solch verschieden geneigte Accente neben Fluxionspünktchen über und Incrementpünktchen unter den Buchstaben dem Drucker bereiten mussten. Die Regel für die Bildung einer Incrementgleichung ist die gleiche wie diejenige für die Bildung der Fluxionsgleichung und wird einfach mit Anführungszeichen aus der Quadratura Curvarum[1]) in unabgeändertem Newtonschen Wortlaute übernommen.

Im dritten Satze stellt sich Taylor die Aufgabe der Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen, indem er verlangt, eine Fluxionsgleichung, welche nur zwei Variabele z, x enthalte, von denen z gleichförmig veränderlich sei, solle so umgeformt werden, dass x als die gleichförmig Veränderliche gelte[2]). Ersetzen wir die Fluxionspünktchen zur besseren Uebersicht durch indicirte d, lassen aber im Uebrigen Taylor's Gedankengang unverändert, so schliesst derselbe folgendermassen: Ist z eine Function von x und als solche durch A bezeichnet, so hat man $dz = dA = Bdx$. Ueberdies soll $dB = Cdx$, $dC = Ddx$, $dD = Edx$ sein, wo also auch B, C, D, E Functionen von x sind. Fortgesetzte Differentiation giebt:

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 209. [2]) *Methodus Incrementorum* pag. 8—9: *Aequationem fluxionalem, in qua sunt fluentes tantum duae z et x, quorum z fluit uniformiter, ita transformare, ut fluat x uniformiter.*

$$\text{I.}\begin{cases} d^2z = d(Bdx) = B\,.\,d^2x + dB\,.\,dx = B\,.\,d^2x + C(dx)^2, \\ d^3z = B\,.\,d^3x + dB\,.\,d^2x + 2C\,.\,dx\,.\,d^2x + dC\,.\,(dx)^2 \\ \quad = Bd^3x + 3Cdxd^2x + D(dx)^3, \\ d^4z = Bd^4x + dB\,.\,d^3x + 3Cdx\,.\,d^3x + 3C(d^2x)^2 + 3dCdxd^2x \\ \quad + 3D(dx)^2d^2x + dD(dx)^3 = Bd^4x + 4Cdxd^3x + 3C(d^2x)^2 \\ \quad + 6D(dx)^2d^2x + E(dx)^4, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ist hierbei z gleichmässig veränderlich, mithin dz constant, so ist $d^2z = d^3z = d^4z = \cdots = 0$. Andererseits ergiebt sich, falls x als die gleichmässig Veränderliche gilt, aus den Definitionsgleichungen von $dz, dB, dC, dD, \ldots$, dass

$$B = \frac{dz}{dx},\ C = \frac{dB}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2},\ D = \frac{dC}{dx} = \frac{d^3z}{dx^3},\ E = \frac{dD}{dx} = \frac{d^4z}{dx^4}\ldots.$$

Setzt man diese Werthe in das Gleichungssystem I ein, während die links vom Gleichheitszeichen befindlichen höheren Differentiale von z aus dem erläuterten Grunde verschwinden, so entsteht ein neues Gleichungssystem:

$$\text{II.}\begin{cases} 0 = \frac{dz}{dx}d^2x + \frac{d^2z}{dx^2}(dx)^2, \\ 0 = \frac{dz}{dx}d^3x + 3\frac{d^2z}{dx^2}dx\,.\,d^2x + \frac{d^3z}{dx^3}(dx)^3, \\ 0 = \frac{dz}{dx}d^4x + 4\frac{d^2z}{dx^2}dx\,.\,d^3x + 3\frac{d^2z}{dx^2}(d^2x)^2 + 6\frac{d^3z}{dx^3}(dx)^2d^2x \\ \qquad + \frac{d^4z}{dx^4}(dx)^4, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem II führt zu $d^2x, d^3x, d^4x, \ldots$, indem man die aus benutzten Gleichungen des Systems gefundenen höheren Differentiale von x in die nächstfolgende Gleichung jeweils einsetzt. Taylor überlässt dem Leser die umständliche Rechnung und begnügt sich damit, die Ergebnisse auszusprechen:

$$\text{III.}\begin{cases} d^2x = -\frac{d^2z\,.\,dx}{dz}, \\ d^3x = \frac{-d^3z\,.\,dz\,.\,dx + 3(d^2z)^2dx}{(dz)^2}, \\ d^4x = \frac{-d^4z(dz)^2dx + 10d^3z\,.\,d^2z\,.\,dz\,.\,dx - 15(d^2z)^3dx}{dz^3}. \end{cases}$$

Zur Controle dividiren wir die drei Gleichungen des Systems III der Reihe nach durch $(dz)^2$, $(dz)^3$, $(dz)^4$ und formen alsdann die rechts entstehenden Brüche dadurch um, dass wir, wieder der Reihe nach, Zähler und Nenner durch $(dx)^3$, $(dx)^5$, $(dx)^7$ theilen. Wir erhalten so die heute allgemein bekannten Formeln:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^3}, \quad \frac{d^3x}{dz^3} = \frac{-\frac{d^3z}{dx^3}\,\frac{dz}{dx} + 3\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^5},$$

$$\frac{d^4x}{dz^4} = \frac{-\frac{d^4z}{dx^4}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 10\,\frac{d^3z}{dx^3}\,\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{dz}{dx} - 15\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^7}.$$

Von einer bei Taylor an zwei Stellen seines Buches[1]) behandelten Differentialgleichung wird im 100. Kapitel die Rede sein.

Einen wichtigen Abschnitt der Methodus Incrementorum, um dessen willen wir eigentlich die ganze Schrift grade in diesem 97. Kapitel behandeln, bildet der siebente Satz von der Taylor'schen Reihe. Auch hier sei uns gestattet, durch eine Taylor nicht angehörende Bezeichnung, insbesondere durch Benutzung von mit Index versehenen Δ für die auf einander folgenden Differenzen, die Taylor'schen Erörterungen durchsichtiger zu machen. Sei z die gleichmässig Veränderliche und Δz ihre jedesmalige Veränderung. In Abhängigkeit von z ist eine andere Veränderliche x, deren auf einander folgende Differenzen Δx, $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$ ... die Veränderungen von x, von Δx, von $\Delta^2 x$ ... bezeichnen, welchen diese unterworfen sind, während z um Δz zunimmt. Folgende Werthe gehören mithin zusammen: z und x, $z + \Delta z$ und $x + \Delta x$, $z + 2\Delta z$ und $x + 2\Delta x + \Delta^2 x$, $z + 3\Delta z$ und $x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x$. Die auftretenden Zahlencoefficienten sind die der Binomialentwicklung, das sonstige Bildungsgesetz ist nicht minder einleuchtend, und so erkennt man, dass zu $z + n\,.\,\Delta z$ der Werth gehört:

$$x + n\,.\,\Delta x + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 x + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\Delta^3 x + \cdots + \Delta^n x.$$

Nennt man $n\Delta z = v$ und $(n-1)\Delta z = v'$, ferner $(n-2)\Delta z = v''$ u. s. w., also auch $n = \frac{v}{\Delta z}$, $n - 1 = \frac{v'}{\Delta z}$, $n - 2 = \frac{v''}{\Delta z}$ u. s. w., so wird der zu $z + v$ zugehörige Werth von x in der Gestalt

$$x + \frac{v}{1}\,.\,\frac{\Delta x}{\Delta z} + \frac{v v'}{1\,.\,2}\,\frac{\Delta^2 x}{\Delta z^2} + \frac{v v' v''}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{\Delta^3 x}{\Delta z^3} + \cdots$$

erscheinen. Ist v ein endlicher Werth, während gleichzeitig Δz in das unendlichkleine dz übergeht, womit naturgemäss auch der Uebergang der Differenzquotienten von x in Differentialquotienten verbunden ist, und n sich als unendlich gross erweist, so sind die v, v', v''... nicht mehr zu unterscheiden. Dann geht also vv' in v^2, $vv'v''$ in v^3 über u. s. w. Man erhält alsdann als Werth von x, während z in $z + v$ überging, die Reihe:

[1]) *Methodus Incrementorum* pag. 17 und 26–27. [2]) Ebenda pag. 21–23.

$$x + \frac{v}{1}\frac{dx}{dz} + \frac{v^2}{1.2}\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{v^3}{1.2.3}\frac{d^3x}{dz^3} + \cdots,$$

und das ist die Taylor'sche Reihe, wie sie benannt zu werden pflegt, seit ihr Simon Lhuilier 1786 in einer von der Berliner Akademie gekrönten und auf ihre Kosten gedruckten Preisschrift[1]) diesen Namen beigelegt hat. Wir bemerken, dass Taylor auch den Fall eines negativen v in Erwägung gezogen hat[2]), und dass er fand, dass die Reihe für den zu $z - v$ gehörigen Werth von x im Vorzeichen alternirend wurde, während der absolute Werth der Glieder keine Veränderung erlitt. In wie weit Taylor sich bei Verfassung der Methodus Incrementorum über die Möglichkeit der Anwendung seines Satzes zur Reihenentwicklung einer Function einer zweitheiligen Grösse klar gewesen sein mag, ist kaum zu sagen. Wirkliche Reihenentwicklungen von der genannten Art hat er dort jedenfalls nicht vorgenommen.

Eine andere immer wieder durch die Bezeichnung sehr schwer verständliche Reihenentwicklung ist im elften Satze[3]) gelehrt. Sei $\int s . dr$ in der Form $rs + p$ angenommen. Differentiation bringt $s . dr = s . dr + r . ds + dp$ hervor. Daraus folgt $dp = -rds$ und $p = -\int rds = -\int r\frac{ds}{dr}dr$. Man hat also gefunden

$$\int s . dr = rs - \int r \cdot \frac{ds}{dr} \cdot dr.$$

Taylor geht weiter zur Annahme $\int r \cdot \frac{ds}{dr} \cdot dr = \frac{r^2}{2}\frac{ds}{dr} + q$ über. Differentiation liefert $r\frac{ds}{dr} = r\frac{ds}{dr} + \frac{r^2}{2}\frac{d^2s}{dr^2} + \frac{dq}{dr}$. Daraus folgt

$$\frac{dq}{dr} = -\frac{r^2}{2}\frac{d^2s}{dr^2}, \quad q = -\int\frac{r^2}{2}\frac{d^2s}{dr^2}dr$$

und

$$\int sdr = rs - \frac{r^2}{2}\frac{ds}{dr} + \int\frac{r^2}{2}\frac{d^2s}{dr^2}dr.$$

Das gleiche Verfahren, welches auf nichts anderes hinausläuft als auf eine fortgesetzte Anwendung des factorenweisen Integrationsverfahrens, kann in beliebiger Wiederholung angewandt werden und liefert

$$\int sdr = rs - \frac{r^2}{1.2}\frac{ds}{dr} + \frac{r^3}{1.2.3}\frac{d^2s}{dr^2} - \cdots.$$

Man erkennt sofort in der von Taylor gegebenen Reihe die schon 1694 durch Johann Bernoulli in den A. E. veröffentlichte Ent-

[1]) *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs qui a remporté le prix proposé par l'Académie Royale des sciences et belles lettres pour l'année 1786.* Berlin 4°. [2]) *Methodus Incrementorum* pag. 23: *mutato signo ipius v, quo tempore z decrescendo fit z — v.* [3]) Ebenda pag. 38 39.

wicklung (S. 220). Taylor bediente sich allerdings einer anderen und, man darf hinzusetzen, weniger anfechtbaren Herleitung als der Erfinder der Reihe selbst, aber dennoch ist ihm der Vorwurf nicht wohl zu ersparen, Jenen nicht genannt zu haben, und als ihm dieser Vorwurf im Maihefte 1721 der A. E. wirklich gemacht wurde, musste er die Antwort schuldig bleiben.

Der zweite Abschnitt der Methodus Incrementorum, welcher den ersten wenig an Länge übertrifft, enthält Anwendungen der in jenem auseinandergesetzten Lehren. Er beginnt mit dem Interpolationsprobleme[1], an welches das der Summirung einer gegebenen Anzahl von Gliedern einer Reihe von bekanntem Bildungsgesetze[2]) sich anschliesst. Die bei letzterer Aufgabe gegebene Anweisung besteht darin, man solle von einem Anfangsgliede an zuerst die Summe aller Glieder bis zu dem ersten der zu summirenden Glieder ausschliesslich und dann die bis zum letzten einschliesslich bilden und erstere von letzterer abziehen. Das ist auf Glieder von endlichen Differenzen angewandt die gleiche Methode, welche bei den Quadraturen, d. h. bei Summirung stetig sich aneinander anschliessender Grössen zur Auswerthung von bestimmten Integralen führt, wie überhaupt die Summirungsaufgabe von Gliedern mit endlichen Unterschieden und die Integrationsaufgabe zu vielfach ganz ähnlichen Ergebnissen führen, worauf aufmerksam gemacht wird[3]).

Spätere Aufgaben gehören den Anwendungen der Fluxionsrechnung auf Aufgaben der Geometrie und Mechanik an, und von Unterschieden von endlicher Grösse ist ferner nicht mehr die Rede. Da behandelt Taylor das isoperimetrische Problem[4]), die Kettenlinie[5]), die Aufgabe der gespannten Saite[6]), welche hier die erste mathematische Behandlung erhielt, nachdem Mersenne in seiner *Harmonica* von 1663 Versuche über Saitenschwingungen beschrieben und Erfahrungsgesetze ermittelt hatte[7]).

Auch die Auffindung des Schwingungsmittelpunktes senkrecht herabhängender Körper ist von Taylor behandelt[8]) und hat Anlass zu Streitigkeiten gegeben. Johann Bernoulli hatte die gleiche Aufgabe im Junihefte 1714 der A. E. gelöst, wo sie also jedenfalls früher als in dem Taylor'schen Buche von 1715 dem mathematischen Leserkreise bekannt wurde. Taylor vertheidigte[9]) seine Unabhängig-

---

[1]) *Methodus Incrementorum* pag. 53—56. [2]) Ebenda pag. 56—58. [3]) Ebenda pag. 65. [4]) Ebenda pag. 68. [5]) Ebenda pag. 75. [6]) Ebenda pag. 89. [7]) Heller, Geschichte der Physik II, 75—76. [8]) *Methodus Incrementorum* pag. 95. [9]) Taylor's Vertheidigung und mit ihr sämmtliche Streitschriften findet man vereinigt in Joh. Bernoulli *Opera* II, die hier angeführten Daten II, 480.

keit von Johann Bernoulli in den P. T. von 1719. Er habe schon am Anfange des Jahres 1712 den Schwingungsmittelpunkt genau so gefunden, wie er später habe drucken lassen, und könne diese Thatsache durch Briefe von Keill beweisen, ausserdem sei die Reinschrift seines Buches seit April 1714 im Besitze der Royal Society gewesen[1]), mithin vor der Versendung des Juniheftes der A. E.

Kommen wir in einem Gesammturtheile auf die Methodus Incrementorum zurück, so ist deren ungemein hohe Bedeutung nicht zu verkennen; es ist zugleich zu bemerken, dass die Lehre von den endlichen Differenzen eigentlich am stiefmütterlichsten, mindestens am undeutlichsten behandelt ist, wiewohl sie dem Buche den Titel verlieh und das Buch wieder anderen Mathematikern den Anstoss gab, tiefer in den Gegenstand einzudringen.

Wir nennen hier zuerst Pierre Remond De Montmort mit einer Abhandlung[2]) in den P. T. von 1717. Ihr klar und deutlich ausgesprochener Grundgedanke besteht darin, dass, wenn eine Reihe von Gliedern $a, b, c, d \ldots$ zu summiren ist, das Bestreben dahin gerichtet werden solle, jedes dieser Glieder als eine Differenz von der Art darzustellen, dass der Subtrahend jeder früheren Differenz Minuend der nächstfolgenden werde. Ist $a = A - B$, $b = B - C$, $c = C - D$, $d = D - E$, so wird ersichtlich $a + b + c + d = A - E$ und ganz ähnlich bei grösserer Anzahl der Reihenglieder. Vielfältige Beispiele bringen den Gedanken zur Anwendung. Man erinnert sich unwillkürlich an Dinge, welche in zu jener Zeit noch nicht veröffentlichten und De Montmort mithin unbekannten Briefen von Leibniz (S. 356) vorkamen.

In dem gleichen Jahre 1717 legte ein anderer französischer Mathematiker François Nicole[3]) (1683—1758), der von seinem 16. Jahre an als Schüler De Montmort's zu bezeichnen ist, ohne dass mit dieser Bezeichnung seine oder De Montmort's Selbständigkeit in der Differenzenrechnung irgend angezweifelt werden will, der Pariser Académie des Sciences eine Abhandlung[4]) vor, welche ausgesprochenermassen die Absicht verfolgte, klarer darzustellen, was in Taylor's Methodus Incrementorum nicht mit genügender Deutlichkeit ausgeführt sei. Nicole hat diese seine Absicht durchaus erfüllt. Mit musterhafter Klarheit setzt er auseinander, die Differenz von $x(x+n)\ldots(x+\overline{p-1}\,n)$ sei $pn(x+n)(x+2n)\ldots(x+\overline{p-1}\,n)$ als Werth von

[1]) In einem anderen Schriftstück (Joh. Bernoulli *Opera* II, 474) ist sogar behauptet, die *Methodus Incrementorum* sei seit April 1713 im Besitze der Royal Society gewesen. [2]) P. T. XXX, 633—675. [3]) *Histoire de l'Académie des sciences.* Année 1758 Histoire pag. 107—114). [4]) Ebenda Année 1717 pag. 7—21.

$(x+n)(x+2n)\dots(x+pn) - x(x+n)\dots(x+(p-1)n)$.

Umgekehrt ist $\frac{x(x+n)(x+2n)\dots(x+(p-1)n)}{pn}$ das Integral der endlichen Differenz $(x+n)(x+2n)\dots(x+(p-1)n)$. Das Integral wird gefunden, indem der Differenz der Factor beigegeben wird, der um n kleiner als der niederste in ihr vorhandene Factor ist, und hierauf noch die Division durch p, als Anzahl der jetzt vorhandenen Factoren, und durch n, als Betrag der jeweiligen Zunahme der Factoren, vollzogen wird. Will man die Summe

$$1(1+n)\dots(1+(p-1)n) + (1+n)(1+2n)\dots(1+pn) + \cdots + x(x+n)\dots(x+(p-1)n)$$

haben, so betrachtet man das nachfolgende Glied

$$(x+n)(x+2n)\dots(x+pn)$$

als Differenz und bildet deren Integral $\frac{x(x+n)(x+2n)\dots(x+pn)}{(p+1)n}$, welches die gesuchte Summe sein wird. Die Differenz des Bruches

$$\frac{1}{x(x+n)\dots(x+(p-1)n)}$$

oder

$$\frac{1}{x(x+n)\dots(x+(p-1)n)} - \frac{1}{(x+n)(x+2n)\dots(x+pn)}$$

ist $\frac{pn}{x(x+n)\dots(x+pn)}$ und umgekehrt ist $\frac{1}{x(x+n)\dots(x+(p-1)n)}$ das Integral der endlichen Differenz $\frac{pn}{x(x+n)\dots(x+pn)}$, welches also gefunden wird, indem man in der Differenz den höchsten Factor $(x+pn)$ des Nenners weglässt und alsdann noch durch die Anzahl p der übrig bleibenden Factoren und durch den Betrag n, um welchen die Nennerfactoren jeweils steigen, dividirt. Will man nun die Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen finden, deren jeder die Form

$$\frac{1}{x(x+n)(x+2n)\dots(x+pn)}$$

besitzt, so ist dieses allgemeine Glied selbst die Differenz zwischen der Reihensumme der vor ihm auftretenden Glieder und der Reihensumme der bis zu ihm einschliesslich genommenen Glieder. Das Integral dieser endlichen Differenz ist nach der ausgesprochenen Regel $\frac{1}{p\cdot n\, x(x+n)\dots(x+(p-1)n)}$, und das ist also die Summe der mit $\frac{1}{x(x+n)\dots(x+pn)}$ beginnenden unendlichen Reihe. In diesem Aufsatze ist also zweierlei geleistet. Die Summe beliebig vieler Glieder einer steigenden und die der unendlich vielen Glieder einer fallenden Reihe wird ermittelt, steigend und fallend in dem Sinne verstanden, dass die einzelnen Glieder der Reihe einen immer grösseren, beziehungs

weise immer kleineren Werth annehmen. Im ersteren Falle sind die Glieder ganzzahlig, im zweiten Falle gebrochen, beidemal bestehen dieselben aus Factoren von gegebener Anzahl, beidemal ist der veränderliche Theil der Factoren eine arithmetische Folge von Vielfachen einer gegebenen Zahl.

Dieser Grundaufgabe ist Nicole treu geblieben. Er hat in zwei Aufsätzen des Jahres 1723[1]), in einem Aufsatze des Jahres 1724[2]), endlich in einem Aufsatze des Jahres 1727[3]) immer verwickeltere Formen solcher Reihen behandelt. Er hat z. B. Reihen summirt von der Gestalt

$$\frac{1}{x(x+n)(x+2n)\ldots(x+(p-1)n)}$$
$$+\frac{1}{(x+m)(x+m+n)(x+m+2n)\ldots(x+m+(p-1)n)}+\cdots,$$

er hat auch von Glied zu Glied sich verändernde Zähler beigegeben, aber nirgend ist eine Abweichung in dem Sinne, dass jene Factoren der Nenner anderer Art als linear wären, nirgend ist von höheren als ersten Differenzen die Rede, und deshalb dürfen wir die fünf Aufsätze Nicole's mit Einschluss dessen von 1727, der seiner Datirung nach eigentlich dem folgenden Abschnitte angehören müsste, in diesem kurzen Bericht zusammenfassen.

Wir kommen wieder zu einem englischen oder vielmehr schottischen Schriftsteller James Stirling[4]) (1692—1770). Er kam 1710 nach Oxford, wo er eine Freistelle erhielt, von der ihm aber 1715 wegen entdeckten Briefwechsels mit bekannten Jacobiten Ausstossung drohte. Er floh nach Venedig, wo er sich durch Unterricht in der Mathematik ernährte. Von Venedig aus veröffentlichte er 1717 eine geometrische Schrift, die wir im 99. Kapitel besprechen werden, und die ihn Newton nahe brachte. In Venedig ist dann auch eine Abhandlung geschrieben, welche durch Newton's Vermittelung in den P. T. von 1719 gedruckt wurde[5]). Wieder Newton brachte es zuwege, dass Stirling 1725 nach England zurückkehren durfte. Seit 1735 war er dann Director einer schottischen Bergwerksgesellschaft. Die Abhandlung von 1719 trägt die Ueberschrift *Methodus differentialis Newtoniana illustrata Authore*[6]) *Jacobo Stirling e Coll. Balliol Oxon.*, der Verfasser gehörte mithin damals dem Namen nach noch der Hochschule Oxford an. Der Ueberschrift kann man auch entnehmen, dass Stirling von Newton's Interpolationsverfahren ausging,

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences.* Année 1723. pag. 20—37 und 181—198. [2]) Ebenda. Année 1724 pag. 138—158. [3]) Ebenda. Année 1727 pag. 257—268. [4]) *Encyclopaedia Britannica* XXII, 555—556 (Edition IX, 1887). [5]) P. T. XXX, 1050—1070. [6]) sic!

dessen Erläuterung insofern sein wesentlicher Zweck war, als er die auf das Auffinden zu interpolirender Glieder gerichteten Rechnungen bequemer darstellte. Es sollen etwa $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ sieben aufeinander folgende, so nahe bei einander liegende Glieder einer Reihe (beziehungsweise Ordinaten einer Curve) sein, dass sie als Glieder einer arithmetischen Reihe von irgend einer Ordnung gedacht werden können, d. h. dass ihre aufeinander folgenden Differenzen um so weniger von Null abweichen, je höherer Ordnung sie sind. Nun ist $\alpha - \beta$ eine erste Differenz, $(\alpha - \beta) - (\beta - \gamma) = \alpha - 2\beta + \gamma$ eine zweite Differenz. Ebenso erkennt man $\alpha - 3\beta + 3\gamma - \delta$ als eine dritte, $\alpha - 4\beta + 6\gamma - 4\delta + \varepsilon$ als eine vierte, $\alpha - 5\beta + 10\gamma - 10\delta + 5\varepsilon - \zeta$ als eine fünfte, $\alpha - 6\beta + 15\gamma - 20\delta + 15\varepsilon - 6\zeta + \eta$ als eine sechste Differenz. Mit immer mehr der Wahrheit sich nähernder Zuverlässigkeit gelten folglich diese Differenzen als nicht mehr vorhanden, d. h. ihr Nullsetzen gestattet α in immer genaueren Näherungswerthen zu finden. Diese Näherungswerthe sind: $\alpha = \beta$, $\alpha = 2\beta - \gamma$, $\alpha = 3\beta - 3\gamma + \delta$, $\alpha = 4\beta - 6\gamma + 4\delta - \varepsilon$, $\alpha = 5\beta - 10\gamma + 10\delta - 5\varepsilon + \zeta$, $\alpha = 6\beta - 15\gamma + 20\delta - 15\varepsilon + 6\zeta - \eta$ u. s. w. Stirling sucht z. B. mittels dieser Formeln $\alpha = \frac{1}{100}$ zu erhalten, indem er es als vorausgehendes Glied zu den Gliedern $\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \frac{1}{103}, \frac{1}{104}, \frac{1}{105}, \frac{1}{106}$ betrachtet. Er findet die sechs Näherungswerthe

$$\alpha = 0{,}0099009900990,\quad \alpha = 0{,}0099980586293,\quad \alpha = 0{,}0099999434550,$$
$$\alpha = 0{,}0099999978248,\quad \alpha = 0{,}0099999998958,\quad \alpha = 0{,}0099999999931.$$

Im weiteren Verlaufe der Abhandlung bedient sich Stirling gewisser Umformungen, deren Zweck es ist, die Convergenz von Reihen zu beschleunigen. Ist beispielsweise[1] $\frac{Q}{1+Q} = R$, so folgt

$$1 - R = (1 + Q)^{-1}$$

und hieraus wieder $(1 + Q)^n = (1 - R)^{-n}$. Man kann aber beide Ausdrücke nach dem binomischen Satze entwickeln und erhält so zwei Reihen, die den gleichen Werth besitzen

$$(1 + Q)^n = 1 + Q\frac{n}{1} + Q^2\frac{n(n-1)}{1.2} + Q^3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \cdots$$

und

$$(1 - R)^{-n} = 1 + R\frac{n}{1} + R^2\frac{n(n+1)}{1.2} + R^3\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + \cdots.$$

[1] P. T. XXX, 1065 steht zwar $R = \frac{1+Q}{Q}$, aber das ist offenbar ein Druckfehler, da diese Substitution die Reihe, welche nachher angegeben ist, überhaupt nicht hervorbringt, abgesehen davon, dass diese, wenn sie so entstünde, bei $R > 1$ divergiren würde.

De Lagny legte 1705 und 1722 der Académie des Sciences Abhandlungen vor[1]), in welchen die höheren Differenzen bei der Auflösung von Gleichungen Verwerthung finden. Um dieses Zweckes willen wird über die beiden Abhandlungen der Hauptsache nach erst im folgenden 98. Kapitel zu berichten sein, aber Einiges sei gleich hier hervorgehoben. De Lagny bildet die aufeinander folgenden Differenzen bei arithmetischen Reihen höherer Ordnung. Er nennt 1722 die erste Zahl jeder Differenzenreihe ihren Erzeuger, *generateur*. Dieser Name erinnert zu deutlich an das von Leibniz in dem (zuletzt S. 364) erwähnten Briefe an Oldenburg vom Februar 1673 in gleichem Sinne gebrauchte *generatrices*, als dass wir nicht an eine vielleicht nicht ganz bewusste Einwirkung denken sollten. Im Jahre 1722 kannte De Lagny sicherlich das seit 1713 unter den Mathematikern freigebigst verbreitete Commercium Epistolicum und folglich jene Leibnizische Untersuchung. Aber wie war es 1705, als De Lagny zwar ohne jene Namen, aber immerhin höhere Differenzen in Rechnung zog? Hat er damals schon unter der Hand in Paris gehört, was Leibniz am gleichen Orte 32 Jahre früher in Erwägung zog? Hat er Mouton's Druckschrift von 1670 (S. 72) gekannt oder gar Faulhaber's Summirung arithmetischer Reihen höherer Ordnung (Bd. II, S. 684)? Wir sind nicht im Stande, diese Fragen zu beantworten. In De Lagny's Abhandlung von 1722 treten zwei wichtige Sätze auf, welche als unbestreitbare Grundsätze bezeichnet[2]) und dem entsprechend nicht bewiesen sind. Der eine Satz, der vielleicht De Lagny angehört, ist der, dass Potenzen von hinreichend hohem Exponenten jeder Zahl, die irgend grösser als die Einheit ist, über alle Grenzen hinaus wachsen. Der zweite Satz, den allerdings, wie wir im 99. Kapitel erfahren werden, Stirling schon 1717 ausgesprochen hatte, ist der, dass in der Reihe

$$a_\lambda x^\lambda + a_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

der Werth von x so gross angenommen werden kann, dass $a_\lambda x^\lambda$ für das Vorzeichen der Reihensumme den Ausschlag giebt. Endlich rühmt De Lagny selbst[3]), er sei der Erste, der darauf aufmerksam mache, dass nicht bloss, wie man schon lange wisse, die 2., 3. u. s. w. Potenzen der Zahlen der natürlichen Zahlenfolge arithmetische Progressionen 2., 3., ... Ordnung bilden, sondern dass das Gleiche auch für die Summen $a_\lambda x^\lambda + a_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \cdots + a_1 x$ Geltung habe, welche entstehen, indem man der Veränderlichen x der Reihe nach alle ganzzahligen Werthe der natürlichen Zahlenfolge beilegt.

[1] *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1705 pag. 277—300. Année 1722 pag. 264—320. [2] Ebenda Année 1722 pag. 275: *Ce sont deux axiomes incontestables.* [3] Ebenda pag. 281—282.

Der letzte Schriftsteller, von welchem wir in diesem Kapitel kurz zu reden haben, ist Abraham de Moivre, als Verfasser einer Abhandlung, die im Mai 1720 der Royal Society vorlag und 1722 in den P. T. gedruckt wurde[1]). Die Abhandlung beschäftigt sich der Hauptsache nach mit dem Zerfällen eines Bruches in Partialbrüche, also mit einem Gegenstande, der schon längst durch Leibniz und Johann Bernoulli seine Erledigung gefunden hatte. De Moivre erkennt das Vorrecht Leibnizens gegen den Schluss der Abhandlung voll und unumwunden an, aber die A. E. von 1702 und 1703, sagt er, seien ihm erst nachträglich zu Gesicht gekommen. In De Moivre's Darstellung findet sich ein Begriff und ein dafür erfundenes Wort, welche von nun an der Mathematik angehören. Er nennt recurrente Reihen[2]) solche, bei welchen die einzelnen Coefficienten mit einer bestimmten Anzahl ihnen vorausgehender Coefficienten in einem von Glied zu Glied unverändert bleibenden Zusammenhange stehen. So ist z. B. $1 + 3x + 7x^2 + 17x^3 + 41x^4 + 99x^5 + \cdots$ eine recurrente Reihe, und der Zusammenhang ihrer Coefficienten liegt in der von $n = 0$ an giltigen Beziehung $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Dem Zusammenhange $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} + 5a_n$ entspricht die gleichfalls recurrente Reihe $1 + 2x + 3x^2 + 10x^3 + 34x^4 + 97x^5 + \cdots$ u. s. w.

98. Kapitel.

Algebra.

Wenn wir uns nunmehr den Leistungen auf algebraischem Gebiete zuwenden, so stellt uns die Abhandlung De Lagny's[3]) von 1705, wie sie die älteste von uns zu erwähnende ist, auch dadurch einen erwünschten Uebergang in Aussicht, als sie, wie (S. 374) bemerkt wurde, an Begriffe der Differenzenrechnung anknüpft. De Lagny bildet die $n$ten Potenzen von $n + 1$ selbst in arithmetischer Progression stehenden Zahlen, also a^n, $(a+b)^n$, $(a+2b)^n$, ... $(a+nb)^n$. Die ersten, zweiten, ... $n$ten Differenzen dieser Potenzwerthe werden genommen, und dabei zeigt sich, dass die $n$ten Differenzen constant ausfallen und zwar $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots nb^n$ heissen. De Lagny sagt[4]), dieser Satz sei seines Wissens in seiner Allgemeinheit neu, wenn auch die beiden besonderen Fälle längst bekannt seien, dass 2 die zweite Differenz der natürlichen Quadratzahlen und 6 die dritte Differenz der natürlichen Kubikzahlen darstelle. Die Constanz der höheren

[1]) P. T. XXXII, 162—178. [2]) P. T. XXXII, 176. [3]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1705 pag. 277—300. [4]) Ebenda pag. 288 Remarque II.

Differenzen lässt Tabellen hoher Potenzen der aufeinander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe durch fortgesetzte Additionen entstehen, sie leistet auch bei der Auflösung von Zahlengleichungen Hilfe, und das ist De Lagny's eigentlicher Zielpunkt. Jeder Ausdruck $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x$ gestattet nämlich, sofern x in arithmetischer Progression wächst, d. h. die Werthe $x = a$, $x = a + b$, $\ldots x = a + nb$ annimmt, seine höheren Differenzen zu bilden, deren $n$te constant wird. Man erhält also auch $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x$ durch einzige Anwendung fortgesetzter Additionen, und diese von einander verschiedenen Gleichungsconstanten — De Lagny nennt sie im Anschlusse an Vieta die *homogènes de comparaison* — sind bald kleiner, bald grösser als die Gleichungsconstante c der vorgelegten Gleichung $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x = c$, bald ihr genau gleich. Im letzteren Falle ist der ganzzahlige Wurzelwerth x gefunden, der die Gleichung erfüllt, andernfalls hat man wenigstens zwei ganze Zahlen ermittelt, zwischen welchen x liegt, und sind es zwei nur um die Einheit verschiedene Werthe, d. h. hat man $b = 1$ gewählt, so ist zugleich die Gewissheit der Irrationalität von x gewonnen[1]). Nun hat De Lagny am Anfang der Abhandlung zwei Gleichungen arithmetisch ähnlich[2]) genannt, wenn sie nur durch die Gleichungsconstante sich von einander unterscheiden, dagegen geometrisch ähnlich[3]), wenn der Coefficient α_n von x^n übereinstimmt, die übrigen Coefficienten aber in der zweiten Gleichung $\alpha_{n-1}\beta$, $\alpha_{n-2}\beta^2$, $\ldots$ $\alpha_1 \beta^{n-1}$ heissen und die Gleichungsconstante $c\beta^n$ ist. Die Wurzel der geometrisch ähnlichen Gleichung ist alsdann das βfache der Wurzel der erstgegebenen. Auch die Wurzel der geometrisch ähnlichen Gleichung vermag man in Grenzen einzuschliessen, welche nur um eine Einheit von einander liegen, und damit ist die Wurzel der ursprünglichen Gleichung auf $\frac{1}{\beta}$ genau gefunden[4]). Im folgenden Jahre 1706 kam De Lagny in einer als zweite Abtheilung der früheren Abhandlung bezeichneten Fortsetzung[5]) auf den Gegenstand zurück, aber nur um gewisse Abkürzungen des Verfahrens bei der Behandlung cubischer Gleichungen zu lehren. Die theoretische Bedeutung dieser Fortsetzung liegt einzig darin, dass versucht wird die Meinung zu begründen, man thue Unrecht, wenn man das näherungsweise Tastverfahren zur Ausmittelung der Gleichungswurzel an das nur zufällige System dekadischer Zahlen knüpfe. Jede Gleichung gebe vielmehr durch die in ihr vorkommenden Zahlencoefficienten zu er-

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1705 pag. 294, Remarque I. [2]) Ebenda pag. 278: *semblables arithmétiquement.* [3]) *semblables géométriquement.* [4]) Ebenda pag. 296. [5]) Ebenda. Année 1706 pag. 296—319.

kennen, in welcher Weise man am vortheilhaftesten ihrem Wurzelwerthe beikomme. Ueber die im vorigen Kapitel erwähnte dritte Abhandlung[1]) De Lagny's von 1722 sollten wir streng genommen erst berichten, wenn wir gesehen haben würden, was inzwischen von anderen Mathematikern geleistet worden war, doch bietet sie überhaupt wenig Neues für die Lehre von den Gleichungen und gestattet uns dadurch überhaupt von ihrer Erörterung Abstand zu nehmen.

Auf englischem Boden begegnen uns zunächst zwei Abhandlungen in den P. T. von 1707. John Colson[2]) (1680—1760) war damals ein noch gänzlich unbekannter Schulmeister. Sein Aufsatz in den P. T. lenkte die Aufmerksamkeit auf ihn, und da man überdies erfuhr, er sei ein guter Lehrer, veranlasste man ihn nach Cambridge zu kommen. Er wurde dort sogar 1739 bei der Besetzung einer Professur keinem Geringeren als De Moivre vorgezogen, der allerdings damals sein 72. Lebensjahr vollendete, was gegen ihn angeführt wurde. Nach vollzogener Wahl sah man ein, welchen Fehler man begangen hatte. John Colson also veröffentlichte 1707 Untersuchungen über Gleichungen 3. und 4. Grades[3]). Es war ein damals schon recht breitgeschlagener Gegenstand, den Colson behandelte, aber er wusste zwei Sätze klar und deutlich darin auszusprechen, welche wahrscheinlich schon vielen Mathematikern bekannt waren, von denen wir uns jedoch nicht erinnern können sie in einer älteren Druckschrift gelesen zu haben. Der eine Satz ist der[4]), dass jede Zahl drei Kubikwurzeln habe, und dass die Kubikwurzel der Einheit ebensowohl 1 als $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ als $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ heisse. Das war ja viel weniger allgemein, als was Rolle behauptet hatte (S. 119), aber für den Anfänger war es greifbarer. Im Uebrigen ist nicht gut anzunehmen, dass Colson damals Rolle's Buch gekannt haben sollte. Der zweite Satz besagt, dass jede kubische Gleichung drei reelle Wurzeln habe, sofern $r^2 - q^3$ einen negativen Werth besitze, dass dagegen bei positivem $r^2 - q^3$ nur eine Wurzel reell sei und zwei imaginär ausfallen. Die Bedeutung der Buchstaben q, r ergiebt sich daraus, dass die kubische Gleichung in der Gestalt

$$x^3 = 3px^2 + (3q - 3p^2)x + (2r + p^3 - 3pq)$$

[1]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1722 pag. 264—320.
[2]) W. W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge* pag. 100—101. [3]) P. T. XXV, 2353—2368. [4]) *Cujusris enim quantitatis radix cubica triplex erit, et ipsius unitatis radix cubica vel est* 1, *vel* $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, *vel* $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

auftritt. Um die aufgestellte Bedingung zu prüfen, schaffen wir mittels $x = y + p$ das quadratische Glied fort und erhalten

$$y^3 = 3qy + 2r = q_1 y + r_1.$$

Demnach ist $r^2 - q^3 = \frac{r_1^2}{4} - \frac{q_1^3}{27}$.

Hinter Colson's Aufsatze steht in den P. T. von 1707 ein solcher seines späteren Wettbewerbers um die Professur, Abraham de Moivre[1]). Er behandelt gewisse Gleichungen von ungradem Grade, welche nach Regeln aufgelöst werden können, die der Cardanischen Formel verwandt sind[2]). Es sind also nur ganz besondere Fälle, in welchen die betreffende Regel anwendungsfähig ist.

Das gleiche Jahr 1707 sah die Veröffentlichung eines Buches von ganz anderer Bedeutung, als jene Aufsätze sie besassen, der *Arithmetica universalis* von Newton. Newton, seit 1669 Professor in Cambridge (S. 61), hielt dort Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, und Niederschriften dieser Vorträge blieben dort im Umlauf. William Whiston[3]) (1667—1752) scheint dieselben im Jahre 1685 noch selbst gehört zu haben, und als er 1699 den Auftrag erhielt, als Stellvertreter für Newton Vorlesungen zu halten und 1703 gar sein wenig ebenbürtiger Nachfolger in der Professur wurde, kam ihm allmählich der Gedanke, jenes alte Vorlesungsheft durch den Druck vervielfältigen zu lassen. Ob Newton seine Einwilligung zur Veröffentlichung gab, wissen wir nicht genau. Jedenfalls hat Whiston es in seiner Vorrede zu dem Drucke von 1707 behauptet, während diese Vorrede selbst bei einer 1722 herausgekommenen zweiten Auflage, in welcher Newton mannigfache Verbesserungen anbrachte, wegblieb. Eine dritte Auflage[4]) veranstaltete G. J. s'Gravesande 1732 in Leiden. Er benutzte dazu den Text von 1722, setzte aber auch die Vorrede von 1707 wieder in ihre Rechte ein und vereinigte endlich noch in einem Anhange eine Anzahl von Abhandlungen anderer Schriftsteller über Gleichungen aus den P. T. Dort finden sich beispielsweise die drei Abhandlungen Halley's (S. 114) und die vorhin erwähnten Versuche von Colson und De Moivre.

Die *Arithmetica universalis* bietet zuerst einen Abriss der Buchstabenrechnung, dann die Auflösung von Gleichungen mit einer sowie mit mehreren Unbekannten, 77 eingekleidete Textaufgaben, darunter 61 geometrische, welche mittels Gleichungen gelöst werden, Untersuchungen über die Form der Gleichungswurzeln, constructive Auf-

---

[1]) P. T. XXV, 2368—2371. [2]) *ad instar Regularum pro Cubicis quae vocantur Cardani.* [3]) W. W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge* pag. 83—85. [4]) Wir bedienten uns dieser III. Auflage auf die sich folglich auch unsere Citate beziehen.

lösung von Gleichungen. Eine äusserliche Scheidung der hier angedeuteten Abschnitte findet nicht statt. Wir folgen der Anordnung, indem wir Bemerkenswerthes erwähnen, wie es der Reihe nach uns begegnet.

Wir schicken Eines voraus: dass nämlich von Schriftstellern, welche vorher das Gleiche oder doch Aehnliches gelehrt haben, so gut wie nie die Rede ist. Descartes z. B. ist nur an einer einzigen Stelle genannt. Dieses grundsätzliche Verschweigen von Vorgängern, mag es der Entstehung des Buches aus Vorlesungsheften, mag es einer Eigenthümlichkeit Newton's entspringen, erschwert ungemein die Prüfung, was wirklich neu war, was als von Vorgängern entnommen anzusehen sein muss, wobei wir uns auch der Unterscheidung zu entschlagen haben, ob Newton die Schriften jener Vorgänger selbst las, oder ob er sein Wissen der nicht ganz reinen, wenn auch überaus reichen Quelle von Wallis' englischer Algebra von 1685 entnahm, die er zur Zeit, als Whiston die Vorlesung hörte, grade studiren mochte.

Die Grössen, sagt Newton[1]), sind entweder affirmativ, d. h. grösser als Nichts, oder negativ, d. h. kleiner als Nichts. Das Wort Multipliciren wird in Ermangelung eines passenderen Ausdruckes auch bei Brüchen oder Irrationalzahlen angewandt, wo eine neue Grösse gesucht wird, welche zum Multiplicandus in demselben Verhältnisse, welcher Art es auch sei, stehen soll, wie der Multiplicator zur Einheit[2]). Beim Dividiren von Buchstabengrössen sind Divisor und Dividendus nach den Dimensionen eines und desselben Buchstaben, der dazu besonders geeignet erscheint, zu ordnen[3]), und zwar kann man die Division sowohl bei den Gliedern höchster Ordnung, als bei denen niederster Ordnung beginnen[4]).

Längere Zeit wird bei der Aufsuchung der Theiler eines Buchstabenausdruckes verweilt[5]). Man soll versuchen, ob der betreffende Ausdruck lineare Factoren besitze, und zwar solle man sich dazu eines Verfahrens bedienen, welches wir an einem Beispiele zu erläutern suchen wollen. Sei $P = 6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20$ zu prüfen. Man nehme eine aus drei oder mehr jeweils um die Einheit abnehmenden Gliedern bestehende arithmetische Progression, unter deren Gliedern die 0 vorkommt, und setze diese Zahlenwerthe nach einander für y ein, wie etwa $y = 2, 1, 0, -1, -2$. Das gegebene Polynom erhält durch diese Annahmen die Werthe 30, 7, 20, 3, 34. Man sucht die ganzzahligen Theiler dieser Werthe, welche

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 5. [2]) Ebenda pag. 6. [3]) Ebenda pag. 25. [4]) Ebenda pag. 27. [5]) Ebenda pag. 37—44: *De inventione divisorum.*

man neben dieselben schreibt. Neben 30 steht also 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30; neben 7 steht 1, 7 u. s. w. Nun sucht man unter den Theilern abwärts gehend eine fallende arithmetische Progression, wobei zu beachten ist, dass jeder Theiler sowohl positiv als negativ genommen werden darf. Findet sich eine solche arithmetische Progression, und ist ihre Differenz δ in dem Coefficienten der höchsten Potenz von y in P (in unserem Beispiele in 6, weil P mit $6y^4$ anfängt) enthalten, und entspricht dem $y=0$ das Glied α der ausfindig gemachten Progression von Theilern (im gegebenen Falle $+4$), so hat man zu probiren ob $\delta y + \alpha$, beziehungsweise $y + \frac{\alpha}{\delta}$ ein Theiler des Polynoms P ist. Sind die in ähnlicher Weise ermittelten Ausdrücke $y + \frac{\alpha_1}{\delta_1}$ u. s. w. sämmtlich keine Theiler von P, so besitzt dieses Polynom überhaupt keinen linearen Theiler[1], worunter naturgemäss zu verstehen ist keinen reellen rationalen Theiler. In dem erwähnten Beispiele sieht der Ansatz so aus:

y	P		
2	30	1 . 2 . 3 . 5 . 6 . 10 . 15 . 30	10
1	7	1 . 7	7
0	20	1 . 2 . 4 . 5 . 10 . 20	4
— 1	3	1 . 3	1
— 2	34	1 . 2 . 17 . 34	— 2

Die in der letzten Columne stehenden Zahlen 10, 7, 4, 1, — 2 bilden eine fallende arithmetische Progression mit der in 6 enthaltenen Differenz $\delta = 3$. Neben $y = 0$ steht, wie schon erwähnt, $\alpha = 4$. Der zu probirende Theiler ist also $3y + 4$, und wirklich findet sich $P = (3y + 4)(2y^3 \quad 3y^2 - 3y + 5)$. Wollte man (was Newton unterlässt) $P = 2y^3 - 3y^2 - 2y + 5$ weiter zerlegen, so sähe die Rechnung so aus:

y	P		
2	3	1 . 3	3
1	1	1	1
0	5	1 . 5	— 1
— 1	3	1 . 3	— 3

[1]) *concludendum erit quantitatem illam non admittere divisorem unius dimensionis.*

Die gesuchte arithmetische Progression kann nur 3, 1, −1, −3 sein. Ihre Differenz $\delta = 2$ ist in dem Coefficienten 2 von $2y^3$ enthalten. Neben $y = 0$ steht $\alpha = -1$. Man hat zu probiren, ob $2y - 1$ ein Factor des Polynoms ist. Aber

$$2y^3 - 3y^2 - 2y + 5 = (2y - 1)\left(y^2 - y - \frac{3}{2}\right) + \frac{7}{2},$$

d. h. die Division geht nicht auf, und das Polynom hat keinen reellen rationalen linearen Factor mehr. Ist kein linearer Factor, in dem erläuterten Sinne des Wortes, vorhanden, so könnte noch immer ein quadratischer Factor vorhanden sein, auf welchen aber nur dann zu fahnden ist, wenn das zu zerlegende Polynom mindestens bis zum 4. Grade ansteigt, denn ein Polynom 3. Grades kann keinen Factor 2. Grades besitzen, ohne dass neben ihm ein Factor 1. Grades vorhanden wäre. Newton lehrt nun auch solche quadratische Factoren insofern suchen, als er ermittelt, welche Factoren überhaupt in Vorschlag zu bringen sind. Er bedient sich dazu eines wieder von Einsetzungen gewisser in arithmetisch abnehmender Reihenfolge gewählter Werthe der allgemeinen Grösse, aber in ungleich verwickelterem Verfahren. Man könnte, meint Newton[1]), auch nach Factoren noch höheren Grades forschen, doch sei es nicht erwünscht, den Anfänger mit solchen Dingen aufzuhalten.

Einen Beweis für die Richtigkeit seines Verfahrens zur Aufsuchung von Factoren eines Polynoms hat Newton nicht gegeben. An einer späteren Stelle[2]) sagt er einmal, er habe die Beweisführungen mitunter aus doppelten Gründen unterlassen, bald weil sie ihm sehr leicht schienen, bald weil sie ohne lange Umschweife nicht mitgetheilt werden konnten. Wir wissen nicht, welcher der beiden Gründe ihm grade hier massgebend war. Jedenfalls hat Niclaus I. Bernoulli das Fehlende ergänzt und einen besonderen Aufsatz darüber seinem Oheime Johann Bernoulli eingereicht, der denselben im Mai 1708 Leibniz mittheilte[3]). Leibniz versprach für die Einrückung in die Abhandlungen der Berliner Akademie Sorge tragen zu wollen[4]), aber diese unterblieb, wir wissen nicht weshalb. Erst 1745 kam der Aufsatz in dem Briefwechsel zwischen Johann Bernoulli und Leibniz zur Veröffentlichung. Mit Rücksicht darauf, dass der Aufsatz doch schon im Mai 1708 jenen beiden grossen Mathematikern bekannt war, berichten wir gleich hier über ihn.

Niclaus I. Bernoulli's Beweis für Newton's Regel ist

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 41. [2]) Ebenda pag. 212: *Demonstrationes non semper adjunxi quoniam satis faciles mihi visae sunt, et nonnunquam absque nimiis ambagibus tradi non possunt.* [3]) Leibniz III, 827–835. [4]) Ebenda III, 835.

etwa folgender. Ist $P = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$ das gegebene Polynom und $F = p + qx + \cdots$ ein Factor desselben, d. h. ist $\frac{P}{F}$ eine ganze reelle Function von x, so muss die Theilbarkeit der Buchstabenausdrücke in eine solche ganzer Zahlen durch einander übergehen, sofern x durch eine positive oder negative ganze Zahl ersetzt wird. Schreiben wir P und F, in welchen x etwa durch ξ ersetzt ist, $P(\xi)$ und $F(\xi)$, so muss also $\frac{P(\xi)}{F(\xi)}$ eine ganze Zahl sein. Beispielsweise sind daher $\frac{P(2)}{F(2)}, \frac{P(1)}{F(1)}, \frac{P(0)}{F(0)}, \frac{P(-1)}{F(-1)}, \frac{P(-2)}{F(-2)}$ lauter ganze Zahlen. Da P gegeben ist, so kann man sofort $P(2)$, $P(1)$, $P(0)$, $P(-1)$, $P(-2)$ ausrechnen und die einzelnen ganzzahligen Theiler dieser Zahlen anschreiben. Unter letzteren müssen die $F(2)$, $F(1)$, $F(0)$, $F(-1)$, $F(-2)$ sich finden, und insbesondere ist $P(0) = a$, $F(0) = p$, also p ein Theiler von a. Ist F linear, d. h. $F = p + qx$, und die Division $\frac{P}{F}$ soll aufgehen, so muss andererseits q ein Theiler des Coefficienten der höchsten in P vorkommenden Potenz von x sein, also z. B. von d, wenn P nur vom 3. Grade sein sollte. Man weiss aber noch mehr. Offenbar ist $F(2) = p + 2q$, $F(1) = p + q$, $F(0) = p$, $F(-1) = p - q$, $F(-2) = p - 2q$, und diese Zahlen bilden eine fallende arithmetische Progression von der Differenz q (das frühere δ), welche nach dem unmittelbar Vorhergegangenen in d enthalten sein muss. Und nun ist das Verfahren augenscheinlich: aus den Theilern von $P(2)$, $P(1)$, $P(0)$ u. s. w. werden solche gewählt, die eine fallende arithmetische Progression bilden. Deren Differenz ist q, und neben $P(0)$ steht $F(0) = p$, folglich ist $F = p + qx$ bekannt. Nicht als ob dieses $p + qx$ immer Theiler von F sein müsste, aber wenn es ein lineares F giebt, so kann es nur $p + qx$ heissen. Ergiebt sich die Möglichkeit mehrerer fallender arithmetischer Progressionen unter den Theilern von $P(2)$, $P(1)$, $P(0)$ u. s. w., so hat man auch mehrere p, beziehungsweise mehrere q, und mit jedem $p + qx$ muss der Versuch gemacht werden, ob es ein Factor F von P ist oder nicht. Sucht man einen quadratischen Factor

$$F = p + qx + rx^2,$$

so ist ersichtlich, dass $F(2) = p + 2q + 4r$, $F(1) = p + q + r$, $F(0) = p$, $F(-1) = p - q + r$, $F(-2) = p - 2q + 4r$ eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung darstellen, während immer wieder $\frac{P(\xi)}{F(\xi)}$ ganzzahlig sein muss. Es kommt folglich darauf an, unter den Theilern von $P(2)$, $P(1)$, $P(0)$ u. s. w. diejenigen herauszusuchen, welche eine fallende arithmetische Reihe zweiter Ordnung darstellen, und

dahin ist auch Newton's Verlangen gerichtet, wenn gleich kaum ein Leser seine Ausdrucksweise verstehen dürfte, der nicht zum voraus weiss, was sie bedeuten soll.

Nach dem Aufsuchen der Theiler eines Ausdruckes kommt in der Arithmetica universalis die Erforschung des Gemeintheilers zweier Ausdrücke[1]. Sie erfolgt bei Buchstabenausdrücken ähnlich wie bei Zahlen durch fortgesetzte Division des Ausdruckes niedrigerer Ordnung in den höherer Ordnung, wobei der jedesmalige Rest den neuen Divisor, der ehemalige Divisor den neuen Dividenden liefert. Als abkürzend wird gelehrt, man solle, wo ein Ausdruck, sei es ein Divisor oder ein Dividend, einen Theiler leicht erkennen lässt, diesen vor der Fortsetzung des Verfahrens entfernen. Ist z. B. der Bruch $\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2}{9a^3b - 27a^2bc - 6abc^2 + 18bc^3}$ durch Aufsuchung des grössten Gemeintheilers von Zähler und Nenner zu kürzen, so lässt man zunächst aus dem Zähler den Factor a^2, aus dem Nenner den Factor $3b$ weg und hat dadurch die neue Gestalt $\frac{a^2}{3b} \cdot \frac{6a^3 + 15a^2b - 4ac^2 - 10bc^2}{3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3}$. Das verdoppelte $3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3$ von $6a^3 + 15a^2b - 4ac^2 - 10bc^2$ abgezogen, lässt $(15b + 18c)a^2 - (10b + 12c)c^2$ zum Rest, der leicht ersichtlich den Factor $5b + 6c$ besitzt. Diesen entfernt man und behält nur noch $3a^2 - 2c^2$, welches jetzt Divisor ist bei

$$3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3$$

als Dividend, und diese Division geht auf. Folglich ist $3a^2 - 2c^2$ der gesuchte Gemeintheiler, durch welchen man den Bruch zu kürzen hat und man erhält $\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2}{9a^3b - 27a^2bc - 6abc^2 + 18bc^3} = \frac{2a^3 + 5a^2b}{3ab - 9bc}$.

Zur Ausziehung der Quadratwurzel[2] aus selbst schon mit Irrationalitäten behafteten Binomien führt die Formel

$$\sqrt{A + B} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}}.$$

Bei der Elimination einer Unbekannten zwischen zwei Gleichungen mag zuerst auf den Kunstausdruck *Exterminatio* für die Wegschaffung einer Grösse aufmerksam gemacht werden. Sie erfolgt durch Gleichsetzung der aus jeder der beiden Gleichungen gefundenen Werthe dieser Unbekannten[3], oder durch ihre Ersetzung durch ihren Werth[4], mithin durch die beiden Verfahren, welchen eine spätere Zeit die Namen der Combinationsmethode und der Sub-

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 44—46. [2]) Ebenda pag. 49. [3]) Ebenda pag. 58: *Exterminatio quantitatis incognitae per aequalitatem valorum ejus.* [4]) Ebenda pag. 59: *Exterminatio quantitatis incognitae substituendo pro ea valorem suum.*

stitutionsmethode beigelegt hat. Nachdem auch noch auf die Elimination solcher Unbekannten aufmerksam gemacht ist, welche in den vorgelegten Gleichungen in höherer als der ersten Potenz auftreten[1]), und wobei mehrfache Endgleichungen ohne Erwähnung der Art ihrer Herstellung angegeben sind, wie z. B.

$$(ah - bg - 2cf)ah + (bh - cg)bf + (ag^2 + cf^2)c = 0$$

als Ergebniss von $ax^2 + bx + c = 0$ und $fx^2 + gx + h = 0$, geht Newton zum Wegschaffen der Irrationalitäten über[2]). In der Ueberschrift der 8 Zeilen, welche Alles in Allem dieser wichtigen Aufgabe gewidmet sind, heissen die Irrationalitäten *Quantitates surdae*, im Texte *Asymmetriae*, welcher letztere Name für Vieta und Fermat der gebräuchliche war. Das mehr angedeutete als gelehrte Verfahren ist genau das von Fermat (Bd. II, S. 733). Statt jedes irrationalen Ausdruckes wird ein neuer Buchstabe gesetzt und so die Aufgabe auf die der Elimination von in höherer als der ersten Potenz auftretenden Unbekannten zurückgeführt.

Bei Gelegenheit dieser Erwähnung müssen wir auf zwei Stellen unseres vorigen Abschnittes zurückgreifen, wo sich leider ein Widerspruch eingeschlichen hat. Wo wir (S. 164) die Differentiation von Irrationalgrössen in Newton's *Methodus fluxionum* schilderten, haben wir die Gedankenähnlichkeit mit Fermat's Rationalmachen von Gleichungen hervorgehoben, ohne dessen Bekanntschaft für Newton in Anspruch zu nehmen. Wo wir (S. 187) die zweite Erklärung des Inflexionspunktes wieder in der Methodus fluxionum eine vielleicht durch Fermat beeinflusste nannten, sagten wir eine Bestätigung im XVII. Abschnitte zu. Wir dachten dabei an die Wegschaffung der Asymmetrien in der Arithmetica universalis, welche uns (S. 164) nicht gleich gegenwärtig war. Wir halten uns verpflichtet, auf diesen Widerspruch hier aufmerksam zu machen, und zwischen den beiden Auffassungen eine Wahl zu treffen. Dass Newton die Stelle der Arithmetica universalis nicht schrieb, ohne von Fermat's Arbeiten Kenntniss zu haben, dürfte unabweisbar sein. Im Verfahren und in der Benennung (Asymmetrie) treffen zwei Schriftsteller nicht zufällig überein. Dass ferner die Beseitigung der Irrationalität in der Methodus fluxionum mit der Fermat'schen Substitution neuer Buchstaben für eine Irrationalzahl nahe verwandt ist, springt in die Augen, aber dennoch scheint uns auch gegenwärtig die Vermuthung, die betreffende Stelle der Methodus fluxionum müsse nach der Drucklegung von Fermat's Werken, also nach 1679 verfasst sein, zum Mindesten nicht bewiesen.

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 60: *Exterminatio quantitatis incognitae quae plurium in utraque aequatione dimensionum existit.* [2]) Ebenda pag. 64.

Newton kann von selbst auf diesen Gedanken der Ersetzung von Irrationalitäten, die in der Methodus fluxionum nur *Quantitates surdae* [1]) und nicht *Asymmetriae* heissen, durch neue Buchstaben gekommen sein. Hat er doch schon im Tangentenbriefe von 1672 sich geäussert, dass Irrationalitäten ihn nicht störten, und wenn dieser Behauptung auch mit grosser Wahrscheinlichkeit die Deutung gegeben werden kann, Newton habe dabei an Reihenentwicklung der Irrationalitäten als das unfehlbare von ihm überall in Anwendung gebrachte Hilfsmittel gedacht, so muss diese Deutung doch nicht grade die richtige sein. Wir ziehen es daher vor, um den genannten Widerspruch zu vernichten, S. 164 unverändert zu lassen, dagegen S. 187 die gegebene Zusage zurückzunehmen. Ob man trotzdem festhalten will, Newton's zweite Erklärung des Inflexionspunktes stehe unter Fermat'schem Einflusse und die sicherlich später umgearbeitete Methodus fluxionum habe nach 1679 Veränderungen erlitten, ist selbstverständlich ganz unabhängig von der Rücknahme jener Zusage zu beurtheilen.

Die von Newton zusammengestellten Textgleichungen würden vielleicht auch ein Verweilen gestatten. Wir wollen wenigstens die 11. Aufgabe [2]) erwähnen, die von Newton an in den Lehrbüchern heimisch geworden ist. Die Frage geht dahin, wie viele Kühe in der Zeit h eine Wiese von der Grösse g nebst dem immer nachwachsenden Grase kahl weiden werden, wenn der Nachwuchs der Wiesen sowohl als die Fresslust der weidenden Thiere als unveränderlich gelten und a Kühe b Wiesen in c Zeit, sowie d Kühe e Wiesen in f Zeit abweiden.

Bei der 24. geometrischen Textaufgabe nimmt Newton die Gelegenheit wahr, sich darüber zu äussern [3]), welches von den einer Aufgabe angehörenden Stücken man am vortheilhaftesten als Unbekannte wähle, nämlich ein solches, dem kein anderes gleichberechtigtes zur Seite stehe. Sei z. B. die Aufgabe gestellt (Fig. 50) in einen rechten Winkel FAD eine gegebene Länge FE der Art einzuzeichnen, dass die verlängerte FE durch den gegebenen, von AB und AD gleich weit abstehenden Punkt C hindurchgehe. Man könnte die Entfernung DE als Unbekannte wählen, oder AE, oder CE. Aber diesen Stücken sind andere, nämlich BF, beziehungsweise AF, be-

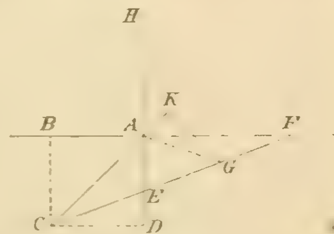


Fig. 50

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 56 letzte Zeile. [2]) *Arithmetica universalis* pag. 75. [3]) Ebenda pag. 119.

ziehungsweise CF gleichberechtigt, und es liegt nicht der geringste Grund vor, von jenen Paaren das eine Stück dem anderen vorzuziehen. Unpaar dagegen tritt der zwischen E und F in der Mitte liegende Punkt G auf, und man wird daher am zweckmässigsten ihn zu bestimmen suchen, und zwar auch mittels eines nur einmal auftretenden Stückes. Als Mittelpunkt der Hypotenuse EF des rechtwinkligen Dreiecks AEF liegt G auf dem mit $\frac{EF}{2}$ als Halbmesser um A als Mittelpunkt beschriebenen Kreise, braucht also nur auf diesem Kreise festgelegt zu werden. Es giebt ferner keine der CA ähnlich geartete Gerade in der Figur, und auf sie ist der Punkt G durch die nur einmal mögliche Senkrechte GK zu beziehen, wie umgekehrt eine in K senkrecht zu CA gezogene KG den vorerwähnten Kreis in G schneidet. Deshalb suche man endgiltig den Punkt K, sei es, indem man AK oder CK als Unbekannte der Aufgabe betrachtet. Newton nimmt $AK = y$, $AC = e$, $EG = b$ und behauptet, man finde alsdann $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$, während andere Annahmen zu einer Gleichung 4. Grades führen. Die von Newton angegebene Gleichung lässt sich folgendermassen herleiten. Wegen $CD \parallel BF$ ist $\angle ECD = EFA$ und $45^0 + ECD = 45^0 + EFA$. Aber

$$45^0 + ECD = BCA + ECD = 90^0 - ACE = 90^0 - KCG = KGC.$$

Andererseits ist

$$45^0 + EFA = 45^0 + GFA = 45^0 + GAF = KAF + GAF = KAG.$$

In den beiden rechtwinkligen Dreiecken KGC und KAG sind also auch die grösseren spitzen Winkel einander gleich, und die Dreiecke sind ähnlich. Folglich ist

$$\frac{CK}{GK} = \frac{GK}{AK},\quad CK \cdot AK = GK^2 = AG^2 - AK^2 \text{ oder } (e+y)y = b^2 - y^2,$$

und das stimmt überein mit $y^2 = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}b^2$.

Die 57. Aufgabe[1]) lässt zwei gegebene Winkel sich so um ihre Scheitelpunkte drehen, dass der Durchschnittspunkt zweier ihrer Schenkel eine grade Linie beschreibt, und frägt alsdann nach dem Orte des Durchschnittspunktes der beiden anderen Schenkel. Wir werden im 99. Kapitel auf diese und auch auf die vier zunächst auf sie folgenden Aufgaben zurückkommen.

Diese vier, zugleich die letzten eingekleideten Aufgaben[2]) sind ganz besonderen Inhaltes und auch räumlich von den anderen getrennt. Etwa eine halbe Seite ist frei gelassen, bevor die 58. bis 61. Aufgabe im Drucke unmittelbar an einander schliessend nachfolgen.

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 169—170. [2]) Ebenda pag. 171—178.

Die vier Aufgaben verlangen: durch 4 gegebene Punkte eine Parabel zu legen; durch 5 gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen; durch 4 Punkte einen Kegelschnitt zu legen, welcher in dem einen gegebenen Punkte eine gegebene Gerade berühre; durch 3 gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen, der zwei von den gegebenen Punkten als Berührungspunkte mit zwei ebenfalls gegebenen Geraden besitze. Das sind Aufgaben, welche Newton (S. 200) schon im 5. Abschnitte des II. Buches seiner Principien aufgelöst hatte, für welche aber in der Arithmetica universalis andere Constructionen angegeben sind. Der Gedanke beruht natürlich immer darauf, mit Hilfe der gegebenen Elemente z. B. der 5 Punkte einen weiteren Kegelschnittspunkt zu ermitteln; was man alsdann unter Benutzung von irgend 5 unter den schon bekannten Punkten beliebig wiederholen kann.

Nach den 61 Aufgaben, sagten wir (S. 378), gelangten die Formen der Gleichungswurzeln zur Untersuchung. Eine Gleichung kann mehrere Wurzeln haben[1], und man darf sich darüber nicht wundern, weil auch die in Gleichungen gebrachten Aufgaben auf mehrere Arten zu lösen sind, zwei Kreise z. B. nicht bloss einen Durchschnittspunkt, sondern deren zwei haben. Eine Gleichung kann so viele Wurzeln haben als der Exponent ihres Grades angiebt, jedenfalls nicht mehr[2]. Die Wurzeln selbst sind entweder affirmativ oder negativ und einige darunter nicht selten unmöglich[3]. Hat eine Gleichung keine unmögliche Wurzel, so ist die Anzahl der affirmativen Wurzeln der der Zeichenwechsel gleich, alle übrigen Wurzeln sind negativ[4]. Man beachte den Unterschied dieser Ausdrucksweise von der bei Descartes (Bd. II, S. 725—726). Dort Zeichenwechsel und Zeichenfolgen als Maassstab für die mögliche Anzahl positiver und negativer Wurzeln, hier die Anzahl negativer Wurzeln durch den Ausdruck die übrigen bestimmt, offenbar mit Rücksicht darauf, dass weiter oben der Gleichung $n$ten Grades nicht wirklich n Wurzeln, sondern höchstens n Wurzeln zugesprochen waren. Das Vorhandensein unmöglicher Wurzeln macht das Abzählen von Zeichenwechseln und Zeichenfolgen allerdings unfruchtbar, und deshalb fragt Newton[5], in welcher Anzahl unmögliche Wurzeln vorkommen?

Auch hier kommt es auf ein Abzählen von Zeichenwechseln an, jedoch nicht bei den wirklich der Gleichung angehörenden Zeichen, sondern bei künstlich errechneten. Sei die Gleichung

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 180. [2]) Ebenda pag. 181: *Potest vero aequatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, et non plures.* [3]) Ebenda pag. 182. [4]) Ebenda pag. 184: *Tot enim sunt radices affirmativae quot signorum in continua serie mutationes de + in − et − in +; caeterae negativae sunt.* [5]) Ebenda pag. 184—187.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

vorgelegt, deren Coefficienten zwar reell sind, aber beliebig positiv oder negativ sein können. Man bildet, dem Gleichungsgrade n entsprechend, n Brüche mit von 1 bis n ansteigenden Nennern, während die Zähler in umgekehrter Reihenfolge von n bis 1 abnehmen. Die Brüche heissen daher $\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \cdots \frac{n-k+1}{k}, \frac{n-k}{k+1}, \cdots \frac{1}{n}$. Aus diesen n Brüchen werden $n-1$ Quotienten gebildet, indem jeder folgende Bruch durch den ihm vorhergehenden dividirt wird. Diese Quotienten $\frac{1.(n-1)}{2.n}, \frac{2.(n-2)}{3.(n-1)}, \cdots \frac{k.(n-k)}{(k+1)(n-k+1)}, \cdots \frac{(n-1).1}{n.2}$ werden den $n-1$ Mittelgliedern der Gleichung, von $a_{n-1}x^{n-1}$ anfangend bis zu $a_1 x$, zugeordnet, so dass also $\frac{k(n-k)}{(k+1)(n-k+1)}$ zu $a_{n-k}x^{n-k}$ gehört. Jeder solche Zahlenquotient wird mit dem Quadrate des zugehörigen Gleichungsgliedes vervielfacht, d. h. es wird $\frac{k(n-k)}{(k+1)(n-k+1)} a_{n-k}^2 x^{2n-2k}$ gebildet und mit dem Producte der beiden Nachbarglieder innerhalb der Gleichung, d. h. mit

$$a_{n-k+1}x^{n-k+1} \,.\, a_{n-k-1}x^{n-k-1} = a_{n-k+1} \,.\, a_{n-k-1} \,.\, x^{2n-2k}$$

verglichen. Je nachdem $\frac{k(n-k)}{(k+1)(n-k+1)} a_{n-k}^2 \gtrless a_{n-k+1} \,.\, a_{n-k-1}$ ausfällt, schreibt man unter $a_{n-k}x^{n-k}$ das Zeichen $+$ oder $-$. Dem ersten Gliede $a_n x^n$ und dem letzten a_0 werden immer $+$ beigegeben. In dieser Zeichenreihe zählt Newton die Zeichenwechsel und behauptet, ihre Anzahl stimme mit der der unmöglichen Wurzeln überein.

Ist z. B. $x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$ zu untersuchen, so ist $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$ die zuerst zu bildende Bruchreihe und $\frac{\frac{2}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{3}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{3}$ die Quotientenreihe, und diese liefert, über die entsprechenden Gleichungsglieder gesetzt, folgende Gestalt: $x^3 + \overset{\frac{1}{3}}{px^2} + \overset{\frac{1}{3}}{3p^2x} - q = 0$. Nun ist $\frac{1}{3}p^2 < 1.3p^2$ und das giebt $-$. Ferner $\frac{1}{3}\cdot 9p^4 > p\cdot(-q)$ und das giebt $+$. Mit Hinzuziehung der beiden $+$ für die äussersten Glieder hat man also die Zeichenreihe $+ - + +$ mit zwei Zeichenwechseln und folglich zwei unmögliche Wurzeln.

Fehlt in der zu untersuchenden Gleichung ein einzelnes Glied zwischen zwei vorhandenen Gliedern, so wird es als mit dem Coefficienten 0 behaftet angeschrieben, und die Regel ändert sich im Uebrigen nicht. Bei $x^4 + 0x^3 - 6x^2 - 3x - 2 = 0$ z. B. ist $\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$

die Bruchreihe und $\frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{3}{8}$ die Quotientenreihe. Der Ansatz

$x^4 + \overset{\frac{3}{8}}{0x^3} - \overset{\frac{4}{9}}{6x^2} - \overset{\frac{3}{8}}{3x} - 2 = 0$ liefert $\frac{3}{8} \cdot 0 > 1 \cdot (-6)$ mit $+$; $\frac{4}{9} \cdot 36 > 0 \cdot (-3)$ mit $+$; $\frac{3}{8} \cdot 9 < (-6) \cdot (-2)$ mit $-$. Man gewinnt die Zeichenreihe $+ + + - +$ mit zwei Zeichenwechseln und folglich zwei unmögliche Werthe.

Eine Schwierigkeit tritt auf, wo zwei oder mehr Glieder in der Gleichung fehlen. Bei $x^5 + ax^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - a^5 = 0$ erscheint die Bruchreihe $\frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}$, die Quotientenreihe $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$. Der Ansatz wird $x^5 + \overset{\frac{2}{5}}{ax^4} + \overset{\frac{1}{2}}{0x^3} + \overset{\frac{1}{2}}{0x^2} + \overset{\frac{2}{5}}{0x} - a^5 = 0$ mit $\frac{2}{5}\, a^2 > 1 \cdot 0$ mit $+$, aber dann $\frac{1}{2} \cdot 0 = a \cdot 0$, $\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \cdot 0$, $\frac{2}{5} \cdot 0 = 0 \cdot (-1$ mit lauter ungewissen Zeichen. Newton schreibt vor, man solle die ungewissen Zeichen abwechselnd $- + - +$ u. s. w. schreiben. Nur in dem Falle, dass die Gleichungsglieder, zwischen welchen Glieder fehlen, entgegengesetzten Vorzeichens sind (wie in dem gegebenen Falle ax^4 und $-a^5$) müsse man ohne Rücksicht auf die vorgeschriebene Abwechslung dem letzten Lückengliede das Zeichen $+$ zuertheilen. Hier entsteht also die Zeichenreihe $+ + - + + +$ mit zwei Zeichenwechseln und zwei unmöglichen Wurzeln. Die Gleichung $x^5 + ax^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + a^5 = 0$ dagegen würde die Zeichenreihe $+ + - + - +$ mit vier Zeichenwechseln und vier unmöglichen Gliedern liefern.

Wie endlich hat man zu verfahren, wenn eine Gleichheit der das Zeichen bedingenden Ausdrücke ausserhalb einer Lücke eintritt? Ein derartiges Beispiel ist $x^3 + px^2 + \frac{1}{3} p^2 x - q = 0$, wo der Ansatz ähnlich dem des ersten Beispieles $x^3 + \overset{\frac{1}{3}}{px^2} + \overset{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} p^2 x} - q = 0$ wird. Die Kriterien $\frac{1}{3} \cdot p^2 = 1 \cdot \frac{1}{3} p^2$, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} p^4 > p \cdot (-q)$ bringen eine Zeichenreihe $+ ? + +$ hervor, welche, je nachdem das ? durch $+$ oder durch $-$ ersetzt wird, gar keinen Zeichenwechsel oder deren zwei besitzt. Man hat in dem gegebenen Falle zwei unmögliche Wurzeln, denn die Wurzeln von

$$x^3 + px^2 + \frac{1}{3} px - q = 0$$

sind

$$x_1 = -\frac{p}{3} + \sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + q} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + q},$$

$$x_3 = -\frac{p}{3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + q} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\sqrt[3]{\frac{p^3}{27} + q}.$$

Newton schweigt über diese Schwierigkeit.

Wir werden im XVIII. Abschnitte englische Schriftsteller kennen lernen, welche Newton's Untersuchung aufnahmen. Hier müssen wir uns damit begnügen, nur das festzustellen, dass Newton der Erste war, der die Frage nach der wirklich vorhandenen Anzahl complexer Gleichungswurzeln überhaupt aufwarf und an einer Beantwortung derselben sich versuchte.

Im weiteren Verlaufe[1]) kommt Newton zu den Formeln, welche die Summen der 1., der 2., der 3., der 4. Potenzen der Gleichungswurzeln mit Hilfe der Gleichungscoefficienten berechnen lassen. Es sind genau die gleichen Ergebnisse, zu welchen Albert Girard (Bd. II, S. 719) gelangt war, nur dass sie bei Newton etwas weniger durchsichtig geschrieben sind. In zwei Beziehungen geht aber Newton über Girard hinaus. Er giebt zu verstehen, man könne Formeln für die Summen höherer Wurzelpotenzen, so für die Summe der 6. Potenzen, finden, wenn auch ohne dieselben anzugeben. Er benutzt ferner die gegebenen Formeln zur Auffindung einer Grenze, unterhalb deren die Wurzelwerthe liegen müssen[2]). Quadrate, 4. Potenzen, 6. Potenzen u. s. w. sind immer positiv. Die Summe solcher mit geradem Exponenten versehenen Potenzen von Gleichungswurzeln ist folglich immer grösser als die gleichhohe Potenz einer einzelnen, wenn auch der grössten Gleichungswurzel. Heisst x_μ diese grösste Gleichungswurzel und Σx^{2m} die Summe der $2m$ten Potenzen aller Gleichungswurzeln, so schreibt sich der ausgesprochene Satz als $x_\mu^{2m} < \Sigma x^{2m}$, und folglich muss $x_\mu < \sqrt[2m]{\Sigma x^{2m}}$ sein. Der Unterschied $\sqrt[2m]{\Sigma x^{2m}} - x_\mu$ wird um so geringfügiger, je grösser m gewählt wird. Andere Grenzbestimmungen für die Gleichungswurzeln schliessen sich an Rolle's Lehrsatz (S. 118) an.

Wir hoben (S. 379) hervor, der Name Descartes sei einmal genannt. Dieses ist der Fall[3]), wo Newton von der Auflösung biquadratischer Gleichungen mittels Zerlegung in zwei quadratische Factoren handelt, welche unter Voraussetzung der Lösbarkeit kubi

[1]) *Arithmetica universalis* pag. 192. [2]) Ebenda pag. 193—196: *De limitibus aequationum.* [3]) Ebenda pag. 210—211.

scher Gleichungen möglich sei (Bd. II, S. 726—727). Die Methode, sagt er, rühre von Descartes her, empfehlenswerth findet er sie nicht.

Nachdem die algebraische Auflösung von Gleichungen nach den verschiedensten Richtungen durchgesprochen ist, wendet Newton sich geometrischen Methoden zu, zuerst unter Anwendung der Conchoide[1]), für deren Berechtigung er eintritt. Gleichwie Archimed in seinen Wahlsätzen die Conchoide zum Zwecke der Winkeldreitheilung als bekannt voraussetze und Pappus das Gleiche thue, dürfe man jene Curve zu jeder Zeit anwenden. Der Zweck der Benutzung geometrischer Hilfsmittel bei Gleichungsauflösungen sei die Auffindung erster Näherungswerthe, von denen aus man dann rechnend den wahren Wurzeln so nahe zu kommen vermöge, als man immer wolle. Die Benutzung der Conchoide insbesondere zur Auflösung der von ihrem quadratischen Gliede befreiten kubischen Gleichung $x^3 + qx = r$, wo q und r positiv sein sollen, ist folgende (Fig. 51). Eine beliebige Strecke KA werde $= n$ gesetzt und auf ihr $KB = \frac{q}{n}$ abgemessen. BA wird in C halbiert und von K aus mit KC als Halbmesser ein Kreisbogen beschrieben, in welchem eine Sehne $CX = \frac{r}{n^2}$ eingezeichnet wird, dann wird AX gradlinig verbunden. Mittels der Conchoide ist es möglich, von K aus die Gerade KEY so zu zeichnen, dass das zwischen den verlängerten AX und CX enthaltene Stück $EY = AC$ sei, so ist XY die Wurzel der Gleichung.

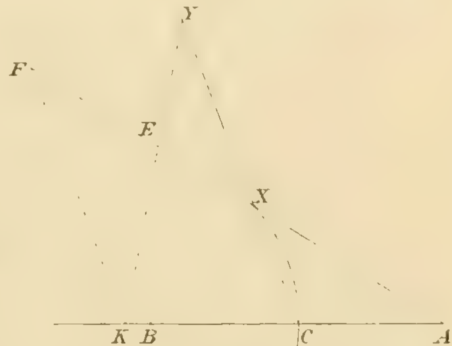


Fig. 51

Zum Beweise wird $KF \parallel CX$ gezogen. Zunächst ist $\triangle ACX \sim AKF$ und $\triangle EYX \sim EKF$. Daraus folgt

$$\frac{AC}{AK} = \frac{CX}{KF} \text{ und } \frac{YX}{YE}\left(= \frac{YX}{AC}\right) = \frac{KF}{KE}.$$

Multiplication beider Gleichungen mit einander giebt

$$1. \quad \frac{YX}{AK} = \frac{CX}{KE}.$$

Daraus folgt weiter $\frac{YX}{CX} + 1 = \frac{AK}{KE} + 1$, $\frac{YX + CX}{AK + KE} = \frac{CX}{KE}$ oder

$$2. \quad \frac{YX}{AK} = \frac{YX + CX}{AK + KE} = \frac{CY}{AK + KE}.$$

[1] *Arithmetica universalis* pag. 213—215.

Nach bekannten Sätzen der Planimetrie ist ferner

$$YK^2 = CY^2 + CK^2 - CY \,.\, CX,$$

also auch

$$(YK + CK)(YK - CK) = CY(CY - CX) = CY \,.\, YX$$

und

$$\frac{YK - CK}{YX} = \frac{CY}{YK + CK}.$$

Aber

$$YK + CK = YK - YE + CA + CK = EK + AK$$

und

$$YK - CK = YK - YE + CA - CK = EK - BK,$$

also auch $\frac{EK - BK}{YX} = \frac{CY}{EK + AK}$, beziehungsweise wegen 2. auch

$$3. \quad \frac{EK - BK}{YX} = \frac{YX}{AK}.$$

Aus 3. folgt aber sofort

$$4. \quad YX^3 + AK \,.\, BK \,.\, YX = AK \,.\, EK \,.\, YX.$$

Wegen 1. ist $EK \,.\, YX = AK \,.\, CX$, und somit geht 4. über in $YX^3 + AK \,.\, BK \,.\, YX = AK^2 \,.\, CX$ oder, wegen

$$AK = n,\ BK = \frac{q}{n},\ CX = \frac{r}{n^2},\ \text{in}\ YX^3 + q \,.\, YX = r.$$

Sind q und r nicht beide positiv, so sind einzelne von den auf getragenen Strecken in entgegengesetzter Richtung zu nehmen.

Auch die Construction einer das quadratische Glied enthaltenden kubischen Gleichung mittels der Conchoide wird in Angriff genommen[1], sofern die 3 Gleichungswurzeln nicht insgesammt positiv oder insgesammt negativ sind. Wir brauchen kaum darauf aufmerksam zu machen, dass durch diesen Zusatz der sogenannte irreductible Fall als ausgeschlossen erklärt ist. Ausser der gewöhnlichen Conchoide benutzt Newton zur Ermittelung der Wurzel einer kubischen Gleichung auch eine Art von Kreisconchoide[2], d. h. er legt eine constante nach einem festen Punkte gerichtete Strecke zwischen einen Kreis und eine gegebene Gerade. Wieder etwas später[3] zeigt Newton die den Alten, wie er ausdrücklich sagt, schon bekannte Auflösung kubischer Aufgaben, wie die Auffindung zweier mittlerer Proportionalen zwischen gegebenen Strecken mit Hilfe der Cissoide und noch später[4] mit Hilfe einer festen Ellipse und eines Kreises.

Wir haben diejenigen Bestandtheile der Arithmetica universalis erwähnt, von denen wir glauben, dass sie eine gewisse geschichtliche Bedeutung besitzen. Wollten wir Alles hervorheben, was überhaupt zu fesseln vermag, so müssten wir den ganzen Band übersetzen.

[1] *Arithmetica universalis* pag. 218–220. [2] Ebenda pag. 220. [3] Ebenda pag. 231. [4] Ebenda pag. 232flg.

Eines geht hoffentlich schon aus unserem Berichte hervor: dass Newton eine ganz besondere algebraische Begabung besass, und dass er in der Gleichungslehre auch da mindestens erweiternd und verallgemeinernd auftrat, wo Andere, die er freilich nie nannte, aber mit grösster Wahrscheinlichkeit gekannt hat, ihm den Zutritt bahnten.

Wollen wir einen weiteren theoretischen Fortschritt in der Lehre von den Zahlengleichungen aufzuzeichnen finden, so müssen wir die P. T. von 1717 zur Hand nehmen. Dort[1] hat Brook Taylor die erste wirkliche Anwendung seiner Reihe gemacht, indem er an Halley's Aufsatz von 1694 (S. 115) anknüpfte. Wir berichten in aller Kürze darüber, indem wir, wie jedesmal, wenn es um Taylor'sche Arbeiten sich handelt, unseren Lesern nicht zumuthen, sich an seine Bezeichnungen zu gewöhnen, die Gedankenfolge aber unverändert lassen. Die vorgelegte Gleichung möge y als Unbekannte enthalten, also etwa $F(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ heissen. Auf irgend eine Weise, z. B. mittels Curvendurchschnitt, sei ein Näherungswerth z von y gefunden, indem $F(z)$ allerdings nicht 0, sondern x zum Werthe hat, aber x doch schon ziemlich klein ist. Der genaue Werth von y kann als $z + r$ betrachtet werden, wo die Ergänzung r noch zu suchen ist. Zweierlei weiss man, wovon man bei diesem Aufsuchen von r Gebrauch zu machen hat, erstens dass $F(z) = x$, zweitens dass $F(z + r) = 0$. Nach Taylor's Satze ist

$$F(z+r) = F(z) + F'(z).r + \frac{F''(z)}{1.2} r^2 + \frac{F'''(z)}{1.2.3} r^3 + \frac{F^{IV}(z)}{1.2.3.4} r^4 + \cdots$$

Ersetzt man hier $F(z+r)$ durch 0 und lässt, in Würdigung des Umstandes, dass r klein sein wird, die Glieder fort, welche höhere Potenzen von r als die zweite enthalten, so bleibt zur Bestimmung von r noch $F(z) + F'(z).r + \frac{F''(z)}{2} r^2 = 0$, oder anders geschrieben: $x + x'.r + \frac{x''}{2} r^2 = 0$, woraus man gewinnt

$$r = -\frac{x'}{x''} \pm \sqrt{\frac{x'^2}{x''^2} - \frac{2x}{x''}}.$$

Dann kann $z + r = z_1$ gesetzt werden, $F(z_1) = x_1$, $y = z_1 + r_1$, um nach dem vorher bekannten Verfahren r_1 zu finden u. s. w. Taylor setzt hinzu, man könne bei Aufsuchung der Ergänzungen r die Quadratwurzelausziehung vermeiden. Die Gleichung

$$x + x'r + \frac{x''}{2} r^2 = 0$$

lässt sich in der Form $r\left(x' + \frac{x''r}{2}\right) = -x$ schreiben. Daraus folgt

[1]) P. T. XXX, 610–622.

$v = \frac{x}{x' + \frac{x''v}{2}}$, und ersetzt man das v im Nenner des Bruches rechts vom Gleichheitszeichen in kettenbruchartigem Verfahren durch das ihm nahezu gleiche $-\frac{x}{x'}$, so entsteht $v = -\frac{x}{x' - \frac{xx''}{2x'}}$. Taylor behauptet weiter, allerdings ohne diese Behauptung irgendwie zu begründen, sowohl der erstere irrationale, als der zweite rationale Werth von v liefere die doppelte Anzahl von Decimalstellen genau, als deren schon in z genau waren, $y = z + v$ sei daher auf dreimal so viele Decimalstellen richtig als z.

Einen Aufsatz De Lagny's aus dem Jahre 1722, der der Zeitfolge nach hier zu erwähnen wäre, haben wir (S. 377) in dem Sinne vorweggenommen, dass wir erklärten, ein genauerer Bericht über ihn sei überflüssig.

Ganz anders verhält es sich mit einem Abschnitte eines 1722 in England gedruckten Buches. Cotes hat die drei ersten Abschnitte seiner *Harmonia Mensurarum*, den ersten, welchen wir (S. 363) besprachen, den zweiten und dritten, welche sich mit Integrationen beschäftigen, bis 1716 so ziemlich druckfertig gestellt. Anderes war nur auf fliegenden Zetteln entworfen, und ihnen wusste Robert Smith, der Herausgeber des Cotes'schen Nachlasses, einen sehr schönen Satz zu entnehmen[1], der so vom Untergange gerettet wurde. Er bildet die Grundlage der Lehre von den sogenannten binären Gleichungen, indem er den Ausdruck $x^\lambda \pm a^\lambda$ in λ einfache Factoren zerlegt, deren jeder einzeln gleich 0 gesetzt eine Wurzel von $x^\lambda \pm a^\lambda = 0$ erkennen lässt. Cotes, oder vielleicht sagen wir richtiger Smith, hat den Satz, welcher nachmals den Namen des Cotes'schen Lehrsatzes erhalten hat, allerdings nur geometrisch ausgesprochen, ihn auch weder hergeleitet noch bewiesen. Durch den Mittelpunkt eines Kreises (Fig. 52) vom Halbmesser a wird ein Durchmesser hindurchgelegt und auf ihm etwa links von dem Mittelpunkte O in der Entfernung $OP = x$ ein Punkt P bemerkt. Dann wird von dem Endpunkte A des durch P hindurchgehenden Durchmessers aus der Kreisumfang in 2λ gleiche Theile getheilt und P mit allen Theilpunkten gradlinig verbunden. Die Verbindungsgeraden nach den Theilpunkten sind nach den Punkten grader Ordnung ganz ausgezogen, nach denen ungrader Ordnung nur punktirt gezeichnet. Je nachdem λ ungrad (etwa $\lambda = 5$) oder grad (etwa $\lambda = 6$) gewählt ist, gehört die von P aus nach rechts gezogene

[1] *Harmonia Mensurarum* pag. 113: *Revocari tandem ab interitu Theorema pulcherrimum.*

Durchmesserstrecke zu den punktirten, beziehungsweise zu den ausgezogenen Geraden. In beiden Fällen ist das Product der λ ausgezogenen Strecken $= a^\lambda - x^\lambda$, und das Product der λ punktirten

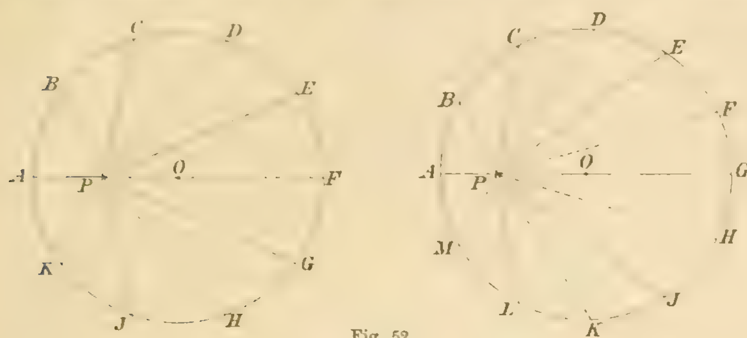


Fig. 52.

Strecken $= a^\lambda + x^\lambda$. Fällt P ausserhalb des Kreises, so dass $x > a$, so ist das Product der ausgezogenen Strecken $x^\lambda - a^\lambda$, während die Werthform des Productes der punktirten Strecken sich nicht verändert.

Nur französische und hauptsächlich englische Veröffentlichungen haben in diesem Kapitel unsere Aufmerksamkeit in Anspruch genommen. In Deutschland war, wie aus den vorhergehenden Kapiteln sich schon zeigte, wie in den nachfolgenden sich bestätigen wird, die Mathematik als Ganzes keineswegs zurückgegangen, aber die wirklich bedeutenden deutschen Mathematiker waren am wenigsten Algebraiker. Fast nur um einen deutschen Namen als Stellvertreter einer an Zahl mehr als an Leistung in's Gewicht fallenden Klasse von Schriftstellern hier zu nennen, erwähnen wir Paul Halcke[1] († 1731), den reimgewandten Rechenmeister zu Buxtehude, der 1719 ein Buch unter dem Namen *Mathematisches Sinnenconfect* herausgab, welches dem von Tobias Beutel (S. 35) und anderen niedersächsischen Fachgenossen gegebenen Beispiele folgend, zahlreiche Textgleichungen in mehr oder weniger witzige Verse kleidete.

99. Kapitel.

Differentiiren. Integriren. Analytische und projective Geometrie.

Zwei Abschnitte der von Roger Cotes 1722 herausgegebenen *Harmonia Mensurarum*, so sagten wir (S. 394), waren Integrationen

[1] Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. I, 30—32 und 91.

gewidmet. In der That fanden auch die Methoden des Differentiirens und Integrirens in dem Zeitraume, dem dieser Abschnitt gewidmet ist, noch mancherlei Förderung. Für das Differentiiren war es zwar kaum mehr nöthig. Hier hatte Leibniz, hatte L'Hôpital schon veröffentlicht, was erforderlich war, um jedes Differential sofort hinschreiben oder doch herleiten zu können. Die Differentiation trigonometrischer Functionen mochte indessen immerhin, in besondere Regeln gefasst, sich bequemer ausführen lassen, und diese Regeln stellte, wenn auch mit zunächst anderer Absicht, Cotes auf. Wir haben (S. 346) seine *Aestimatio errorum etc.* genannt. Fehler, sagt er in dieser Abhandlung, seien unvermeidlich, wo und wie man Beobachtungen anstelle, aber man müsse suchen sie in engstmögliche Grenzen einzuschliessen[1]). Zu diesem Zwecke werden die kleinsten Veränderungen der trigonometrischen Functionen eines Bogens zu den kleinsten Veränderungen des Bogens selbst in Beziehung gesetzt, oder, wie ein Mathematiker des europäischen Festlandes auch damals schon gesagt haben würde, die trigonometrischen Functionen des Bogens werden nach dem Bogen differentiirt. So giebt Cotes als ersten Hilfssatz[2]) $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$, als zweiten $\frac{d \tan x}{dx} = \sec x^2$, als dritten $\frac{d \sec x}{dx} = \tan x \cdot \sec x$. Im ersten der auf die Hilfssätze folgenden Satze bleibt (Fig. 53) im Dreieck ABC die Seite AB und der Winkel B unverändert, während BC in BD, AC in AD übergeht. Nennen wir (was Cotes natürlich nicht thut) $BC = x$, $CD = dx$, $AC = y$, $AD = y + dy$ und schneiden auf AD die Strecke $AE = y$ ab, so dass $ED = dy$ übrig bleibt, so ist im Dreieck CDE der Quotient $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin DCE}{\sin DEC}$. Bei kleinstmöglichen



Fig. 53.

Veränderungen[3]) ist aber $\angle DEC = CEA = ECA = 90^0$ und $\angle DCE = 90^0 - ACB$, mithin $\frac{dy}{dx} = \cos ACB$. Im dritten Satze wird der Winkel A nach x differentiirt. Wird CE, wie in dem soeben erörterten ersten Satze, als mit dem Halbmesser y beschriebener

[1]) *Magni momenti fuerit ad Scientiae nobilissimae perfectionem, errores istos intra terminos quam maxime fieri potest angustos concludere et coarctare, quos omnino tollere merito desperemus.* [2]) *Variatio minima cujusvis arcus circularis est ad Variationem minimam Sinus ejusdem arcus ut Radius ad Sinum complementi.* [3]) *ubi Variationes istae minimae sunt.*

minimaler Kreisbogen betrachtet, so ist $CE = y \cdot dA$, $CD = dx$ und $\frac{dA}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{CE}{CD} = \frac{\cos ECD}{y} = \frac{\sin ACB}{y}$. Cotes spricht das so aus: Der Quotient der Winkelveränderung durch die Veränderung der gegenüberliegenden Seite sei gleich dem Quotienten des Sinus des Winkels, welcher der constanten Dreiecksseite gegenüberliegt, durch die Seite, welche sich gegenüber von dem constanten Dreieckswinkel befindet. Er macht dazu die Bemerkung, es müsse $dA = dC$ sein, was, abgesehen vom Vorzeichen, offenbar richtig ist, weil

$$\angle BAD + ADB = BAC + ACB,$$

also

$$\angle BAD - BAC = ACB - ADB.$$

Eine ganze Reihenfolge ähnlicher Sätze wird für das ebene wie für das sphärische Dreieck abgeleitet.

Nun kommt Cotes erst zu seiner am Anfange der Abhandlung ausgesprochenen Aufgabe. Eine Beobachtungsgrösse A, sagt er, möge dadurch fehlerhaft sein, dass andere Beobachtungsgrössen B, C, D fehlerhaft gegeben wurden. Man müsse alsdann eine Gleichung zwischen A einerseits und B, C, D andererseits bilden und nach der Newtonschen Methode aus ihr die Fluxion von A ermitteln. Die Fehler werden im Verhältnisse der Fluxionen stehen. Seien, wie es bei trigonometrischen Aufgaben in der Regel sich ergebe, die betreffenden Grössen A, B, C, D nicht als solche unmittelbar in der Gleichung enthalten, sondern durch ihre Sinus, ihre Tangenten, ihre Secanten, so bediene man sich bei der Fluxionsbildung der drei an die Spitze gestellten Hilfssätze. Eine Aufgabe verlangt z. B. (Fig. 54) die zur Standlinie AC senkrechte Höhe AB mit Hilfe des in C zu messenden $\angle C$ zu berechnen. Nach dem 3. Satze, über welchen wir eben berichtet haben, ist $\frac{dC}{dAB} = \frac{\sin B}{BC}$. In dem bei A rechtwinkligen Dreiecke ABC ist $\frac{1}{BC} = \frac{\cos B}{AB}$, also auch $\frac{dC}{dAB} = \frac{\sin B \cdot \cos B}{AB} = \frac{\sin 2B}{2AB}$ und $\frac{dAB}{AB} = \frac{2dC}{\sin 2B} = \frac{2dC}{\sin 2C}$, wegen $B + C = 90^0$, $2B + 2C = 180^0$.



Fig. 54.

Das Verhältniss des Irrthums in der Höhe AB zu dieser Höhe selbst ist mithin um so kleiner, je grösser $\sin 2C$ ist. Der grösste Sinus ist 1, und $\sin 2C$ hat diesen Werth, wenn $2C = 90^0$, $C = 45^0$ ist. Man erhält folglich die Höhe AB am richtigsten, wenn man auf der Standlinie AC so weit fortgeht, bis $\angle C$ sich nicht mehr von 45^0 unterscheidet.

Will man den wahren Ort z eines Gegenstandes aus vier beobachteten Orten p, q, r, s ableiten (so schliesst Cotes seine Abhandlung), so muss man diesen Orten Gewichte P, Q, R, S beilegen, die den Beobachtungsfehlern umgekehrt proportional sind. Der gesuchte Punkt z ist alsdann der Schwerpunkt jener in p, q, r, s angebrachten Gewichte.

Zur Fertigstellung der Lehre von dem Differentiiren gehört auch Leibnizens höhere Differentiirung eines Productes (S. 357) und Taylor's Vertauschung der Veränderlichen (S. 365), an welche wir erinnern.

Mehr als das Differentiiren war das Integriren der Vervollkommnung fähig. Wir wissen, dass Leibniz und Johann Bernoulli (S. 261—264) das Zerlegen einer gebrochenen algebraischen Function in Partialbrüche gelehrt haben und dadurch der Integration solcher Functionen grossen Vorschub leisteten. Ein besonderes Werk über die umgekehrte Fluxionsmethode, welches ein Schotte, George Cheyne[1]) (1671—1743), im Jahre 1703 herausgab, bietet weniger, als man von einem Werke dieses Titels erwarten mochte. Hat doch De Moivre 1704 ein eigenes Buch gegen jenes veröffentlicht, und wenn Cheyne 1705 neuerdings in grobem, von ihm selbst später missbilligten Tone antwortete, so erhöht das den Werth seiner *Fluxionum methodus inversa* ebensowenig, als es die darin vorkommenden Irrthümer aufhebt. Wir nennen das Werk überhaupt nur, weil es Johann Bernoulli Anlass zu Bemerkungen gab, welche von Wichtigkeit sind, aber, da sie erst 1742 an die Oeffentlichkeit gelangten, hier noch nicht wiedergegeben werden dürfen. Cheyne war ursprünglich zur Theologie bestimmt, wurde dann Arzt und gab 1705 und 1715 zwei Bände *Philosophical Principles of Religion* heraus, in welchen er Theologie, Naturwissenschaften und Mathematik in toller Weise verquickte, wenn er auch früher im Aerger über den Streit mit De Moivre die Mathematik unfruchtbar und luftig[2]) genannt hatte.

Cotes hat dagegen Namhaftes für die Integralrechnung geleistet. Der 2. und 3. Abschnitt seiner *Harmonia Mensurarum* enthält Integrale, welche nach heutiger Schreibart besondere Fälle von

$$\int (a_1 + b_1 x^n)^{r_1} (a_2 + b_2 x^n)^{r_2} dx$$

oder von ähnlich gebauten Ausdrücken sind, und Anwendungen dieser Integrale. Die Herleitung der verschiedenen Formeln hat Cotes unterdrückt. Das letzte Integral, welches bei ihm vorkommt, ist

[1]) *National Biography* X, 217—219 (London 1887, edited by Leslie Stephen). [2]) *these barren and airy studies.*

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(k + lx^n)\sqrt{e + fx^n + gx^{2n}}}$$

mit ganzzahligem t und beliebigem n.

Wir kommen zu den Fortschritten, welche die Geometrie seit 1700 gemacht hat. An der Spitze der zu erwähnenden Persönlichkeiten steht Antoine Parent[1] (1666—1716). In Paris geboren wurde er, noch bevor er 3 Jahre alt war, einem Landpfarrer, dem Oheime seiner Mutter, anvertraut, der ihm die erste nothdürftige Erziehung gab, so gut er selbst dazu im Stande war. Wo sein Wissen nicht ausreichte, z. B. beim Rechenunterrichte, gab er dem Knaben ein Lehrbuch in die Hand, dessen Rand bald mit Bemerkungen angefüllt war. Aehnlicherweise erfand sich der Knabe später eine eigene Geometrie, und so wuchs seine Neigung zur Mathematik, der er sich mehr und mehr zuwandte, auch nachdem er nach Paris zurückgekehrt dort das Rechtsstudium begonnen hatte. Er gab bald selbst mathematischen Unterricht und erhielt 1699 Zutritt zur Académie des Sciences unter dem damals noch vorhandenen Titel eines Eleven des wirklichen Mitgliedes Herrn von Billettes. Diese Akademiker zweiten Grades wurden erst bei einer Umgestaltung der Satzungen 1716 beseitigt, so dass Parent in seinem Todesjahre wirklicher Akademiker wurde. Er schrieb eine grosse Anzahl von Abhandlungen über die verschiedensten Gegenstände, die zum Theil in Sitzungen der Académie des Sciences vorgelesen wurden und als *Essais et Recherches de mathématique et physique* erst 1705, dann stark vermehrt 1713 in drei Duodezbänden im Drucke erschienen. Das Format stiess die Gelehrten, der Inhalt und die ziemlich schwierige Darstellungsweise die Ungelehrten ab. Parent's Leistungen wurden weit weniger bekannt und hatten geringere Wirkung, als sie beanspruchen durften. Dazu trug noch ein anderer Umstand bei, den uns der Verfasser seines akademischen Nachrufes, welchem wir alle diese Einzelheiten entnehmen, nicht verschwiegen hat. Parent war in den Verhandlungen, welche sich an einzelne Vorträge anschlossen, mit scharfen, den Gewohnheiten guter Gesellschaft nicht Rechnung tragenden Worten schnell bereit. Man erkannte das Verdienstvolle des so von ihm Gesagten allerdings an, aber, meint der Lobredner, es gehörte dazu etwas Anstrengung des Billigkeitsgefühls, und die erspare man besser den Menschen[2]. Die für die Geschichte der Mathematik wichtigste Abhandlung Parent's ist die über die Eigenschaften der Oberflächen, *des affections*

[1] *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1716. Histoire pag. 88—93.
[2] *Il fallait quelque petit effort d'équité, qu'il vaut toujours mieux épargner aux hommes.*

des superficies[1]), welche er am 24. Juli und 23. August 1700 in der Académie des Sciences vorlas. Er beginnt mit der Untersuchung der Tangentialebene an die Kugel. Er bezieht (Fig. 55) die durch die Punkte A, D, C, E hindurchgehende Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt sich in O befindet, auf die Ebene IQS, auf welcher die in Q beginnende Gerade QI gegeben ist. O projicirt sich auf die genannte Ebene mittels $OH = a$, H auf die Gerade QI durch $HI = c$, während $QI = b$ ist. Kugelhalbmesser ist $OB = r$.

Fig. 55.

Dabei ist B ein an sich beliebiger Punkt der Kugeloberfläche, welcher durch die Strecken $BL = z$, $LM = y$, $MQ = x$ bestimmt wird. Eine durch den Mittelpunkt O der Grundebene IQS parallel gelegte Ebene OFG trifft die verlängerte LB in G. Zieht man in dieser neuen Ebene $OF \parallel HI$ und $GF \parallel IQ$, welche in F zusammenstossen, so ist $BG = a - z$, $FG = b - x$, $OF = c - y$. Weil aber OFG und FGB rechte Winkel sind, muss das Quadrat von OB der Summe der Quadrate von OF, FG, GB gleich sein, und man erhält die Oberflächengleichung[2]):

$$c^2 + y^2 - 2cy + b^2 + x^2 - 2bx + a^2 + z^2 - 2az = r^2.$$

Diese Gleichung differentiirt Parent unter der Annahme, dass y constant sei[3]), und findet $\frac{a-z}{b-x}\,dz = dx$, ein allerdings dem Vorzeichen nach unrichtiges Ergebniss. Das Constantsein von y giebt aber, fährt Parent fort, der Kugelgleichung die Bedeutung des Kreises ABC, der sich auf der Grundebene als die Gerade $RLN \parallel QI$ projicirt, oder, mit Parent zu reden, der auf der Axe RLN aufsitzt[4]). Dessen Berührungslinie in B ist die BN, welche auf RN die Subtangente $LN = z\frac{dx}{dz}$ abgrenzt. Unter Einsetzung des gefundenen Werthes von $\frac{dx}{dz}$ ist also $LN = \frac{a-z}{b-x}\cdot z$. Aehnliches folgt unter der Annahme, dass x constant sei. Erstlich entsteht die Gleichung $\frac{a-z}{c-y}\,dz = dy$;

[1]) *Essais et Recherches de mathématique et de physique* II, 181—200.
[2]) *on aura l'équation superficielle.* [3]) *Si on prend maintenant la différentielle de cette égalité, en laissant y constante.* [4]) *un cercle ABC assis sur l'axe RLN.*

zweitens erhält die Kugelgleichung dabei die Bedeutung des Kreises DBE, der sich als $MLP \parallel HI$ projicirt; drittens ist BP die Berührungslinie dieses Kreises in B, und die Subtangente ist

$$LP = z\frac{dy}{dz} = \frac{a-z}{c-y}\cdot z.$$

Die Berührungsebene an die Kugel in B dehnt sich aber ersichtlich längs der BX und BP aus und trifft folglich die Ebene IQS in der NP[1]. So die von uns nahezu wörtlich übernommene Darstellung Parent's.

Parent bleibt aber bei der Kugeloberfläche nicht stehen. Er geht in unmittelbar sich anschliessenden Aufsätzen auch zur Betrachtung der Oberflächen $\frac{y}{b+x} = \sqrt{\frac{z-x}{z}}$ und $y = \frac{z^3}{x^2+az}$ über, deren Schnitte parallel den einzelnen Coordinatenebenen untersucht werden, wobei die Erhöhungen und Vertiefungen der Oberflächen erkannt werden. Selbst gegenwärtig, wo die analytische Geometrie des Raumes zu den elementaren Kenntnissen zu zählen ist, bieten diese Aufsätze dem Verständnisse manche Schwierigkeit und machen es, ganz abgesehen von den vorerwähnten persönlichen Verhältnissen, leicht begreiflich, dass sie so lange Jahre ziemlich unbeachtet bleiben konnten.

Parent hat sich 1702 der drei zu einander senkrechten Raumcoordinaten auch bedient, um den Satz zu beweisen, dass das Cylindroid, wie er das Umdrehungshyperboloid mit einer Mantelfläche nennt, durch Umdrehung einer Geraden erzeugt werden kann[2], während er in einem Zusatze[3] den gleichen Satz geometrisch erläuterte. Neu war übrigens der Satz auch 1702 nicht, denn Wren hatte ihn 1669 in den P. T. ausgesprochen[4].

Ferner verdient noch eine andere Arbeit Parent's von 1702 erwähnt zu werden[5], in welcher die Schraubenlinie mit Hilfe von drei Coordinaten untersucht ist.

Jedenfalls hat also Parent die ersten Gleichungen von Oberflächen in drei zu einander senkrechten Raumcoordinaten x, y, z im Drucke herausgegeben, mag die (S. 235) angedeutete Möglichkeit, dass Johann Bernoulli schon 1698 Aehnliches insgeheim besass, oder gar mündlich bekannt gegeben hatte, Grund haben oder nicht. Wir persönlich zweifeln daran und stützen unsere Zweifel auf Folgendes. Parent hat an den Pendeluntersuchungen von

[1] *Il est évident que le plan tangent a la surface de la Sphère en B s'étend le long des tangentes BX, BP et qu'il coupe par conséquent le plan IQS dans la ligne de rencontre NP.* [2] *Essais et Recherches de mathématique et de physique* II, 645 flgg., besonders 653. [3] Ebenda III, 473. [4] P. T. III, 961—962. [5] *Essais et Recherches de mathématique et de physique* II, 684.

Huygens Ausstellungen gemacht, und Johann Bernoulli unternahm in den A. E. vom Juni 1715 Huygens' Vertheidigung[1]). Er geht dabei mit Parent nichts weniger als glimpflich um. Er nennt ihn einen Menschen, dessen Lebenszweck zu sein scheine Andere zu rupfen[2]). Wir glauben kaum, dass Johann Bernoulli, der über sein geistiges Eigenthum mit peinlicher Sorgfalt Wachende, die Gelegenheit hätte vorbeigehen lassen, Parent auch als Sünder an seinen Raumcoordinaten hinzustellen, wenn er irgend Veranlassung dazu gehabt hätte. Wir geben allerdings zu, dass dieser Beweis hinfällig würde, wenn Johann Bernoulli jenes Sammelwerk der Essais et Recherches nicht gekannt hätte, als er so beleidigend über Parent sich äusserte. Ist das aber anzunehmen? Am 11. September 1715 hat Bernoulli die Essais et Recherches jedenfalls gekannt, denn unter diesem Datum schrieb er an Leibniz[3]), Parent suche Streit mit berühmten Gegnern und habe in den Essais et Recherches auch ihn (Leibniz) angegriffen. Dazu kommt noch Eines. Wieder 1715 und zwar am 6. Februar schrieb Johann Bernoulli an Leibniz[4]): Ich verstehe unter einer gegebenen krummen Oberfläche eine solche, deren einzelne Punkte, wie die Punkte einer gegebenen Curve, durch drei Coordinaten x, y, z bestimmt sind, zwischen welchen durch eine Gleichung ausgedrückte Beziehungen bestehen. Jene drei Coordinaten sind aber nichts Anderes, als senkrechte Gerade aus irgend einem Oberflächenpunkte auf drei der Lage nach gegebene und unter einander senkrechte Ebenen. Als Beispiel wird $xyz = a^3$ genannt. Das klingt nicht, als wenn von allgemein bekannten Dingen die Rede wäre. Wenn dann Leibniz antwortete[5]), er habe ehemals angefangen, an die Lehre von Ortsgleichungen mit drei Coordinaten heranzutreten; wer darauf Mühe verwende, werde leisten, was der Arbeit lohne, so sehen wir auch in dieser Antwort nur so viel, dass der Gegenstand damals in der Luft lag. Parent's Erstlingsrechte erscheinen uns davon nicht berührt.

Der nächste Schriftsteller, mit welchem wir es zu thun haben, Jacob Le Poivre[6]), ist wahrscheinlich in Mons in Belgien geboren, jedenfalls im December 1710 dort gestorben, wo er als städtischer Bauaufseher seit 1706 angestellt war. Im Jahre 1704 erschien von ihm in Paris ein wenige Bogen starkes Büchelchen *Traité des sections du cylindre et du cône considérées dans le solide et dans le plan avec des démonstrations simples et nouvelles*. Eine zweite Auflage erschien

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* II, 187—204. [2]) *homo ad carpendum, uti videtur, natus.* [3]) Leibniz III, 946. [4]) Ebenda III, 938. [5]) Ebenda III, 939. [6]) Chasles, *Aperçu hist.* 130—134 (deutsch 126—130). — Quételet, *Histoire des Sciences mathématiques et physiques chez les Belges* pag. 271—273.

1708 in Mons, welche dem Titel der ersten Ausgabe noch die Worte hinzufügte *plus simples et plus générales que celles de l'édition de Paris*, also gewissermassen eine verbesserte und gekürzte Auflage sein will[1]). Schon die erste Auflage hat genügendes Aufsehen erregt, um einen ausführlichen etwas nörgelnden Bericht in dem Journal des Sçavans von 1704, eine kurze aber sehr anerkennende Besprechung in den A. E. von 1707 hervorzurufen. Als Verfasser der letzteren nennt eine handschriftliche Randbemerkung Christian Wolf.

Le Poivre nahm in der Vorrede den Mund etwas voll. Er habe die Absicht gehegt und, wie er glaube, auch durchgeführt, ebenso für Gelehrte wie für Nichtgelehrte zu schreiben. Den Ersten habe er sich bemüht gerecht zu werden, indem er sie eine neue Projection, neue Eigenschaften der Kegelschnitte und neue Beweise dafür kennen lehrte, den Letzteren, indem er die Dinge so leicht machte, dass zu deren Verständniss einige wenige Sätze aus den Anfangsgründen der Geometrie ausreichen müssten. Ihm selbst als Verfasser seien dadurch allerdings erhebliche Schwierigkeiten erwachsen, so dass die wenigen Druckbogen eine Arbeitszeit von drei Jahren beanspruchten. Den Marquis De L'Hôpital nannte er als seinen Gönner, ohne dessen Anregung das Büchelchen möglicherweise gar nicht entstanden wäre. Der Kritiker des Journal des Sçavans ist der Ansicht, Le Poivre habe, ohne dass man ihm jedes Verdienst absprechen wolle, doch der Hauptsache nach nur wiederholt, was De la Hire in seinen Planiconiques (S. 120—121) schon gelehrt habe. Ganz so schlimm scheint es nun nicht gewesen zu sein, wenn auch De la Hire Einfluss auf Le Poivre geübt haben mag. Der Kegelschnitt erfolgt durch eine Ebene, deren Lage im Raume gegeben sein muss. Sie ist theilweise bestimmt, wenn man den Durchschnitt der Ebene mit der kreisförmigen Grundfläche des Kegels kennt, aber doch nur theilweise, denn die Neigung gegen die Grundfläche ist mit jener Durchschnittsgeraden nicht gegeben. Diese wird bekannt, sobald durch die Spitze des Kegels eine zweite Ebene der Schnittebene parallel gelegt wird, deren Spur in der Grundfläche ebenfalls gegeben ist. Die beiden genannten Parallelen in der Grundfläche nebst der Spitze des Kegels müssen folglich genügen, um den Kegelschnitt selbst zeichnen zu können[2]).

„Es ist leicht zu sehen, dass man nur durch einen Punkt M des Kreises, der die Basis des Kegels bildet und erzeugender Kreis (*cercle générateur*) genannt wird, irgend eine Transversale ziehen darf, welche die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene und ihre Parallele in

[1]) H. C. Wins hat 1854 einen Neudruck besorgt. [2]) Wir folgen der Darstellung von Chasles, welcher wir die nun folgenden zwischen Gänsefüsschen stehenden Sätze wörtlich entnehmen.

zwei Punkten schneiden wird; darauf den zweiten dieser Punkte mit dem Scheitel S des Kegel durch eine Gerade verbinden und durch den anderen Punkt eine Parallele mit dieser Geraden ziehen. Diese Parallele wird offenbar in der schneidenden Ebene liegen und die Seitenlinie SM des Kegels in einem Punkte M' treffen, welcher der gesuchten Curve angehört. Für einen anderen Punkt des erzeugenden Kreises wird man einen anderen Punkt des Schnittes erhalten. Diese Construction ist allgemein, welches auch die Lage des Punktes S im Raume sein mag, und sie besteht selbst dann noch, wenn dieser Punkt in der Ebene des Kreises liegt. In diesem letzteren Falle hat man zwar keinen Kegel, aber die durch den Punkt gebildete Curve ist doch noch ein Kegelschnitt."

Jedenfalls hat Le Poivre's Büchelchen, wenn auch von Fachmännern gelesen und, wie wir gesehen haben, öffentlicher Besprechung gewürdigt, nicht entfernt die fruchtbare Wirkung ausgeübt, welche man einer ebensowenig umfangreichen, aber von überraschenden neuen Wahrheiten erfüllten Schrift aus dem Jahre 1706 nachrühmen muss. Wir reden von Newton's *Enumeratio linearum tertii ordinis*[1]). Curven 3. Grades waren auch vor Newton schon oft untersucht. Auch auf Durchschnittspunkte von Curven mit anderen Curven war oft genug die Aufmerksamkeit gelenkt worden, und Jakob Bernoulli hatte (S. 119) den Grad der Curve ins Quadrat erhebend gefunden, dass Curven $n$ten Grades ausreichen, um Wurzeln einer Gleichung vom Grade n^2 zu finden. Aber den Grad der Curve durch die Anzahl von Durchschnittspunkten mit einer Geraden zu bestimmen und dann die so definirten Curven dritten Grades in Gruppen zusammenzufassen, das hatte unseres Wissens vor Newton Niemand versucht. Wir wollen und müssen demnach Newton's *Enumeratio*, mit welchem abkürzenden Namen wir die Abhandlung hinfort bezeichnen, genauer besprechen.

Wir beginnen mit der wortgetreuen Uebersetzung des I. Kapitels von der Ordnung der Linien[2]). „Geometrische Linien werden am besten nach der Dimensionszahl der Gleichung, durch welche die Beziehung zwischen Ordinaten und Abscissen bestimmt ist, oder (was das Gleiche ist[3]) nach der Anzahl von Punkten, in welcher sie von einer geraden Linie geschnitten werden können, in Ordnungen unterschieden. Eine Linie erster Ordnung ist solcher Weise die einzige Gerade; Linien zweiter oder quadratischer Ordnung werden die Kegel schnitte und der Kreis sein, und dritter oder kubischer Ordnung sind

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 245—270. [2]) *Linearum ordines.* [3]) *quod perinde est.*

die kubische Parabel, die Neil'sche Parabel, die Cissoide der Alten und die übrigen, deren Aufzählung wir zu unserer Aufgabe gemacht haben. Eine Curve ersten Geschlechtes wird das Gleiche sein wie eine Linie zweiter Ordnung (da die Gerade nicht zu den Curven zu zählen ist), eine Curve zweiten Geschlechtes das Gleiche wie eine Curve dritter Ordnung. Eine Linie von der Ordnung unendlich ist eine solche, welche eine Gerade in unendlich vielen Punkten schneiden kann, wie die Spirale, die Cycloide, die Quadratrix und jede Linie, welche durch unendlich viele Umdrehungen eines Strahles oder eines Rades erzeugt wird."

Die Curven der verschiedensten Grade haben, behauptet Newton, Eigenschaften, welche denen der Curven zweiten Grades ungemein ähnlich sind. Bei den Kegelschnitten — das sind die Curven zweiten Grades oder ersten Geschlechtes — stösst man auf Durchmesser, d. h. auf grade Linien, welche einander parallele Sehnen halbiren, auf einen Mittelpunkt, in welchem alle Durchmesser zusammen treffen, auf zwei Asymptoten der Hyperbel, welche die Eigenschaft besitzen, dass jede Secante zwischen einem Curvendurchschnittspunkte und der einen Asymptote die gleiche Länge besitzt wie zwischen dem zweiten Curvendurchschnittspunkte und der anderen Asymptote. Bei der Curve dritten Grades oder zweiten Geschlechtes treffen zwei parallele Sehnen die Curve in je drei Punkten. Mögen dieselben zur Verdeutlichung, welche sich Newton wenig angelegen sein lässt, auf der einen Sehne $M_1 M_2 M_3$, auf der anderen $M_1' M_2' M_3'$ heissen. Nun existirt auf der ersten Sehne ein Punkt M_0, auf der anderen ein solcher M_0', von der Eigenschaft, dass $M_0 M_1 = M_0 M_2 + M_0 M_3$ und $M_0' M_1' = M_0' M_2' + M_0' M_3'$. Alsdann ist die Gerade $M_0 M_0'$ ein Durchmesser der Curve, d. h. sie schneidet auch jede andere Sehne $M_1'' M_2'' M_3''$ in einem Punkte M_0'' von der in der Gleichung $M_0'' M_1'' = M_0'' M_2'' + M_0'' M_3''$ ausgesprochenen Eigenschaft[1]). Treffen alle Durchmesser einer Curve zweiten Geschlechtes in einem Punkte zusammen, so ist dieser der Mittelpunkt der Curve im Allgemeinen. Die Zahl der Asymptoten überschreitet den Grad der Curve nicht, deshalb kann die Curve ersten Geschlechtes nur 2, die zweiten, dritten Geschlechtes nur 3, 4 Asymptoten besitzen und nicht mehr u. s. w. Ueber die Zwischenräume, welche auf einer Sekante zwischen der Curve und den Asymptoten abgegrenzt sind, gelten Sätze, die denen von den Abschnitten einer Sehne, die durch den Durchmesser hervor-

[1] *Opuscula Newtoni* I. 248. Ueber diesen auf Curven jeden Grades ausdehnbaren Satz vergl. z. B. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven. II. Auflage. Leipzig 1882 Nr. 128, S. 142.

gebracht sind, entsprechen[1]). Ein weiterer Satz, den Newton von den Curven zweiten Geschlechtes ausspricht[2]), heisst folgendermassen, indem wir wieder Buchstaben zur Verdeutlichung einführen: Werden zwei parallele Sehnen $L_1 L_2 L_3$, $L_1' L_2' L_3'$ durch zwei andere parallele Sehnen $M_1 M_2 M_3$, $M_1' M_2' M_3'$ in den Punkten O, O' geschnitten, wo O den Durchschnittspunkt der beiden unbestrichelten, O' den der beiden bestrichelten Sehnen bezeichnet, so ist

$$\frac{OL_1 \cdot OL_2 \cdot OL_3}{OM_1 \cdot OM_2 \cdot OM_3} = \frac{O'L_1' \cdot O'L_2' \cdot O'L_3'}{O'M_1' \cdot O'M_2' \cdot O'M_3'}.$$

In die Unendlichkeit sich erstreckende Curvenzweige sind entweder hyperbolisch oder parabolisch. Sie heissen hyperbolisch, wenn sie eine Asymptote besitzen, parabolisch, wenn sie eine solche entbehren, und das zeige sich bei Aufsuchung der Berührungslinie an den unendlich entfernten Punkt des betreffenden Curvenzweiges. Die Berührungslinie an den unendlich fernen Punkt eines hyperbolischen Zweiges falle nämlich mit der Asymptote zusammen, während die Berührungslinie an den unendlich fernen Punkt eines parabolischen Zweiges in die Unendlichkeit zurückweicht, verschwindet, nirgend zu finden ist[3]).

Hierauf werden vier Hauptfälle der Gleichung 3. Grades hervorgehoben: $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, deren erster wieder 11 Unterfälle unterscheiden lässt. Die Unterfälle zerfallen ihrerseits wieder in Formen, von welchen im Ganzen 72 angegeben sind. Bei den Benennungen, deren sich Newton zur Schilderung der einzelnen Formen bediente, kommen die Ausdrücke einer mit Spitzen versehenen Curve (*cuspidata*), eines conjugirten Punktes (*quae conjugatam habet ovalem infinite parvam, id est punctum*) vor[4]).

So vielfältig die Curven sein mögen, können sie nach Newton's Behauptung[5]) stets durch optische Benutzung einfachster Gebilde hervorgebracht werden. Fallen auf eine unbegrenzte von einem Lichtpunkte aus beleuchtete Ebene die Schatten von Figuren, so sind die Schatten von Kegelschnitten stets wieder Kegelschnitte, die von Curven zweiten, dritten Geschlechtes sind immer wieder Curven zweiten, dritten Geschlechtes und so fort in's Unendliche. Wie aber der Kreis beim Schattenwerfen jeden Kegelschnitt zu erzeugen vermag, so werden alle Curven zweiten Geschlechtes von den fünf diesem

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 249. — Salmon-Fiedler l. c. Nr. 129, S. 143. [2]) *Opuscula Newtoni* I, 250: *De Ratione contentorum sub Parallelorum segmentis.* — Salmon-Fiedler l. c. Nr. 124, S. 137. [3]) *in infinitum recedet, evanescet et nullibi reperietur.* [4]) *Opuscula Newtoni* I, 253. [5]) Ebenda I, 264: *Genesis Curvarum per Umbras.*

Geschlechte angehörenden divergirenden Parabeln als Schatten erzeugt, und auch bei höherem Curvengeschlechte können einfache Formen ermittelt werden, deren Schatten alle Curven ihres Geschlechtes erzeugen. Es ist ersichtlich, dass man den neueren Anschauungen sich näher anbequemt, wenn man das Newton'sche Wort Schatten stets durch Centralprojection ersetzt.

Auch Curvenerzeugungen, welche man gegenwärtig projectivische nennt, lehrt Newton[1]) unter dem Namen organischer Zeichnung kennen. Seien (Figur 56) zwei Winkel PAD, PBD von gegebener Grösse um ihre Scheitelpunkte A, B, welche Pole heissen sollen, in Drehung versetzt, und zwar so, dass der Durchschnittspunkt P ihrer Schenkel AP, BP eine Gerade beschreibt, alsdann beschreibt der Durchschnittspunkt D der beiden anderen Schenkel AD, BD einen durch die Pole A, B hindurchgehenden Kegelschnitt, der aber in eine Gerade ausartet, wenn jene von P beschriebene Gerade durch einen der Pole A, B hindurchgeht, oder wenn die Winkel BAD, ABD gleichzeitig verschwinden. Der gleiche Satz ist schon in Newton's Principien als XXI. Lemma des ersten Buches ausgesprochen und hätte daher (S. 200) erwähnt werden sollen.

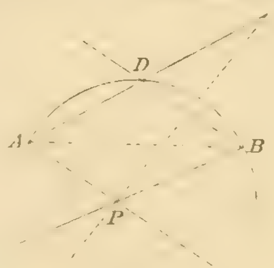


Fig. 56.

Ein zweiter Satz lässt (Figur 57) den Durchschnittspunkt P der beiden Schenkel AP, BP einen Kegelschnitt durchlaufen, dem einer der beiden Pole, etwa A, angehört. Alsdann beschreibe der Durchschnittspunkt D der beiden anderen Schenkel AD, BD eine Curve zweiten Geschlechtes, auf welcher der andere Pol B liegt, während der erste Pol A ihr sogar als Doppelpunkt angehört. Eine Ausnahme liefert das gleichzeitige Verschwinden der beiden Winkel BAD, ABD, indem alsdann D einen anderen durch den Pol A hindurchgehenden Kegelschnitt beschreibt.

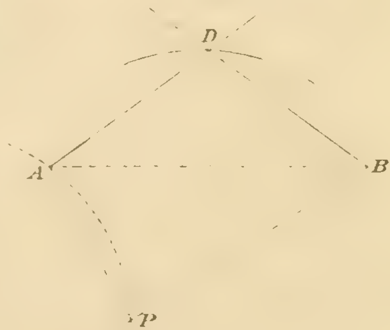


Fig. 57.

Ein dritter Satz verlangt (Figur 58), dass der von dem Durchschnittspunkte P der Schenkel AP, BP durchlaufene Kegelschnitt keinen der beiden Pole A, B enthalte. Der Punkt D durchlaufe

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 265 flg.: *De curvarum descriptione organica.*

alsdann eine Curve zweiten oder dritten Geschlechtes mit Doppelpunkt. Die Curve ist zweiten Geschlechtes in dem Ausnahmefall gleichzeitigen Verschwindens der Winkel *BAD*, *ABD*, in allen anderen Fällen ist sie dritten Geschlechtes und hat drei Doppelpunkte, zu welchen die beiden Pole *A*, *B* gehören.

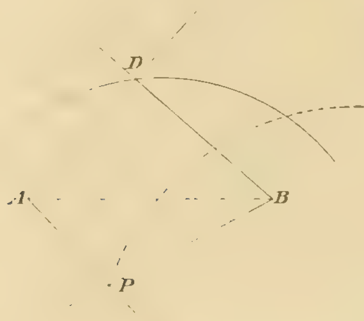


Fig. 58.

Die drei Sätze führen zu einer punktweisen Darstellung eines Kegelschnittes, von welchem 5, einer Curve zweiten Geschlechtes mit Doppelpunkt, von welcher 7 Punkte gegeben sind, Aufgaben, von welchen ein Theil auch Aufnahme in die Arithmetica universalis (S. 387) gefunden hat. Die in der Enumeratio gelehrte Zeichnung des Kegelschnittes ist folgende. Newton nennt die fünf Punkte, welche dem Kegelschnitte angehören sollen, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Nun seien *A*, *B* Pole der Figur und *CAB*, *CBA* die zur Drehung bestimmten Winkel, wobei *C* denjenigen Durchschnittspunkt zweier Schenkel vorstellt, der in Figur 56 mit *D* bezeichnet war. Auch die Punkte *D*, *E* werden als ähnlich mit *C* hervorgebrachte Punkte des Kegelschnittes betrachtet, und ihnen entsprechen Durchschnittspunkte *P*, *Q* der beiden anderen Winkelschenkel, Punkte *P* der Figur 56 hervorbringend. Die Punkte *P*, *Q* gradlinig verbunden liefern nun diejenige Gerade, welche in der wiederholt genannten Figur 56 deren Punkt *P* durchläuft, und dadurch werden noch beliebig viele Punkte *D* des zu zeichnenden Kegelschnittes ermittelt.

Eine kubische Curve durch 7 Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* zu legen geht man ähnlicherweise von dem Dreiecke *ABC* aus, lässt *CA* und *CB* sich drehen, bis sie in *D*, *E*, *F*, *G* einander schneiden, Punkte, denen die Durchschnittspunkte *P*, *Q*, *R*, *S* der gedrehten *BA* und *AB* entsprechen. Der durch *A*, *P*, *Q*, *R*, *S* hindurchgelegte Kegelschnitt erzeugt die verlangte Curve zweiten Geschlechtes.

Man kann, fährt Newton fort[1]), nach gleicher Methode Curven 3., 4. und noch höheren Geschlechtes beschreiben, allerdings nicht alle, aber doch die, so viele es sein mögen, welche bequemer Weise mittels einer Bewegung erzeugt werden können. Eine doppelpunktlose

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 267: *Eadem methodo Curvas tertii, quarti et superiorum Generum describere licet, non omnes quidem, sed quotquot ratione aliqua commoda per motum localem describi possunt. Nam Curvam aliquam secundi vel superioris generis Punctum duplex non habentem commode describere Problema est inter difficiliora numerandum.*

Curve zweiten oder höheren Geschlechtes bequem zu beschreiben, gehört unter die schwierigeren Aufgaben.

Zum Schlusse der Abhandlung bespricht Newton die Möglichkeit, Gleichungen höheren Grades durch Curvendurchschnitte zur Auflösung zu bringen[1]) und benutzt dabei den Ausdruck Hyperbolismus, den er schon früher dahin erklärt hat[2]), er verstehe unter Hyperbolismus das Ersetzen der Ordinate einer gegebenen Curve durch das Product eben dieser Ordinate in die Abscisse. Ist also beispielsweise $xy = 1$ die Gleichung einer Hyperbel, so ist $x \cdot xy = 1$ oder $y = \frac{1}{x^2}$ deren Hyperbolismus. Nun sei etwa die Gleichung

$$a + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + (g + m)x^6 + hx^7 + kx^8 + lx^9 = 0$$

gegeben[3]). Division durch x^6 verwandelt sie in

$$\frac{a}{x^6} + \frac{c}{x^4} + \frac{dx}{x^4} + \frac{e}{x^2} + \frac{fx}{x^2} + g + m + hx + kx^2 + lx^3 = 0,$$

und ersetzt man $\frac{1}{x^2}$ durch y, so erscheint die Curve

$$ay^3 + cy^2 + dxy^2 + ey + fxy + g + m + hx + kx^2 + lx^3 = 0$$

neben der Curve $x^2y = 1$. Das sind zwei Curven zweiten Geschlechtes, und die Abscissen ihrer Durchschnittspunkte müssen Wurzeln der vorgelegten Gleichung sein. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese letzten Paragraphen unter dem Einflusse von durch Fermat veröffentlichten Untersuchungen (Bd. II, S. 747) entstanden, aber das Meiste, was wir aus der Enumeratio mittheilten, war wesentlich neu und überraschend, wurde auch in der (S. 281) erwähnten von Leibniz herrührenden Besprechung[4]) unter Anführung von einzelnen als neu gerühmten Sätzen höchst anerkennend beurtheilt. Bemängelt wurde nur, dass keine Theorie von Brennpunkten höherer Curven vorkomme, deren Wichtigkeit aus den Arbeiten Tschirnhausen's hervorgehe; vielleicht entschliesse sich dieser die Lücke selbst auszufüllen.

Newton gab die neuen Sätze ohne auch nur einen Beweis anzudeuten. Er überliess es Anderen, die Wahrheit der von ihm ausgesprochenen Gesetze zu prüfen und zu sichern. Doch bevor wir zu solchen, Newton's Enumeratio ergänzenden Schriften gelangen, nöthigt uns die Zeitfolge von anderen Arbeiten zu reden, welche theils vor dem Erscheinen der Enumeratio schon fertig gestellt waren, theils zeigen, dass die wunderbare Abhandlung auf dem Festlande Europas zunächst noch keine Wirkung ausübte.

[1]) *Opuscula Newtoni* I, 267—270. [2]) Ebenda I, 261. [3]) Ebenda I, 269.
[4]) A. E. 1705 pag. 30—34.

Der Marquis De L'Hospital war 1704 gestorben (S. 105). In seinem Nachlasse fand sich ein *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez* in druckfertigem Zustande vor. Nur eine Vorrede fehlte noch, und da eine solche, wie der Verleger in einer Vorerinnerung bemerkt, nicht wohl von Jemand anderem als dem Verfasser eines Werkes geschrieben werden kann, so wurde das Vorhandene unergänzt 1707 der Oeffentlichkeit übergeben und zwar mit solchem Erfolge, dass 1720 ein zweiter unveränderter Abdruck sich als nothwendig erwies. Das Werk besitzt die gleichen Eigenschaften, welche auch De L'Hospital's Analyse des infiniments petits (S. 235 flgg.) nachzurühmen sind, eine ungemeine Fasslichkeit bei grosser Sorgfalt zahlreiche Einzelsätze zu geben. Bahnbrechende Neuerungen sind freilich nicht gar viele zu erwähnen. Wir dürfen vielleicht im III. Buche von der Hyperbel auf den Namen der entgegengesetzten Hyperbeln[1]) aufmerksam machen, der den beiden Zweigen dieser Curve beigelegt ist. Wir dürfen auf das VII. Buch hinweisen, welches die Ueberschrift: Geometrische Oerter[2]) trägt, und in welchem eine Art von Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades durchgeführt ist. Wir dürfen im VIII. Buche von den unbestimmten Aufgaben des 11. Beispiels gedenken[3]). Dort ist folgende Aufgabe gestellt: Zwei unveränderliche Winkel KAM, KBM sind um die festen Punkte A, B drehbar, der Durchschnitt K der Schenkel AK, BK durchläuft eine gerade Linie: welche Linie beschreibt der Durchschnitt M der beiden anderen Schenkel AM, BM? De L'Hospital zeigt nicht bloss, dass ein Kegelschnitt entsteht, sondern auch welche besondere Bedingungen erfüllt sein müssen, damit der Kegelschnitt eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel sei. Er geht mithin über das hinaus, was Newton (S. 407) in seinen Principien ausgesprochen hatte.

Die Kegelschnitte De L'Hospital's gehören der ersten oben erwähnten Klasse an. Fertiggestellt vor, gedruckt nach dem Erscheinen der Enumeratio konnten sie ebensowenig von Newton benutzt werden, als die Ergebnisse seiner Forschungen in sich aufnehmen; beide Verfasser können nur wesentlich unabhängig von einander sein. Anders verhielt es sich mit Josef Saurin, dem Freunde De L'Hospital's (S. 241). Als dieser am 29. Juli und am 1. August 1716 der Pariser Académie des Sciences zwei geometrische Abhandlungen vorlegte[4]),

[1]) De L'Hospital, *Sections coniques* Livre III, pag. 47: *Hyperboles opposées.* [2]) *Des lieux géométriques.* [3]) Ebenda pag. 281 flgg. [4]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1716 pag. 59—79 und pag. 275—289: *Remarques sur un cas singulier du Problème général des Tangentes.*

hätte er Newton's Untersuchungen kennen und berücksichtigen müssen, und deshalb verdient hervorgehoben zu werden, dass sich davon keine Spur entdecken lässt. Eine leise Entschuldigung dafür kann vielleicht in dem Umstande gefunden werden, dass Saurin's Abhandlungen sich selbst nur als Ergänzungen und Erweiterungen von bereits am 3. August 1702 und am 15. Januar 1703 im Journal des Sçavans veröffentlichten Bemerkungen bezeichnen, und 1702 sowie 1703 war die Enumeratio noch nicht vorhanden. Saurin erklärt sich auch in den Abhandlungen von 1716 als bewundernden Freund De L'Hospital's. Seine Absicht sei, die Schwierigkeit aus dem Wege zu räumen, welche entstehe, wenn man die auf der y-Axe auftretende Subtangente $x \cdot \frac{dy}{dx}$ für einen vielfachen Punkt einer Curve suche, eine Schwierigkeit, welche darin sich zeige, dass jene Subtangente unter die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ sich verberge.

Das erste Beispiel Saurin's in seiner Abhandlung gehört der Curve

$$y^4 - 8y^3 + (16 - 12x)y^2 + 48xy + (4x^2 - 64x) = 0$$

mit dem Doppelpunkte bei $x = 2$, $y = 2$ an. Die Curvengleichung kann auch

$$(y^2 - 4y + 2y\sqrt{4 + 2x} - 4\sqrt{4 + 2x} - 2x + 8) \times$$
$$(y^2 - 4y - 2y\sqrt{4 + 2x} + 4\sqrt{4 + 2x} - 2x + 8) = 0$$

geschrieben werden und zerfällt in dieser Gestalt von selbst in zwei Factoren, die einzeln gleich Null gesetzt zwei Curven bedeuten, welche beide durch den Punkt $x = 2$, $y = 2$ hindurchgehen, und in deren jeder die Auffindung der Subtangente keiner Schwierigkeit mehr unterworfen ist, während bei der ursprünglichen Curvengleichung

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{-3xy^2 + 12xy + 2x^2 - 16x}{y^3 - 6y^2 + 8y - 6xy + 12x}$$

durch $x = 2$, $y = 2$ in $\frac{0}{0}$ übergeht.

Ein allgemein giltiges Mittel, diese Schwierigkeit aus dem Wege zu räumen, ohne eine Zerlegung der Curvengleichung in Factoren zu versuchen, welche, wenn sie überhaupt gelingt, jedenfalls grosse Mühe verursacht und nicht als Methode gelten kann, hat Saurin in der zweiten Abhandlung angegeben. Er benutzt dabei die schon erwähnte Curve 4. Grades mit dem Doppelpunkte bei $x = 2$, $y = 2$. Der dem Punkte $x \mid y$ benachbarte Punkt der Curve hat, so drückt er sich ungefähr aus, die Coordinaten $x + dx \mid y + dy$, und setzt man diese Werthe statt x und y in die Curvengleichung ein, so muss wieder eine richtige Gleichung erscheinen. Nach Gruppen geordnet, deren Unterscheidungsmerkmal die Dimensionszahl der auftretenden Differen-

tiale ist, wird die neue Gleichung $I + II + III + IV + V = 0$ heissen, und die Bedeutung der einzelnen Gruppenzeichen ist:

$$I = y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x,$$

$$II = 4y^3dy - 24y^2dy - 12y^2dx - 24xydy + 32ydy + 48ydx + 48xdy + 8xdx - 64dx,$$

$$III = 6y^2dy^2 - 24ydy^2 - 24ydxdy - 12xdy^2 + 16dy^2 + 48dxdy + 4dx^2,$$

$$IV = 4ydy^3 - 8dy^3 - 12dxdy^2,$$

$$V = dy^4.$$

Die einzelnen Gruppen entstehen, ausser durch jene Einsetzung von $x + dx$ und $y + dy$ in die ursprüngliche Curvengleichung, auch durch fortgesetzte Differentiation aus einander, wenn dx und dy als Constante betrachtet werden und Division einer ganzen Gruppe durch eine Zahl gestattet wird. Saurin erklärt weiter, die gewöhnliche Art die Berührungslinie zu finden sei folgende. Die Gruppe I, als das ursprüngliche Gleichungspolynom werde gestrichen, dann bleiben die Gruppen II bis V übrig, von welchen $III + IV + V$ abermals weggelassen werden können, weil höhere Potenzen unendlich kleiner Differentiale gegen niedrigere verschwinden. So bleibe nur $II = 0$ übrig, woraus $\frac{dy}{dx}$ sich ermitteln lasse u. s. w. Dieses Verfahren höre aber auf statthaft zu sein, wenn II identisch verschwinde, was äusserlich dadurch ersichtlich werde, dass der aus $II = 0$ hervorgehende Werth von $\frac{dy}{dx}$ die Form $\frac{0}{0}$ besitze. Dann bleibe aber von der durch Einsetzung von $x + dx$ und $y + dy$ statt x und y entstandenen Gleichung nur $III + IV + V = 0$ übrig. In ihr fallen IV und V weg, weil sie höhere Potenzen der Differentiale als III enthalten, und $III = 0$ liefert eine nach $\frac{dy}{dx}$ quadratische Gleichung, welche zwei Werthe von $\frac{dy}{dx}$ ermitteln lasse, d. h. man habe einen Doppelpunkt der Curve $I = 0$ untersucht. Lässt das gleiche Werthepaar für x und y, welches $I = 0$ und $II = 0$ identisch erfüllte, ebenso auch III identisch verschwinden, so liefert die nach $\frac{dy}{dx}$ kubische Gleichung $IV = 0$ drei Werthe von $\frac{dy}{dx}$ als Merkmal dafür, dass man es mit einem dreifachen Punkte zu thun hatte u. s. w. Damit war die Lehre von den vielfachen Curvenpunkten endgiltig abgeschlossen, hatte sie die Gestalt angenommen, welche sie in den Lehrbüchern behalten sollte.

Wir kehren nach England zurück, wo 1717 eine eigene Schrift zur Erläuterung der Newton'schen Enumeratio die Presse verliess. James Stirling war ihr Verfasser (S. 372), der Titel *Lineae tertii ordinis Neutonianae, sive illustratio tractatus D. Neutoni de enumeratione linearum tertii ordinis, cui subjungitur solutio trium problematum.* Das nur 8 Druckbogen starke Büchlein ist seinem ganzen Inhalte nach ein beredtes Zeugniss für die Fähigkeit seines Verfassers, sich in Newton's Denkweise hineinzuversetzen. Wüsste man nicht, dass Stirling in Venedig und unabhängig von Newton gearbeitet hat, so wäre man geneigt anzunehmen, er habe seine Erläuterungen im täglichen Verkehre selbst empfangen und nur niedergeschrieben, nicht ersonnen. Es ist ja naturgemäss nicht möglich, gradezu zu behaupten, die von Stirling ergänzten Beweise seien diejenigen, welche der Erfinder der Sätze im Sinne hatte, aber sie können es sehr wohl sein. Sie machen durchgängig von Methoden der Reihenentwicklung Gebrauch, welche, wie wir wissen, Newton in für die damalige Zeit unerreichter Weise beherrschte, vielleicht in etwas übertriebener Weise bevorzugte. Da Stirling's *Lineae tertii ordinis*, wie das Büchlein mit abgekürztem Titel heissen mag, eine fast unentbehrliche Ergänzung zur Enumeratio bilden, so haben wir näher darauf einzugehen.

Stirling beginnt mit der Erklärung einer rationalen Curve als einer solchen, zwischen deren Abscisse und Ordinate eine algebraische Gleichung stattfinde, und mit der Feststellung des Begriffes der Asymptote, die gradlinig oder krummlinig sein könne[1]). Die rationalen Curven zerfallen in Ordnungen, und die Gleichung der Curve $n$ter Ordnung heisst $y^n + (ax + b)y^{n-1} + \cdots = 0$ mit Coefficienten $a, b, \ldots$, deren Anzahl $\frac{n(n+3)}{2}$ ist[2]). Eine durch ununterbrochene Bewegung eines Punktes erzeugte Curve kehrt in sich zurück oder erstreckt sich in's Unendliche. Wegen der ununterbrochenen Bewegung des erzeugenden Punktes muss er von einem unendlichen Curvenzweige unmittelbar zu einem anderen gleichfalls unendlichen Curvenzweige gelangen. Folglich können unendliche Curvenzweige nur in grader Zahl vorhanden sein. Alle gradlinigen Parallelen schneiden eine Curve in gleich vielen reellen oder imaginären Punkten[3]). Aus der die Veränderlichen x und y gemischt enthaltenden Curvengleichung kann nach Methoden, welche dem Newton-

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 1. [2]) Ebenda pag. 3—4 und wiederholt pag. 69, wo der Schluss gezogen ist, dass $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte die Curve $n$ter Ordnung bestimmen. [3]) Ebenda pag. 5: *Omnes rectae parallelae secant curvam aliquam in iisdem numero punctis realibus et imaginariis.*

schen Parallelogramme (S. 102—103) nahe verwandt sind, die Ordinate in eine Reihe entwickelt werden, die nach Potenzen der Abscisse mit abnehmenden Exponenten fortschreitet, also eine Entwicklung von der Gestalt $y = Ax^n + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + \cdots$. Je grösser x wird, um so genauer stimmt die Curve mit der von der einfacheren Gestalt $y = Ax^n$ überein. Eine gradlinige Asymptote hat mit der Curve $n$ten Grades, zu der sie als Asymptote gehört, zwei in der Unendlichkeit liegende Punkte gemein, kann sie mithin im Endlichen nur noch in $n - 2$ Punkten schneiden[1]). Da eine Berührung überdies aus dem Zusammenfallen mehrerer Durchschnittspunkte hervorgeht, so kann keine Curve 2. oder 3. Grades, wohl aber eine solche 4. oder 5. Grades von ihrer Asymptote auch noch im Endlichen berührt werden[2]).

Von hervorragender Wichtigkeit ist der Satz[3]), dass die Wahl eines Coordinatensystems, dessen Ordinatenaxe einer Asymptote parallel läuft, den Vortheil mit sich bringt, dass alsdann kein Glied y^n in der Gleichung der Curve $n$ten Grades vorkommt. Sei der Punkt H (Figur 59) ein unendlich ferner Punkt der Curve HLA und KHD die die Curve in H berührende Asymptote. Ihr parallel sei von dem endlichen Punkte L aus die LB gezogen, welche v heissen soll, während die zugehörige Abscisse AB durch den Buchstaben z bezeichnet wird. Die ursprünglichen Coordinaten von L sind $LC = y$, $AC = x$. Aehnlich heissen auch im unendlich fernen Punkte $AE = x$, $EH = y$, $AD = z$, $DH = v$. Ebendort ist $HG = EF = dx$, $KG = dy$, wie wir zu schreiben vorziehen, während Stirling unter Anwendung der Fluxionspunkte $HG = \dot{x}$, $KG = \dot{y}$ schreibt. Aus der Curvengleichung ermittle man y als Reihe von der Gestalt



Fig. 59.

$$y = Ax + Bx^{1-n} + Cx^{1-2n} + Dx^{1-3n} + \cdots,$$

welche um so rascher convergirt, je grösser x ist. Das Anfangsglied wird die erste Potenz von x enthalten, damit die Ordinate HD mit der ihrer Richtung nach bekannten Asymptote KHD zusammenfalle.

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 41. [2]) Ebenda pag. 43. [3]) Ebenda pag. 44—45.

Wird die Entwicklung von y differentiirt, oder, mit Stirling zu reden, benutzt, um zur Fluxion überzugehen, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = A + (1-n)Bx^{-n} + (1-2n)Cx^{-2n} + \cdots$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke KHG und HDE ist zugleich auch $\frac{dy}{dx} = \frac{HE}{DE}$. Mithin ist $DE = HE : \frac{dy}{dx}$ oder

$$DE = \frac{Ax + Bx^{1-n} + \cdots}{A + (1-n)Bx^{-n} + \cdots} = x + \frac{nB}{A}x^{1-n} + \cdots.$$

Aber

$$AD = z = AE \quad DE = x - \left[x + \frac{nB}{A}x^{1-n} + \cdots\right] = -\frac{nB}{A}x^{1-n} - \cdots$$

und für $x = \infty$ wird genau $z = -\frac{nB}{A}x^{1-n}$. Nun ist n nach der Natur der Curvengleichung positiv, also AD unendlich viel kleiner als AE oder auch als EH, beziehungsweise als DH, welches zu EH in einem durch den Asymptotenwinkel gegebenen endlichen Verhältnisse steht. Mit anderen Worten: z ist unendlich klein gegen v, und folglich kann in der Curvengleichung v nicht von gleich hoher Dimension mit z sein, beziehungsweise nicht von der Dimension, die dem Grade der Curve entspricht.

Daraus folgt weiter[1], dass jede Curve 3. Grades bei richtiger Wahl der Ordinatenaxe eine Gleichung von der Gestalt

$$(x+a)y^2 = (bx^2 + cx + d)y + ex^3 + fx^2 + gx + h$$

besitzen muss, d. h. die von Newton angenommenen Gleichungsformen (S. 406) sind im Allgemeinen gerechtfertigt. Unendlich ferne Punkte aber müssen immer angenommen werden, auch bei Ovalen. Bei diesen hat man sich imaginäre in der Unendlichkeit liegende Doppelpunkte[2]) vorzustellen.

Wie es bei Aufsuchung der Asymptote auf die Gleichungsglieder höchsten Grades ankam, so ist ganz allgemein das der Dimension der Veränderlichen nach höchste Glied einer Reihe ausschlaggebend für das Vorzeichen der Reihensumme[3]), ein Satz, den, wie wir uns erinnern (S. 374), De Lagny im Jahre 1722 abermals aussprach. Aus ihm folgt eine wesentliche Verschiedenheit[4]) der Curven

$$y = a + bx + \cdots + kx^{2m} \quad \text{und} \quad y = a + bx + \cdots + lx^{2m+1}.$$

Bei der ersten Gleichung findet, sofern x gross genug gewählt wird, Zeichengleichheit zwischen y und k statt, bei der zweiten unter gleicher Voraussetzung zwischen y und lx, bei der ersten Gleichung ist daher

---

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 46. [2]) Ebenda pag. 46—47: *imo hoc in ipsis Ovalibus obtinet: nam concipiendum est eas habere puncta duplicia imaginaria ad distantiam infinitam.* [3]) Ebenda pag. 59. [4]) Ebenda pag. 58—59.

das Vorzeichen von y unabhängig, bei der zweiten abhängig von dem von x. Geometrisch ausgedrückt heisst das, die erste Curve habe zwei unendliche Zweige, welche beide über oder beide unter der Abscissenaxe in die Unendlichkeit sich erstrecken, während bei der zweiten Curve ein Unendlichkeitszweig über und einer unter der Abscissenaxe sich befinde.

Stirling beweist den von Newton (S. 405) ausgesprochenen Satz über Durchmesser[1]). Sei eine Curvengleichung

$$y^n + (ax+b)y^{n-1} + \cdots = 0,$$

wobei (Figur 60) $AB = x$, $CB = y$. Man verlängere AB nach rückwärts um $AF = -\frac{b}{a}$, ziehe von A nach unten (aber parallel zu CB) die $AE = -\frac{b}{n}$ und verbinde F mit E. Nunmehr soll $ED = z$, $CD = v$ heissen, oder es hat eine derartige Veränderung des Coordinatensystems stattgefunden, dass bei Verlegung des Anfangspunktes die Abscissenaxe einer Drehung unterworfen wurde, die Ordinatenaxe ihre Richtung beibehielt. Vermöge der bekannten Lage von BF gegen FD, welche der ebenerwähnten Drehung der Abscissenaxe entspricht, ist $\frac{BA}{ED}$ d. h. $\frac{x}{z}$ eine gegebene Constante A, oder es ist $x = Az$. Ferner ist

Fig. 60.

$$AF : AE = -\frac{b}{a} : -\frac{b}{n} = n : a = BF : BD = \left(Az + \frac{b}{a}\right) : BD,$$

also

$$BD = \frac{a}{n}\left(Az + \frac{b}{a}\right) = \frac{aAz + b}{n}.$$

Aber $BC = y = CD - BD = v - \frac{aAz+b}{n}$ und unter Anwendung der Binomialentwicklung

$$y^n = \left(v - \frac{aAz+b}{n}\right)^n = v^n - (aAz+b)v^{n-1} + \cdots.$$

Daneben ist $y^{n-1} = v^{n-1} + \cdots$ und

$$(ax+b)y^{n-1} = (aAz+b)y^{n-1} = (aAz+b)v^{n-1} + \cdots.$$

Demnach verwandelt sich die Curvengleichung

$$y^n + (ax+b)y^{n-1} + \cdots = 0$$

in die neue Form $v^n + Zv^{n-2} + \cdots = 0$, wo Z eine ganze rationale Function von z bezeichnet. In der neuen Gleichung fehlt das Glied

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 71—72.

v^{n-1}, dessen Coefficient 0 daher nach der Gleichungslehre die Summe sämmtlicher Gleichungswurzeln $v_1, v_2, \ldots v_n$ sein muss, d. h. die v heben einander auf, oder die von D aus nach oben und nach unten bis zum Durchschnitt mit der Curve gezeichneten Ordinaten heben einander auf. Bei den Curven zweiten Grades muss, wenn das Glied v fehlt, $v^2 = az^2 + bz + c$ übrig bleiben[1]), und es hängt von a ab, ob diese Gleichung eine Hyperbel, eine Ellipse, eine Parabel bedeutet[2]); die Hyperbel erfordert $a > 0$, die Ellipse $a < 0$, die Parabel $a = 0$. Man kann auch algebraische Folgerungen und geometrische Deutungen derselben versuchen, wenn nicht das Glied v^{n-1}, sondern v^{n-2} oder noch ein späteres zum Wegfalle gebracht wurde[3]).

Auch der Newton'sche Satz von den Producten der Abschnitte einander schneidender Sehnen (S. 406) findet seinen Beweis, und zwar zunächst bei der Curve zweiten Grades[4]). Sei (Figur 61) AB als Abscissenaxe gewählt mit A als auf der Curve selbst liegendem Anfangspunkt, so dass in der Curvengleichung ein constantes Glied nicht vorkommt, dieselbe vielmehr

$$y^2 + (ax + b)y + cx^2 - dx = 0$$



Fig. 61.

heissen muss, während die Ordinaten irgend eine Richtung gegen die AB besitzen, z. B. der DE parallel laufen. Die Längen CE, CD, welche von C aus bis zur Curve erscheinen, sind die Werthe von y, welche aus der Gleichung $y^2 + (ax + b)y + cx^2 - dx = 0$ unter der Annahme $x = AC$ hervorgehen, und ihr Product muss folglich $= cx^2 - dx$ sein, d. h. $CD \cdot CE = c \cdot AC^2 - d \cdot AC$. Die Länge AB erhält man aus der mehrbenutzten Curvengleichung mittels $y = 0$, dann wird diese nämlich $cx^2 - dx = 0$, beziehungsweise

$$x = AB = \frac{d}{c} = AC + CB \text{ und } CB = \frac{d}{c} - AC,$$

$$AC \cdot CB = \frac{d}{c} \cdot AC - AC^2 = -\frac{1}{c}\left[c \cdot AC^2 - d \cdot AC\right] = -\frac{1}{c} \cdot CD \cdot CE.$$

Folglich ist der Bruch $\frac{DC \cdot CE}{AC \cdot CB}$ seiner absoluten Grösse nach constant

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 73. [2]) Ebenda pag. 79. [3]) Ebenda pag. 75.
[4]) Ebenda pag. 76–77.

und zwar $= c$. In ähnlicher Weise erläutert Stirling auch den Productensatz bei Curven dritten Grades[1]).

Eine Erörterung der verschiedenen Formen von Curven dritten Grades bildet etwa ein Drittel des kleinen Buches[2]). Statt Newton's 72 Arten (S. 406) gelangt Stirling zu deren 76.

Vielleicht darf noch auf eine gelegentliche Aeusserung Stirling's hingewiesen werden[3]), in welcher eine Spitze als unendlich kleine Schleife erklärt wird.

Der nächste Schriftsteller, dem wir uns zuzuwenden haben, ist Colin Maclaurin[4]) (1698—1746), Sohn eines Geistlichen in Kilmodan in Schottland: vaterlos seit er 6 Wochen alt war, ganz verwaist in seinem 10. Lebensjahre, kam er in die Fürsorge eines gleich seinem Vater dem geistlichen Stande angehörenden Oheims, der ihn wiederum zu derselben Laufbahn bestimmte. Er bezog schon 1709 die Hochschule zu Glasgow und entwickelte dort ein so hervorragendes mathematisches Talent, dass er mit 15 Jahren bereits viele der Sätze entdeckt hatte, welche nachmals in einem Werke erschienen, von dem wir bald zu reden haben. Schon im September 1717 im Alter von noch nicht 20 Jahren bewarb er sich um eine in Aberdeen frei gewordene mathematische Professur und erhielt sie. Fünf Jahre später verliess er Aberdeen ohne Urlaub, um einen jungen Edelmann nach Frankreich zu begleiten. Nach dessen Tode entschuldigte er sich zwar im April 1725 vor der ihm vorgesetzten Schulbehörde wegen seiner eigenwilligen Abwesenheit, aber nach Ablauf des Jahres erhielt er im Januar 1726 und nahm er ziemlich gleichzeitig im Februar seine Entlassung. Thatsächlich war er schon seit November 1725 in Edinburg als Ersatzmann für den dortigen altersschwach gewordenen Mathematiker eingetreten, eine Stellung, welche er dem Einflusse Newton's verdankte. Nun verblieb er, ein hochbeliebter Lehrer und Rathgeber auf zahlreichen Gebieten, in Edinburg bis 1745. Er stand in letzterem Jahre an der Spitze der Vertheidiger Edinburgs gegen Aufständige, und als die Stadt in deren Hände fiel, floh Maclaurin nach York zu dem ihm befreundeten Erzbischof. Dort starb er im folgenden Jahre. In den ersten Jahren seines Aufenthaltes in Aberdeen, 1718 und 1719, veröffentlichte Maclaurin zwei Abhandlungen in den P. T. In der ersten Abhandlung[5]) ist von folgender Entstehung der Curven die Rede. An eine gegebene Curve werden in allen ihren Punkten Berührungslinien gezogen, und auf jede Berührungslinie wird

[1]) *Lineae tertii ordinis* pag. 78—79. [2]) Ebenda pag. 83—120. [3]) Ebenda pag. 89: *ut enim punctum est ovalis infinite parva, sic cuspis est nodus infinite parvus.* [4]) *National Biography* XXXV, 196—198 (London 1893, edited by Sidney Lee). [5]) P. T. XXX, 803—812.

von einem gegebenen Punkte aus eine Senkrechte gefällt, deren Durchschnittspunkt mit der Berührungslinie die neue Curve zum geometrischen Orte hat, worauf durch die Berührungslinien an diese und die auf sie von dem wiederholt in Anwendung tretenden festen Punkte aus gefällten Senkrechten eine abermalige Curve hervorgebracht wird u. s. w. Maclaurin hat damit die Fusspunktcurven verschiedener Ordnung erfunden, hat zugleich die ihrer Länge nach in Rechnung tretenden Entfernungen eines festen Punktes von den Curvenpunkten, also das, was man bei Anwendung von Polarcoordinaten Leitstrahlen genannt hat, einer Benutzung unterzogen. Die zweite Abhandlung[1]) lehrt Curvenzeichnungen kennen, bei welchen nichts anderes in Anwendung tritt, als ausschliesslich Drehungen gegebener Winkel um feste Scheitelpunkte. Diese Abhandlung ist in so weit eine Ergänzung von Newton's Enumeratio, als nicht wie dort vorausgesetzt wird, dass die den zweiten Grad übersteigenden Curven Doppelpunkte besitzen müssen. Irgend einen Beweis theilte Maclaurin in dieser Abhandlung ebensowenig mit, als es Newton in seiner Enumeratio that. Die beiden Abhandlungen mögen schon auf ihren jugendlichen Verfasser aufmerksam gemacht haben, und als Maclaurin sich 1719 nach London begab und dort Newton besuchte, wurde er als Mitglied in die Royal Society aufgenommen. Im folgenden Jahre 1720 erschien Maclaurin's *Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis*, welche ihm mit einem Male einen Platz unter den Geometern allerersten Ranges sicherte. In dem ersten Abschnitte[2]) handelt es sich um die Newton'sche Construction von Kegelschnitten mittels zweier um ihre Scheitelpunkte drehbarer Winkel, deren eines Schenkelpaar sich auf einer Geraden schneidet. Maclaurin beweist die Richtigkeit dieser Construction[3]) (Fig. 62). Die Winkel FCO, KSH seien die um C und S drehbaren Winkel. Der Durchschnittspunkt Q von CF und SK bleibt auf der Geraden AE, alsdann soll P, als Durchschnittspunkt von CO und SH, einen Kegelschnitt beschreiben. Von Q und P aus werden die Senkrechten QN, PM auf die Verbindungsgerade CS der beiden

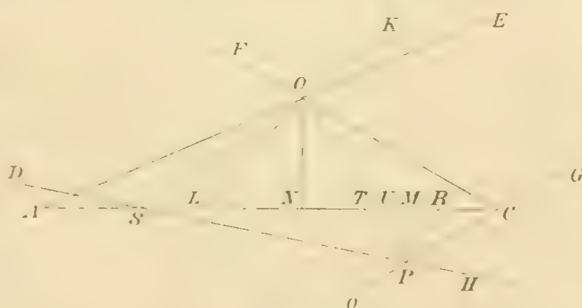


Fig. 62.

[1]) P. T. XXX. 939—945. [2]) *Geometria organica* pag. 1—11. [3]) Ebenda pag. 1—2.

Scheitel C und S gefällt, ausserdem werden QS, QU und PR, PT so gezeichnet, dass $\angle CUQ = CRP = FCG$ und $SLQ = STP = KSD$. Ersichtlich ist

$$\angle FCG + QCU + RCP = 180^0 = CUQ + QCU + CQU,$$

also $\angle RCP = CQU$, und unter Berücksichtigung von $\angle CRP = CUQ$ erkennt man die Aehnlichkeit der Dreiecke CRP, QUC. Mittels ganz ähnlicher Schlüsse folgert man die Aehnlichkeit der Dreiecke SLQ, PTS, und so gelangt man in den Besitz der beiden Gleichungen $\frac{CR}{PR} = \frac{QU}{CU}$ und $\frac{ST}{PT} = \frac{QL}{SL}$. Nun sei $CS = a$, $CA = b$. Die Winkel FCO, KSH, CAE seien durch ihre trigonometrischen Tangenten gegeben[1]): $\operatorname{tg} FCO = \frac{d}{a}$, $\operatorname{tg} KSH = \frac{e}{a}$, $\operatorname{tg} CAE = \frac{c}{a}$. Weiter sei $CM = x$, $PM = y$, $QN = z$. Weil

$$\angle FCO = QCU + RCP = RPC + RCP = MRP,$$

muss auch $\frac{d}{a} = \operatorname{tg} MRP = \frac{MP}{MR}$ sein oder $MR = \frac{ay}{d}$. Ferner

$$CR = CM - MR = x - \frac{ay}{d} = \frac{dx - ay}{d};$$

$$PR = \sqrt{PM^2 + MR^2} = \sqrt{y^2 + \frac{a^2 y^2}{d^2}} = \frac{y\sqrt{d^2 + a^2}}{d}.$$

Wegen

$\angle CUQ = CRP$ ist auch $\angle QUN = PRM$ und $\angle QNU = 90^0 = PMR$, also $\triangle QUN \sim PRM$, also $\frac{QU}{QN} = \frac{PR}{PM}$, $QU = \frac{QN \cdot PR}{PM} = \frac{z\sqrt{d^2 + a^2}}{d}$ neben $NU = \frac{az}{d}$. Da überdies $\frac{QN}{AN} = \operatorname{tg} CAE = \frac{c}{a}$ uns mit $AN = \frac{az}{c}$ bekannt macht, so besitzt man jetzt den Werth von

$$CU = CA - AN - NU = b - \frac{az}{c} - \frac{az}{d} = b - \frac{a(c + d)z}{cd}.$$

Die Werthe von CR, PR, QU, CU, welche erhalten wurden, geben der früheren Gleichung $\frac{CR}{PR} = \frac{QU}{CU}$ die neue Gestalt

$$\frac{dx - ay}{d} : \frac{y\sqrt{d^2 + a^2}}{d} = \frac{z\sqrt{d^2 + a^2}}{d} : \frac{bcd - a(c + d)z}{cd},$$

und aus ihr folgt $z = \frac{bc(dx - ay)}{(cd - a^2)y + (c + d)ax}$. Aehnliche Betrachtungen gestatten es, auch in die andere oben gefundene Gleichung $\frac{ST}{PT} = \frac{QL}{SL}$ Werthe der vorkommenden Strecken einzusetzen, und zwar

[1]) Bei Maclaurin ist die Ausdrucksweise etwas anders. Er sagt, der Sinus des betreffenden Winkels, z. B. FCO, verhalte sich zu seinem Cosinus wie d zu a.

$$ST = (a - x) - \frac{ay}{e},\ PT = \frac{y\sqrt{a^2 + e^2}}{e},\ QL = \frac{z\sqrt{a^2 + e^2}}{e},$$

$$SL = AN - AS - NL = a - b + \frac{ac - cz}{ce}.$$

Dann findet man aber einen zweiten Werth von z, nämlich

$$z = \frac{(a - b)c(ae - ex - ay)}{(a^2 + ce)y + e(c - a)x + a^2 c - e}.$$

Gleichsetzung beider Werthe von z führt endlich zu einer Gleichung, welche ausser constanten Grössen nur noch x und y enthält und nach Wegschaffung der Brüche die Form besitzt:

$$[(a - b)ce + d(ae - be)]x^2 + [a^2(c + d - e) + cde]xy$$
$$+ [a(cd - a^2) - bc(d + e)]y^2 + [abc(d + e) - a^2e(c + d)]x$$
$$- [bc(a^2 - de) + ae(dc - a^2)]y = 0,$$

und das ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Die Durchschnittspunkte des Kegelschnittes mit der CS finden sich mittels $y = 0$. Die Gleichung wird dadurch

$$[(a - b)ce + d(ae - be)]x^2 + [abc(d + e) - a^2e(c + d)]x = 0$$

oder $[ae(c + d) - bc(d + e)](x - a)x = 0$, und ist augenscheinlich bei $x = 0$ und $x = a$ in den Punkten C und S erfüllt, welche somit der Curve angehören, und zwar, setzt Maclaurin hinzu, als einfache Punkte, denn keine Linie von niedrigerem als dem dritten Grade besitzt einen Doppelpunkt[1]).

Der zweite Abschnitt[2]) lehrt die Construction von Linien dritten Grades mit einem Doppelpunkte. Auch hier war Newton Maclaurin's Vorgänger, aber Maclaurin hat sich nicht damit begnügt, Newton's Vorschriften zu beweisen, er hat ganz neue Vorschriften gegeben[3]). Freilich sind es auch wieder, wie bei Newton, zwei bewegliche Winkel, deren Schenkel durch ihren Durchschnittspunkt die Linie dritten Grades hervorbringen, aber (Figur 63) während der eine Winkel FCO um seinen Scheitelpunkt C als Pol gedreht wird, beschreibt der Scheitelpunkt N des anderen Winkels LNQ eine Gerade AE, und sein einer Schenkel NQ geht dabei fortwährend durch den festen Punkt S. Bleibt bei diesen Bewegungen der den Schenkeln CF und SN gemeinsame Durchschnittspunkt Q auf der Geraden BQ, so beschreibt der Durchschnittspunkt P der anderen Schenkel CO und NL eine Linie dritten Grades. Zur Beweisführung wird der feste Punkt S mit dem Scheitelpunkte C des nur um diesen Scheitel drehbaren Winkels gradlinig verbunden und werden die Durch-

[1]) nec Linea quaevis Ordinis tertio inferioris punctum habet duplex.
[2]) Geometria organica pag. 11—45. [3]) Ebenda pag. 11—13.

schnittspunkte A und B dieser Geraden mit den der Lage nach gegebenen AE und BQ bemerkt. Es sei $SC = a$, $BC = b$, $SA = c$.

Fig. 63.

Ausserdem werden PM, NH, QK senkrecht zu SA gezogen und $PM = y$, $CM = x$ genannt. Ferner werden die Winkel

$$\angle PRC = QVC = FCO \text{ und } \angle STN = SNP$$

gemacht. Auf NT wird die Senkrechte Sg errichtet, welche verlängert die NH in J schneidet; endlich ist $Pc \parallel CS$. Was die vorkommenden constanten Winkel betrifft, so sind sie durch ihre Tangenten gegeben:

$$\operatorname{tg} FCO = \frac{d}{a}, \ \operatorname{tg} QBC = \frac{c}{a}, \ \operatorname{tg} EAS = \frac{f}{a}, \ \operatorname{tg} SNL = \frac{g}{a}.$$

Nun werden Dreieckähnlichkeiten nachgewiesen und aus ihnen Proportionen gebildet ganz in der Art, wie wir bei der Beweisführung für die Erzeugung des Kegelschnittes mittels zweier Winkel berichtet haben. Es ist eine umständliche, um nicht zu sagen langweilige Rechnerei, welche schliesslich zu einer Gleichung von der Form

$$Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 = 0$$

führt. Diese Form lässt nicht bloss erkennen, dass man es mit einer Linie dritten Grades zu thun hat, sondern auch, dass C ein Doppelpunkt der Curve ist. Setzt man nämlich $y = 0$, so geht die Gleichung in $(Dx + G)x^2 = 0$ über, welche zwei gleiche Wurzeln $x = 0$ besitzt. Die weiteren dem zweiten Abschnitte angehörenden Sätze berücksichtigen zum Theil besondere Fälle der erzeugten Curve, zum Theil betreffen sie deren Asymptoten, die Umwandlung der Curvengleichung in eine der Newton'schen Gleichungsformen mittels Coordinatenveränderung u. s. w.

Der dritte Abschnitt[1]) giebt seinen Inhalt durch die Ueberschrift dahin zu erkennen, dass er der Erzeugung der Linien vierten Grades und doppelpunktloser Linien dritten Grades gewidmet sei. Die beiden

[1] *Geometria organica* pag. 46—60.

gegebenen Winkel durchlaufen hier mit ihren Scheiteln gerade Linien, während der eine Schenkel eines jeden durch einen gegebenen Punkt geht. Schneiden die beiden anderen Schenkel einander auf einer geraden Linie, so bildet der Durchschnittspunkt der der erwähnten Bedingung unterworfenen Schenkel eine Linie vierten Grades. Die Gleichung wird wieder nach ähnlichen Grundgedanken, wie wir sie wiederholt in Wirksamkeit treten sahen, abgeleitet. Sind die beiden festen Punkte um a von einander entfernt, wird ihre Verbindungsgerade zur Abscissenaxe, einer der Punkte selbst zum Coordinatenanfangspunkt gewählt, so heisst die Gleichung[1]):

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Jy^3 + Kx^2 + Lxy + My^2 = 0,$$

und setzt man $y = 0$, so bleiben nur die Glieder $Ax^4 + Fx^3 + Kx^2 = 0$ übrig, welche, wenn man die Constanten A, F, K ausrechnet und eine neue Constante N einführt, sich in die Gestalt $Nx^2(x-a)^2 = 0$ bringen lässt. Die Punkte $x = 0$, $x = a$, d. h. die beiden festen Punkte, sind folglich Doppelpunkte der Curve. Fallen die beiden Winkelschenkel, deren Durchschnittspunkt die Curve erzeugt, zu gleicher Zeit auf die als Abscissenaxe gewählte Gerade, so verlieren die mehrgenannten festen Punkte ihre Eigenschaft als Doppelpunkte und werden einfache Punkte der Curve, deren Gleichung aber auch die Glieder vierten Grades einbüsst, so dass eine Linie dritten Grades ohne Doppelpunkt entsteht[2]). Auch schon früher war gelegentlich[3]) eine Curve dieser letzteren Art als Ausnahmefall erwähnt worden. Eine Linie vierten Grades mit dreifachem Punkte wird ebenfalls erörtert[4]) und zugleich bemerkt, es gebe auch Linien vierten Grades mit drei Doppelpunkten. Maclaurin knüpft daran Untersuchungen[5]) über die Anzahl und Lage vielfacher Punkte, welche wir uns nicht enthalten können in Uebersetzung wiederzugeben: „Ich habe gesagt, eine Linie 4. Grades könne 3 Doppelpunkte besitzen, aber dieselben können nicht auf einer Geraden liegen, weil diese Gerade sonst die Linie 4. Grades in 6 Punkten schnitte, was unmöglich ist. Die Anzahl von 5 Doppelpunkten kann eine Linie 4. Grades nicht besitzen, denn hätte sie deren 5, so liesse sich ein Kegelschnitt durch diese hindurchlegen, und der Kegelschnitt hätte 10 Durchschnittspunkte mit der Linie 4. Grades, während nach der Natur dieser Linien nur 8 Durchschnittspunkte möglich sind. Die Linie 4. Grades kann sogar nicht mehr als 3 Doppelpunkte besitzen. Wären deren 4 vorhanden, so würde ein durch sie hindurchgelegter Kegelschnitt in 8 Punkten geschnitten

---

[1]) *Geometria organica* pag. 47. [2]) Ebenda pag. 49. [3]) Ebenda pag. 36. [4]) Ebenda pag. 59. [5]) Ebenda pag. 60.

werden, weil jeder Doppelpunkt als zwei einfache Punkte gilt. Aber ein Kegelschnitt kann durch 5 Punkte hindurchgelegt werden. Man wählt also noch einen beliebigen einfachen Punkt der Linie 4. Grades, dann könnte ein Kegelschnitt durch die 4 Doppelpunkte und den fünften einfachen Punkt hindurchgehen, und der Kegelschnitt hätte unter dieser Voraussetzung 9 Punkte mit der Linie 4. Grades gemeinschaftlich, was unmöglich ist. Folglich kann eine Linie 4. Grades keine 4 Doppelpunkte besitzen."

Der vierte Abschnitt[1]) geht in allgemeinerer Weise zu Linien höherer Grade über, welche mittels gegebener Geraden und gegebener Winkel erzeugt werden. Der Hauptsatz ist der[2]), dass, wenn (Figur 64) n Gerade BN, ER, FT ... einerseits und m Gerade DM, GL, HK... andererseits gegeben sind, wenn ferner die der Grösse nach unveränderlichen Winkel CNR, NRT, RTQ..., sowie SML, MLK, LKQ... mit ihren Scheitelpunkten die genannten Geraden durchlaufen, wenn endlich Q auf der Geraden QA verbleibt, der Schnittpunkt P der CN und SM eine Linie vom Grade $n + m + 2$ beschreibt.

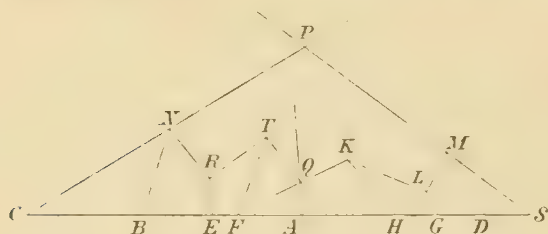


Fig. 64.

Diese vier Abschnitte bilden gemeinschaftlich den ersten Theil der Geometria organica, in welchem seiner allgemeinen Ueberschrift[3]) zufolge Linien jeden Grades unter ausschliesslicher Benutzung von Winkeln und Geraden beschrieben werden sollten. Im zweiten Theile[4]) sollen irgend Linien niedrigeren Grades bei der Erzeugung von solchen höheren Grades in Anwendung kommen.

Sein erster Abschnitt[5]) behandelt Newton's Erzeugung einer Linie dritten Grades mit Doppelpunkt als Ort des Durchschnittes von Schenkeln zweier um ihre Scheitelpunkte sich drehenden Winkel, während das andere Schenkelpaar sich auf einem Kegelschnitte trifft. Seien S und C die Scheitelpunkte der sich drehenden Winkel HSK, FCO. Die Schenkel CF und SK schneiden sich in Q, und der Ort von Q ist ein durch S hindurchgehender Kegelschnitt, den man uns gestatten möge $\mathfrak{K}_1$ zu nennen, um das Nachfolgende leichter aussprechen zu können. Um den Ort von P, dem Durchschnittspunkte der Schenkel

[1]) *Geometria organica* pag. 61—78. [2]) Ebenda pag. 72. [3]) Ebenda pag. 1. [4]) Ebenda pag. 79—139. [5]) Ebenda pag. 79—86.

CO und SH zu bestimmen, untersucht Maclaurin, wie oft eine durch P hindurchgehende Gerade DE diesen Ort schneiden kann? Würde P eine Gerade DE stetig durchlaufen, und man unter dieser Voraussetzung nach dem Orte von Q fragen, so wäre derselbe, wie im ersten Satze des ersten Abschnittes ersten Theiles der Geometria organica (S. 419) bewiesen ist, ein durch S hindurchgehender Kegelschnitt, der $\mathfrak{K}_2$ heissen mag. Nun schneiden einander $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ als Kegelschnitte in 4 Punkten, also ausser in S etwa noch in M, N, T. Gelangt folglich Q bei der wirklich von diesem Punkte durchlaufenen Bahn $\mathfrak{K}_1$ nach M, N, T, dann und nur dann bekommt P eine Lage, welche der Geraden DE angehört. Das besagt uns aber, dass DE den Ort von P in 3 Punkten und niemals in mehr als 3 Punkten schneidet. Der gesuchte Ort muss also vom dritten Grade sein.

Der zweite Abschnitt[1]) ist eine Erweiterung des zweiten Abschnittes des ersten Theils. Dort (S. 421—422) wurde ein Winkel um seinen Scheitelpunkt gedreht, ein anderer verschob sich mit seinem Scheitelpunkte auf einer gegebenen Geraden und sein einer Schenkel ging dabei fortwährend durch einen festen Punkt und traf den einen Schenkel des gedrehten Winkels auf einem vorgeschriebenen Raumgebilde. Das Alles bleibt genau ebenso, nur wird, was wir eben ein vorgeschriebenes Raumgebilde nannten, und was im ersten Theile eine Gerade war, jetzt eine Linie $n$ten Grades. Sie mag C_n heissen, wenn auch Maclaurin diese Bezeichnung nicht kennt. Der geometrische Ort des Durchschnittspunktes P der anderen Winkelschenkel ist dann vom Grade $3n$. Das traf ja auch in dem Sonderfalle des ersten Theiles zu, wo $n = 1$ war und P eine Linie 3. Grades beschrieb. Der Beweis ist dem vorher aus dem ersten Abschnitte des zweiten Theils berichteten durchaus ähnlich. Würde P eine Gerade DE stetig durchlaufen, so müsste Q eine Linie 3. Grades C_3 beschreiben. C_3 und C_n schneiden einander in $3n$ Punkten $M_1, M_2, \ldots M_{3n}$. Sowie also Q bei dem Durchlaufen von C_n zu den Punkten $M_1, M_2, \ldots M_{3n}$ gelangt, und nur dann, liegt P auf der DE, welche folglich den Ort von P in $3n$ Punkten schneidet, d. h. dieser Ort ist eine Linie $3n$ten Grades. Verfolgt der Scheitel des sich verschiebenden Winkels auch keine Gerade, sondern eine Linie $m$ten Grades[2]), so steigt die Gleichung des Ortes von P auf die $3mn$te Potenz. Auch die Entstehung der Linie 4. Grades, wenn die Scheitel der beiden erzeugenden Winkel und ebenso der Durchschnitt eines Schenkelpaares jene eine Gerade beschreiben, die (S. 423) im dritten Abschnitte des ersten Theils gelehrt worden war, findet Verallgemeinerung[3]). Sobald Linien vom

[1]) *Geometria organica* pag. 87—94. [2]) Ebenda pag. 89. [3]) Ebenda pag. 90.

Grade m, n, r an die Stelle der drei genannten Geraden treten, wird die durch den Durchschnittspunkt des zweiten Schenkelpaares erzeugte Linie vom Grade $4mnr$. Die Beweisführung dieser und noch einiger ähnlicher Sätze beruht stets auf der gleichen Grundlage. Maclaurin fragt regelmässig nach dem Orte von Q, wenn P eine Gerade beschriebe. Jener Ort sei eine C_g, so giebt g vervielfacht mit m, mit n, mit r u. s. w. die Anzahl der Punkte auf der von Q thatsächlich durchlaufenen Curve, bei deren Erreichen durch Q der Punkt P auf der Geraden sich befindet, und die Anzahl $gmnr\ldots$ dieser Durchschnittspunkte bestimmt den Grad der von P erzeugten Curve.

Der dritte Abschnitt[1]) von den unendlichen Reihen von Curven, welche aus einer gegebenen Curve mit Hilfe von Berührungslinien abgeleitet werden, behandelt die Fusspunktscurven, steht also zur ersten Abhandlung Maclaurin's von 1718 (S. 419) in ähnlicher Beziehung, wie die vorhergehenden Abschnitte der Geometria organica zu seiner zweiten Abhandlung von 1719.

Der vierte Abschnitt[2]) hat es mit Curven zu thun, deren Entstehung auf Anziehungskräfte zurückzuführen ist, welche reciprok zu gewissen Potenzen der Entfernung wirken.

Der fünfte Abschnitt[3]) endlich von der Beschreibung geometrischer Linien, von welchen eine Anzahl von Punkten gegeben ist, begründet zuerst mittels eines Eliminationsverfahrens den Satz, dass Curven vom Grade n und vom Grade 2 (beziehungsweise 3) einander höchstens in $2n$ (beziehungsweise $3n$) Punkten schneiden. Sind die Curven vom Grade m und vom Grade n, so scheint, sagt Maclaurin, mn die Zahl der Durchschnittspunkte zu sein, aber[4]) einen allgemeinen Beweis dafür habe er vergeblich gesucht, weil es schwierig sei, bei hoch ansteigenden Gleichungen die Divisoren zu finden. Aus dem als wahr angenommenen Satze werden alsdann wichtige Folgerungen gezogen[5]). Eine Curvengleichung $n$ten Grades enthält $\frac{n(n+3)}{2}$ Coefficienten (S. 413), welche durch Angabe von ebensovielen Punkten, durch welche die Curve hindurchgehen soll, berechnet werden können, und folglich machen diese $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte die Curve zu einer ganz bestimmten. Andererseits schneiden sich zwei Curven $n$ten Grades in n^2 Punkten, folglich bestimmen n^2 Punkte die Curve nicht, da zwei Curven gleichen Grades jene n^2 Punkte enthalten. Wird $n = 3$ an-

[1]) *Geometria organica* pag. 94—120. [2]) Ebenda pag. 120—135. [3]) Ebenda pag. 135—139. [4]) Ebenda pag. 136: *Universalem vero cujus rei demonstrationem adhuc frustra quaesivimus propterea quod difficile sit divisores in arduis aequationibus invenire.* [5]) Ebenda pag. 137.

genommen, so ist $\frac{n(n+3)}{2} = 9$ und $n^2 = 9$, also bestimmen neun Punkte eine Curve 3. Grades und bestimmen sie auch nicht. Maclaurin beruhigt sich bei dem Ausspruche dieser Schwierigkeit, ohne eine Lösung derselben auch nur zu versuchen. Eine andere Folgerung gilt der Anzahl möglicher Doppelpunkte. Die Gleichung $n-2$ten Grades enthält $\frac{(n-2)(n+1)}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2} + n - 2$ Coëfficienten, und daraus ergiebt sich, dass die Curve $n$ten Grades nicht mehr als $\frac{n^2-3n+2}{2}$ Doppelpunkte besitzen kann. Besässe sie nämlich $\frac{n^2-3n+2}{2} + 1$ Doppelpunkte, so könnte man durch sie und noch $n-3$ einfache Punkte eine Curve $(n-2)$ten Grades hindurchlegen und diese hätte mit der Curve $n$ten Grades

$$2\left(\frac{n^2-3n+2}{2}+1\right) + n - 3 = n^2 - 2n + 1$$

Punkte gemeinsam, während doch nur $n(n-2) = n^2 - 2n$ gemeinsame Punkte möglich sind. Daran knüpfen sich noch einige weitere Bemerkungen über Punkte von noch höherer Vielfachheit als Doppelpunkte.

Wir hoffen in diesem Berichte über die Geometria organica nicht Allzubedeutendes weggelassen zu haben, wenn auch selbstverständlich Kürzungen unerlässlich waren. Man wird das von uns (S. 419) zum voraus ausgesprochene Urtheil, dass Maclaurin sich mit diesem Werke in die Reihe der allerersten Geometer stellte, wohl nicht ungerecht finden. Maclaurin musste von da ab Grosses leisten, wenn seine späteren Schriften den ersten Veröffentlichungen ebenbürtig bleiben sollten, und er hat es gethan. Wir dürfen diesen Wechsel auf seine Zukunft hin schon ausstellen, wenn wir ihn auch im nächsten Abschnitte erst einlösen können.

Wir haben in diesem Kapitel nur noch eine Persönlichkeit zu nennen, welche uns wieder nach Frankreich hinüberführt. Henri Pitot[1] (1695—1771), im südlichen Frankreich geboren und in seinen späteren Lebensjahren seit 1740 ebendort mit grossem Erfolge als Wasserbaumeister thätig, verbrachte einen Theil seines Mannesalters in Paris, wo er mit wissenschaftlichen Untersuchungen sich beschäftigte. Er gehörte seit 1724 der Académie des Sciences an. Seine wichtigsten Arbeiten gehören der Hydraulik an, einige auch der Geometrie. Mit einer von letzteren haben wir es zu thun, welche der Académie des Sciences am 12. Juli 1724 vorlag. Ein Nachtrag folgte am 17. Februar 1725. Beide Beiträge vereinigt sind in dem

[1]) Poggendorff II, 459. — Chasles, *Aperçu hist.* 139 (deutsch 136).

Bande der Akademieveröffentlichungen abgedruckt, der für die Arbeiten von 1724 bestimmt bezeichnet ist, aber erst 1726 erschien[1]. Es handelt sich um Roberval's *Compagne de la cycloïde* (Bd. II, S. 803) und deren von Pitot in mehrfacher Weise abgeleiteten Quadratur. Die eine Ableitung lässt die Sinuslinie, denn eine solche ist bekanntlich jene Gefährtin der Cycloide, als Abwicklung der Ellipse entstehen, welche auf einem graden Kreiscylinder durch eine schneidende Ebene gebildet wird, die gegen die Grundfläche unter einem Winkel von 45° geneigt ist und diese in einem Durchmesser schneidet (Fig. 65).

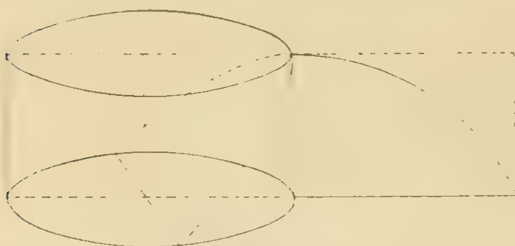


Fig. 65.

In der Nachschrift zeigte Pitot, dass ebendieselbe Gefährtin der Cycloide auch durch Projection von auf dem gleichen Cylinder gezeichneten Schraubenwindungen auf eine mit der Axe des Cylinders parallelen Ebene entstehe. Bei dieser Gelegenheit bediente er sich eines Ausdruckes, um dessenwillen wir eigentlich den ganzen Aufsatz erwähnt haben. Die Alten, sagt Pitot, haben diese Curve Spirale oder Schneckenlinie genannt, weil ihre Gestaltung auf dem Cylinder eine Aehnlichkeit mit der gemeinen Spirale in der Ebene erkennen lässt, aber sie ist sehr verschieden von der gemeinen Spirale, indem sie eine Curve doppelter Krümmung ist[2], oder eine Linie, welche man sich auf der krummen Oberfläche eines Körpers gezeichnet denkt. Vielleicht werden diese Arten von Curven doppelter Krümmung oder auf Oberflächen befindlich eines Tages den Gegenstand von Untersuchungen der Geometer bilden.

Das ist das erste gedruckte Vorkommen des Ausdruckes Curven doppelter Krümmung, welches nachgewiesen ist, und wenn auf der einen Seite die weder begründende noch besonders betonende Art, in welcher Pitot sich seiner bedient, an ein Bekanntsein glauben machen könnte, so ist auf der anderen Seite die ahnungsvolle Schlussäusserung dazu angethan, in Pitot den vermuthen zu lassen, der zuerst über Curven auf krummen Oberflächen als solchen nachdachte und ihnen vielleicht insofern doppelte Krümmung zusprach, als sie erstens Curven sind und zweitens an der Krümmung der Oberfläche theilnehmen; so glauben wir wenigstens die oben wiedergegebenen Worte Pitot's verstehen zu müssen.

[1] *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1724, pag. 107—113.
[2] Ebenda pag. 113: *étant une des courbes à double courbure.*

100. Kapitel.

Differentialgleichungen.

Wir haben im vorigen Kapitel mancherlei geometrische Aufgaben an unseren Blicken vorübergehen lassen, solche, deren Auflösung streng genommen auch vor Erfindung der Infinitesimalrechnung möglich gewesen wäre, sowie solche, die erst nach dieser Erweiterung des mathematischen Gebietes eine Inangriffnahme gestatteten. Aber unter letzteren haben wir eine eigene Gattung von Untersuchungen bisher ausgeschlossen: solche, welche zunächst auf eine Differentialgleichung führen, deren Integration alsdann eine neue Aufgabe für sich darstellt. Indem wir diesen Untersuchungen uns zuwenden, lösen wir zugleich eine (S. 232) gegebene Zusage ein, auf das isoperimetrische Problem zurückzukommen, dessen Geschichte mit dem Jahre 1699 keineswegs abgeschlossen war und daher im XVI. Abschnitte nicht zu Ende erzählt werden konnte.

Wir erinnern daran, dass Jakob Bernoulli den Mathematikern die isoperimetrische Aufgabe gestellt hatte, dass insbesondere Johann Bernoulli zur Lösung der Aufgabe aufgefordert war, dass dieser der Aufforderung so weit entsprach, als er die Differentialgleichung $dx = \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$ veröffentlichte. Er bemerkte dazu, er fasse dt, oder das Curvenelement, als constant auf[1]), er hätte also eigentlich schreiben müssen $\frac{dx}{dt} = \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$; doch legte man damals auf solche formale Richtigkeit kein sehr grosses Gewicht. Jene Differentialgleichung, sagte Johann Bernoulli also, ohne seine Behauptung genauer zu begründen, gehöre der gesuchten Curve an. Wir erinnern weiter daran, dass Leibniz den Streit der Brüder entscheiden sollte, nachdem er erst von der Lösung Jakobs, dann von der Johanns, die selbstverständlich mit Beweisen zu versehen seien, genaue Kenntniss genommen haben würde.

In den A. E. vom Juni 1700 gab Jakob Bernoulli[2]) zunächst eine Anzahl von Beispielen, in den A. E. vom Mai 1701 folgte die *Analysis magni problematis isoperimetrici*[3]). Diese Analyse des isoperimetrischen Problems war allerdings schon im März 1701 bei Gelegenheit der Disputation von Johann Jakob Bischof[4]) als Sonderschrift erschienen. Sie war gewidmet dem unvergleichlichen

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 219: *en prenant dt ou l'élément de la courbe pour constant.* [2]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 874—887. [3]) Ebenda II, 895—920. [4]) Episcopius heisst der lateinische Name.

Viergespanne von Männern: De L'Hospital, Leibniz, Newton, Fatio de Duillier, den Fürsten unter den Mathematikern, eine Zusammenstellung von Namen, welche uns heute geradezu unmöglich erscheint, welche aber im Jahre 1701 bei Niemand Verwunderung erregen konnte. Die Abhandlung beginnt mit ganz allgemeinen Betrachtungen, welche dahin gerichtet sind, die Ordnung der Differentialgleichungen, zu welchen man gelangen müsse, zu ermitteln. Die Ziehung einer Tangente bedürfe eines Bogenelementes, also 2 consecutiver Punkte, beziehungsweise 1. Differentiale von Abscisse und Ordinate. Die Auffindung des Krümmungskreises bedürfe des von zwei Bogenelementen gebildeten Winkels, also 3 consecutiver Punkte, beziehungsweise 2. Differentiale von Abscisse und Ordinate. Damit von Isoperimetrie die Rede sein könne, müsse ein drittes Bogenelement in das Bereich der Untersuchung gezogen werden, die alsdann auf 4 consecutive Punkte sich beziehend die 3. Differentiale von Abscisse und Ordinate einschliessen werde. Das ist der eine Grundgedanke, während als zweiter der Satz erscheint, von welchem Jakob Bernoulli auch 1697 in seiner Abhandlung über die Brachistochrone schon Gebrauch gemacht hatte (S. 226), dass eine Curve, welche als Ganzes ein Maximum oder Minimum darstelle, auch in ihren noch so kleinen Theilen die gleiche Eigenschaft besitzen müsse. Wir wollen nunmehr über die entwickelten Lehrsätze ihrer Reihenfolge nach berichten[1]), wobei wir uns die einzige wesentliche Abweichung gestatten, dass wir das Differentialzeichen mit Zahlenindex versehen statt der Wiederholung des d, also nicht ddx, $dddx$, sondern d^2x, d^3x schreiben.

Der I. Satz lautet, dass, wenn x' (oder kürzer bezeichnet x), x'', x''', x'''' vier auf einander folgende Ordinaten, y' (oder y), y'', y''', y'''' die entsprechenden Abscissen, z' (oder z), z'', z''' die zwischen der x und den anderen genannten Ordinaten abgegrenzten Curvenstückchen bezeichnen, diese Grössen, je nachdem fortwährendes Anwachsen oder fortwährendes Abnehmen vorausgesetzt wird, den Gleichungen gehorchen müssen:

$$x'' = x \pm dx,\quad x''' = x'' \pm dx'' = x \pm 2dx + d^2x,$$
$$x'''' = x''' + dx''' = x \pm 3dx + 3d^2x \pm d^3x,$$

ebenso

$$y'' = y \pm dy,\quad y''' = y \pm 2dy + d^2y,\quad y'''' = y \pm 3dy + 3d^2y \pm d^3y,$$

ebenso

$$z'' = z + dz,\quad z''' = z \pm 2dz + d^2z.$$

[1]) Vergleiche ausser der Originalabhandlung selbst auch F. Giesel, Geschichte der Variationsrechnung. Erster (einziger) Theil. Programm des Gymnasiums zu Torgau für Ostern 1857. S. 8–10.

Der II. Satz behauptet (Figur 66) die Proportion

$$df : dg = (rst - qsu) : (qsu - ptu).$$

Die Bedeutung der vorkommenden Buchstaben ist folgende: $p = FX$, $q = GY$, $r = CZ$, $s = BF$, $t = FG$, $u = GC$, $f = KF = HB + p$, $g = LG = KF + q = HB + p + q$. Fernere Abkürzungen sind $b = HB$, $l = BX$, $m = FY$, $n = GZ$.

Betrachtet man nun b, d. h. HB als constant, so zeigt sich

$$df = dp,\ dg = dp + dq.$$

Nun mögen die Punkte B und C festgehalten sein. Die Punkte F und G werden als auf KF und LG verschiebbar gedacht, während die Bogenlänge zwischen B und C, also

$$BF + FG + GC = s + t + u,$$

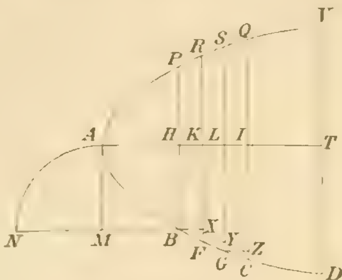


Fig. 66.

unverändert bleiben soll. In den rechtwinkligen Dreieckchen BXF, FYG, GZC ist $l^2 + p^2 = s^2$, $m^2 + q^2 = t^2$, $n^2 + r^2 = u^2$. Zugleich ist, da F und G ihre Lage nur in der Weise veränderten, dass die Entfernungen ihrer Ordinaten unter einander und von denen der fest gehaltenen B und C die gleichen blieben, durch diese Bedingungen festgestellt, dass neben $s + t + u$ auch $l + m + n$ und $p + q + r$ constante Summen sind[1]. Durch Differentiation der aus rechtwinkligen Dreiecken gefolgerten Gleichungen und der constanten Summen, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass l, m, n auch einzeln constant sind, erhält man:

1. $p\,.\,dp = s\,.\,ds$,
2. $q\,.\,dq = t\,.\,dt$,
3. $r\,.\,dr = u\,.\,du$,
4. $dp + dq + dr = 0$,
5. $ds + dt + du = 0$.

Aus 4. und 5. werden dr und du entnommen und in 3. eingesetzt. Man erhält so $dt = \frac{r\,.\,dp + r\,.\,dq - u\,.\,ds}{u}$, welches in 2. eingesetzt $ds = \frac{rtdp + rtdq - qudq}{tu}$ liefert. Diesen Werth führt man wieder in 1. ein, so entsteht $(ptu - rst)dp = (rst - qsu)dq$ oder

$$dp : dq = (rst - qsu) : (ptu - rst),$$

beziehungsweise $dp : (dp + dq) = (rst - qsu) : (ptu - qsu)$. Oben

[1]) Jac. Bernoulli schreibt geradezu $l + m + n = \text{const.}$, $p + q + r = \text{const.}$, $s + t + u = \text{const.}$

war aber $dp = df$, $dp + dq = dg$, und somit verwandelt sich die gefundene Proportion in die vorher aufgestellte.

Ein III. Satz macht die Annahme, die Bewegung von F und G finde auf kleinen Kreisbögen statt, deren Mittelpunkte B und C sind. Bei dieser Annahme nehmen die Ordinaten FK, GL an der Bewegung Theil, d. h. l, m, n sind einzeln veränderlich, während s, t, u constant erscheinen. Differentiation derselben Gleichungen wie oben führt hier zu den fünf Differentialgleichungen:

$$1.\quad ldl + pdp = 0,$$
$$2.\quad mdm + qdq = 0,$$
$$3.\quad ndn + rdr = 0,$$
$$4.\quad dl + dm + dn = 0,$$
$$5.\quad dp + dq + dr = 0.$$

Hier werden dn und dr aus 4. und 5. in 3., dm aus dem veränderten 3. in 2., dl aus dem veränderten 2. in 1. eingeführt. Dann wird wieder $dp = df$, $dp + dq = dg$ gesetzt. Das Ergebniss dieser Rechnung ist: $df : -dg = (lmr - lnq) : (lnq - mnp)$.

Der IV. und V. Satz sind nur andere Schreibweisen des II. und III. Die aufeinander folgenden Ordinaten, Abscissen und Curvenstücke sollen nämlich $HB = x$, $KF = x''$, $LG = x'''$, $AH = y$, $AK = y''$, $AL = y'''$, $AB = z$, $AF = z''$, $AG = z'''$ heissen. Alsdann ist

$$BX = l = y'' - y = dy,\quad FY = m = y''' - y'' = dy'' = dy + d^2y,$$
$$GZ = n = AI - y''' = dy''' = dy + 2d^2y + d^3y$$

und entsprechend

$$p = dx,\quad q = dx + d^2x,\quad r = dx + 2d^2x + d^3x,$$

sowie

$$s = dz,\quad t = dz + d^2z,\quad u = dz + 2d^2z + d^3z.$$

Es kommt auf die Berechnung der Werthe $rst - qsu$ und $qsu - ptu$ einerseits, auf die der Werthe $lmr - lnq$ und $lnq - mnp$ andererseits an. Zunächst würde erscheinen:

$$rst - qsu = dz(dzd^2x - dxd^2z) + dz(dzd^3x - dxd^3z) + dz(d^2zd^3x - d^2xd^3z)$$

und

$$qsu - ptu = dz(dzd^2x - dxd^2z) + 2d^2z(dzd^2x - dxd^2z) + d^3z(dzd^2x - dxd^2z).$$

Die Glieder 6. Ordnung werden gegen die 4. und 5. Ordnung weggelassen. Dann heisst es nur noch

$$rst - qsu = dz[(dzd^2x - dxd^2z) + (dzd^3x - dxd^3z)]$$

und

$$qsu - ptu = dz(dzd^2x - dxd^2z) + 2d^2z(dzd^2x - dxd^2z).$$

Es erscheint wünschenswerth d^2z und d^3z wegzuschaffen. Das geschieht mittels $dz^2 = dx^2 + dy^2$ unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Wahl von $HK = KL = LI$, welche vorherging, dy zu einer Constanten gemacht hat. Dann liefert die wiederholte Differentiation jener Gleichung

$$dz d^2z = dx d^2x \quad \text{und} \quad dz d^3z + d^2z^2 = dx d^3x + d^2x^2.$$

Durch Benutzung dieser Gleichungen sowie von $dz^2 - dx^2 = dy^2$ erhält man

$$rst - qsu = dy^2 d^2x + dy^2 d^3x - \frac{dx dy^2 d^2x^2}{dz^2}$$

und

$$qsu - ptu = dy^2 d^2x + \frac{2 dx dy^2 d^2x^2}{dz^2}.$$

Jetzt rufen wir die Proportion des II. Satzes in's Gedächtniss zurück und unterwerfen sie folgender Umformung:

$$\begin{aligned} df : -dg &= (rst - qsu) : (qsu - ptu) \\ &= \frac{dz^2}{dy^2}(rst - qsu) : \frac{dz^2}{dy^2}(qsu - ptu) \\ &= (dz^2 d^2x + dz^2 d^3x - dx d^2x^2) : (dz^2 d^2x + 2 dx d^2x^2). \end{aligned}$$

Das aber ist der IV. Satz. Der aus dem III. Satze entstehende V. Satz, dessen Ableitung wir übergehen dürfen, da sie der eben geführten Rechnung mit dem einzigen Unterschiede, dass jetzt bei der wiederholten Differentiation von $dx^2 + dy^2 = dz^2$ das Bogenelement dz als constant gilt, durchaus nachzubilden ist, kleidet sich in die Proportion

$$df : -dg = (dy^2 d^2x + dy^2 d^3x + dx d^2x^2) : (dy^2 d^2x - 2 dx d^2x^2).$$

Ein VI. allgemeiner Satz folgt. Seien zwei Grössen f und g gedacht, deren zweite g die erste f um unendlich wenig übertrifft; sei ausserdem F genau so aus f gebildet wie G aus g[1]), sei ferner $a dF = h df$, $a dG = i dg$, so wird behauptet $i = h + dh$. Jakob Bernoulli führt den Beweis an einem besonders gewählten Beispiele $F = \sqrt{a^2 + f^2}$, $G = \sqrt{a^2 + g^2}$. Mithin ist

$$dF = \frac{f df}{\sqrt{a^2 + f^2}}, \quad dG = \frac{g dg}{\sqrt{a^2 + g^2}}.$$

Die Annahmen $a dF = h df$, $a dG = i dg$ liefern

$$h = \frac{af}{\sqrt{a^2 + f^2}}, \quad i = \frac{ag}{\sqrt{a^2 + g^2}}.$$

Denkt man sich eine Curve, deren Abscisse f einer Ordinate h entspricht, so wird der von f unendlich wenig verschiedenen Abscisse g die Ordinate i entsprechen, und diese kann, weil sie der Ordinate h unendlich nahe liegt[2]), von ihr nur unendlich wenig verschieden sein.

[1] *rursumque aliae duae per has similiter expressae vel datae F et G.*
[2] *contigua et proxima.*

Man würde heute sagen: wenn die Gleichung $y = \varphi(x)$ die einer Curve ist, auf welcher zwei nächstliegende Punkte M_1 und M_2 heissen, so ist die Richtung der Berührungslinien M_1T_1 und M_2T_2 nur unendlich wenig verschieden, ein Ausspruch, der allerdings den stetigen Verlauf der Curve an der fraglichen Stelle voraussetzt.

Der VII. Satz ist der, den wir (S. 430) in Erinnerung gebracht haben, dass eine Curve, welche als Ganzes ein Maximum oder Minimum darstelle, auch in ihren noch so kleinen Theilen die gleiche Eigenschaft besitzen müsse.

An diese Einleitung schliesst sich die eigentliche Auflösung der gestellten Aufgaben. Deren erste lautet: Seien AT und AM zwei aufeinander senkrechte Axen, AN eine ganz beliebige Curve. Es soll von allen zwischen A und D gelegenen isoperimetrischen Curven diejenige ABD gesucht werden, welche bewirkt, dass, wenn von den einzelnen Punkten B derselben auf jene Axen Lothe BHP und BMN gefällt werden, wo N der Durchschnittspunkt der BM mit der Curve AN ist, und wo HP stets $= MN$ angenommen wird, die von der so entstehenden Curve APV, der Abscisse AT und der Ordinate TV eingeschlossene Fläche ein Maximum oder Minimum werde. Die Abscissenstückchen HK, KL, LI werden als unter einander gleich gedacht und durch b bezeichnet. Die in den Punkten H, K, L, I fussenden Ordinaten heissen $HB = b$, $KF = f$, $LG = g$, $IC = c$. Aus ihnen leiten sich stets auf die gleiche Weise die Ordinaten $HP = B$, $KR = F$, $LS = G$, $IQ = C$ ab. Dem VII. Satze gemäss muss, wie der ganze Flächenraum ATV, auch der sehr kleine Flächenraum $PHIQ$ der Eigenschaft eines Maximums oder Minimums theilhaftig sein, analytisch ausgedrückt, sein Differential muss verschwinden. Aber

$$PHIQ = lB + lF + lG.$$

Sind also l, B, C constant, F, G veränderlich, so ist

$$dPHIQ = ldF + ldG,$$

und dieses verschwindet, wenn $dF + dG = 0$. Nimmt man nun an, es sei $dF = \frac{hdf}{a}$, $dG = \frac{idg}{a}$, wodurch die Bedingung in $hdf + idg = 0$ oder in $df : -dg = i : h$ übergeht, so ist vermöge des VI. Satzes $i = h + dh$, mithin $df : -dg = (h + dh) : h$. Ausserdem ist wegen der gedachten Verschiebung der Punkte F und G auf ihren Ordinaten der im IV. Satz vorgeschriebene Fall vorhanden, also

$$df : -dg = (dz^2d^2x + dz^2d^3x - dxd^2x^2) : (dz^2d^2x + 2dxd^2x^2)$$

und sonach

$$\frac{h + dh}{h} = \frac{dz^2d^2x + dz^2d^3x - dxd^2x^2}{dz^2d^2x + 2dxd^2x^2},$$

beziehungsweise

$$\frac{dh}{h} = \frac{dz^2 d^3x - 3dx d^2x^2}{dz^2 d^2x + 2dx d^2x^2},$$

also auch

$$h dz^2 d^3x - 3h dx d^2x^2 = dh dz^2 d^2x + 2dh dx d^2x^2.$$

In dieser Gleichung sind die beiden Glieder links vom Gleichheitszeichen sowie das erste Glied rechts von 5., das zweite Glied rechts von 6. Ordnung der Kleinheit. Letzteres fällt daher fort, und die Aufgabe ist auf die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$h dz^2 d^3x - 3h dx d^2x^2 = dh dz^2 d^2x$$

zurückgeführt, deren Integration noch zu vollziehen ist. Zu diesem Zwecke nimmt Jakob Bernoulli zunächst noch eine Umformung vor. Er wendet die bei Ableitung des Satzes IV (S. 433) begründete Gleichung $dx d^2x = dz d^2z$ an, welche das zweite Glied links in $-3h dz d^2x d^2z$ überführt, dividirt dann durch dz, bringt alle Glieder nach links und erhält

$$h dz d^3x - 3h d^2x d^2z - dh dz d^2x = 0.$$

Die Form der einzelnen Glieder mag für Jakob Bernoulli Veranlassung gewesen sein, das Integral versuchsweise in der Gestalt $h^m dz^n d^2x^r =$ const. anzusetzen, indem er sich die nachträgliche Bestimmung von m, n, r vorbehält. Die Differentiation der Versuchsgleichung ergiebt ihm

$$r h^m dz^n d^2x^{r-1} d^3x + n h^m dz^{n-1} d^2z d^2x^r + m h^{m-1} dh dz^n d^2x^r = 0.$$

Er dividirt durch $h^{m-1} dz^{n-1} d^2x^{r-1}$ und erhält dadurch

$$r h dz d^3x + n h d^2x d^2z + m dh dz d^2x = 0,$$

also eine Gleichung, welche mit der vorgelegten identisch wird, wenn $r = 1$, $n = -3$, $m = -1$ ist. D. h. die erste Integration liefert $\frac{d^2x}{h dz^3} =$ const. Als Constante wählt Jakob Bernoulli $\pm \frac{1}{a^2 dy}$. Dazu ist die Berechtigung vorhanden, denn dy ist eine constante Länge (früher l genannt), a^2 eine willkürliche Constante, und das Doppelzeichen $\pm$ liefert die erforderliche Allgemeinheit des Vorzeichens. Eine erste Integration hat mithin die Differentialgleichung zweiter Ordnung hervorgebracht:

$$\frac{d^2x}{h dz^3} = \pm \frac{1}{a^2 dy}.$$

Eine zweite Integration unternimmt Jakob Bernoulli durch einen abermaligen Versuch, zu welchem er $a dx = t dy$ wählt. Da, wie schon bemerkt, dy constant ist, so folgt durch Differentiation

$$d^2x = \frac{dt \cdot dy}{a}.$$

Daneben ist $a^2dx^2 = t^2dy^2$, $a^2dx^2 + a^2dy^2 = (a^2 + t^2)dy^2$ und zu-

gleich $dx^2 + dy^2 = dz^2$, also $a^2dz^2 = (a^2 + t^2)dy^2$, $dz = \frac{dy}{a}\sqrt{a^2 + t^2}$. Die Werthe von d^2x und dz werden nun in die zu integrirende Differentialgleichung $\frac{d^2x}{h\,dz^3} = \pm\frac{1}{a^2dy}$ eingeführt und liefern nach leichter Umformung $-\frac{a^2dt}{(a^2 + t^2)\sqrt{a^2 + t^2}} = \pm\frac{hdy}{a^2} = \pm\frac{hdx}{at}$, indem man von der Annahme $adx = tdy$ erneuten Gebrauch macht. Das giebt

$$\mp\frac{a^2tdt}{(a^2 + t^2)\sqrt{a^2 + t^2}} = \frac{hdx}{a}.$$

Nun war aber $dx = df$ und $\frac{hdf}{a} = dF$. Andererseits ist

$$\mp\frac{a^2tdt}{(a^2 + t^2)\sqrt{a^2 + t^2}} = d\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}\right),$$

und die Integration der zur Bestimmung von t führenden Differentialgleichung erster Ordnung liefert $F = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}$. Statt F, worunter die Ordinate KR verstanden war, kann auch die benachbarte Ordinate HP oder das ihr gleiche Stück MN gesetzt werden, für welches von nun an der Buchstabe p zur Bezeichnung dient. Mithin ist nach Jakob Bernoulli entweder $p = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}$ oder $p = a - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}$, indem er, allerdings ohne dass eine bestimmte Veranlassung dazu vorläge, die Integrationsconstante in dem einen Falle $= 0$, in dem anderen $= a$ wählt. Die den beiden Annahmen entsprechenden Werthe von t sind $t = \frac{a\sqrt{a^2 - p^2}}{p}$ und $t = \frac{a\sqrt{2ap - p^2}}{a - p}$. Nun war aber $adx = tdy$ als Differentialgleichung der Curve angenommen, welche die Fläche $ATV = \int pdy$ als ein Maximum oder als ein Minimum erscheinen lässt. Setzt man die beiden vorher gefundenen Werthe von t ein, so gewinnt man die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$dy = -\frac{pdx}{\sqrt{a^2 - p^2}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{(a - p)dx}{\sqrt{2ap - p^2}},$$

von welchen die erste dem Falle des Maximums, die zweite dem des Minimums entsprechen muss, wie noch auseinander gesetzt wird.

Die zweite Aufgabe, welcher Jakob Bernoulli sich alsdann zuwendet, unterscheidet sich in ihren Bedingungen dadurch von der ersten Aufgabe, dass die Ordinaten HP, KR, LS nicht aus den Ordinaten HB, KF, LG, sondern aus den Bogenstücken AB, AF, AG in gleicher Weise entstehen. Die Auflösung verfolgt einen ganz ähnlichen Gang, wie die soeben ausführlich geschilderte Auflösung der ersten Aufgabe. Sie stützt sich auf die Sätze VII, VI, II, I und führt zu einer Differentialgleichung dritter Ordnung. Aber diesmal begnügt

sich Jakob Bernoulli damit, das Ergebniss zweimaliger Integration in Gestalt einer Differentialgleichung erster Ordnung sofort hinzuschreiben. Er ersetzt die Herleitung durch nachmaligen Beweis der Richtigkeit, welchen er mittels wiederholter Differentiation liefert.

Als dritte Aufgabe, die ebenfalls wieder auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung führt, ist endlich die allgemeinste Kettenlinie behandelt, d. h. die Curve, welche eine an beiden Enden aufgehängte biegsame Linie unter der Voraussetzung bildet, dass die einzelnen Theile mit beliebigen Gewichten belastet sind.

So der grundlegende Aufsatz im Maihefte 1701 der A. E., dem, wie wir schon erzählt haben (S. 429), Jakob Bernoulli im Junihefte 1700 einzelne Beispiele vorausgeschickt hatte. Durch letztere aufgerüttelt gab Johann Bernoulli seine lateinisch geschriebene Behandlung des isoperimetrischen Problems am 1. Februar 1701 in versiegeltem Umschlage an Varignon zur Einreichung bei der Académie des Sciences, beziehungsweise zur Eröffnung, nachdem die Abhandlung des Bruders mit dessen theoretischer Auseinandersetzung werde veröffentlicht worden sein. Nun scheinen sich Zwischenfälle zugetragen zu haben, von welchen wir nicht genau unterrichtet sind[1]. Das Packet blieb versiegelt und wurde erst am 17. April 1706, mithin fast genau acht Monate nach dem am 16. August 1705 erfolgten Tode des Jakob Bernoulli eröffnet. Dann wurde der Inhalt in's Französische übersetzt und in den Abhandlungen der Académie des Sciences für 1706 gedruckt[2]. Johann Bernoulli bedient sich des schon 1697 durch Jakob Bernoulli kundgegebenen Princips (S. 226), welches als VII. Einleitungssatz in die Abhandlung von 1701 übergegangen war, ohne freilich den Urheber desselben zu nennen. Er nennt $FO\varphi$ ein Bogenelement der gesuchten Curve, welche zur Entstehung der einen Maximal- oder Minimalraum begrenzenden zweiten Curve Anlass giebt, $F\omega\varphi$ ein Bogenelement der zwischen den Punkten F und φ isoperimetrisch verlaufenden Curve, so liegt, da wegen der Isoperimetrie $FO + O\varphi = F\omega + \omega\varphi$ sein muss, und da wegen der Kleinheit der Abmessungen FO, $O\varphi$, $F\omega$, $\omega\varphi$ sämmtlich als gradlinig betrachtet werden können, in der erwähnten Gleichung die Aufforderung, O und ω als Punkte einer Ellipse zu betrachten, während $FO + O\varphi$ die Länge der grossen Axe angiebt. So geistreich dieser Grundgedanke ist, leidet er an dem wesentlichen Mangel, dass nur zwei consecutive Bogenelemente statt deren drei in Erwägung gezogen werden, und daher stammen die Unrichtigkeiten, zu welchen Johann Bernoulli

[1] Joh. Bernoulli *Opera* I, 424 in der Fussnote heisst es nur: *Comme il y eut des difficultés sur cette publication.* [2] Ebenda I, 424—435.

gelangte. Nur in der ersten Aufgabe, deren Auflösung er kannte, fand er das Ergebniss, zu welchem er gelangen wollte, und er liess sich dadurch über die Zuverlässigkeit des eingeschlagenen Weges täuschen.

Zwei formal wichtige Dinge möchten wir aus dem das eigentliche Ziel verfehlenden Aufsatze hervorheben. Wir erinnern uns (S. 233), dass Jakob Bernoulli sich 1698 des Wortes Functionslinie bedient hatte, ein Ausdruck, von welchem er 1701 in der Abhandlung, über welche oben ausführlich berichtet wurde, keinerlei Gebrauch machte, wiewohl er dort sehr passende Verwendung hätte finden können. Noch 4 Jahre früher als 1698 lässt sich indessen das Wort Function sowohl bei Leibniz als bei Jakob Bernoulli nachweisen[1]). Leibniz nannte im Julihefte 1694 der A. E. Function dasjenige Stück einer Geraden, welches abgeschnitten wird, indem man Gerade zieht, zu deren Herstellung nur ein fester Punkt und ein Curvenpunkt nebst der dort stattfindenden Krümmung in Gebrauch treten[2]). Jakob Bernoulli hat alsdann im Octoberhefte 1694 der A. E., auf den Leibnizischen Aufsatz Bezug nehmend, des gleichen Wortes im gleichen Sinne sich bedient[3]). Die Zeitfolge führt sodann zu dem zwischen Johann Bernoulli und Leibniz im Jahre 1698 geführten Briefwechsel. Schon im Juni 1698 spricht Johann Bernoulli von irgend welchen Functionen der Ordinaten beim isoperimetrischen Probleme[4]). Leibniz antwortet Ende Juli, er sei entzückt, dass Bernoulli das Wort Function grade so gebrauche wie er selbst[5]). Im August schlägt Bernoulli vor, eine Function von x durch X oder durch ξ zu bezeichnen[6]). Leibniz billigt diesen Vorschlag[7]), meint aber zugleich, man könne Verschiedenheiten der vorkommenden Functionen dadurch andeuten, dass man den Buchstaben ξ mit einem Zahlenindex versehe; er selbst bediene sich, und zwar hauptsächlich mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Functionen, anderer Zeichen. Ihm seien $\overline{x|1|}$ und $\overline{x|2|}$ Functionen von x, $\overline{x;y|1|}$ und $\overline{x;y|2|}$ Functionen von x und y, $\overline{x|r1|}$ und $\overline{x|r2|}$ rationale, endlich $\overline{x|ri1|}$ und $\overline{x|ri2|}$ ganze rationale Functionen von x. In den Abhandlungen

[1]) Diese Bemerkung dürfte zuerst von Klügel (Wörterbuch II, 272) gemacht worden sein, wurde vielfach übersehen und von A. Brill in dem von ihm und M. Noether 1894 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Bericht „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit" S. 126, § 15 neuerdings an's Licht gezogen. [2]) Leibniz V, 306: *Functionem voco portionem rectae, quae, ductis ope sola puncti fixi et puncti curvae cum curvedine sua dati rectis, abscinditur.* [3]) Jac. Bernoulli *Opera* I, 618. [4]) Leibniz III, 507. [5]) Ebenda III, 525. [6]) Ebenda III, 531. [7]) Ebenda III, 537.

der Académie des Sciences von 1706 trat jetzt Johann Bernoulli mit dem Worte an die Oeffentlichkeit. Gleich im Wortlaute der ersten Aufgabe sprach er[1]) von den *fonctions quelconques de ces appliquées*, während Jacob Bernoulli (S. 433, Anm. 1) denselben Sinn durch die Wortverbindung *aliae duae per has similiter expressae* ausgedrückt hatte. Eine Definition des Wortes gab Johann Bernoulli freilich erst in den Abhandlungen der Académie des Sciences von 1718. Dort heisst es[2]), er verstehe unter Function einer veränderlichen Grösse einen Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Grösse und Constanten zusammengesetzt sei. Erst von da an war der neue Kunstausdruck der Wissenschaft erworben, und noch 12 Jahre später, in den Abhandlungen der Académie des Sciences für 1730, unterschied wieder Johann Bernoulli zwischen algebraischen und transcendenten Functionen[3]), wenn er auch mit letzterem Namen nicht den weiten Sinn verband, der ihm nachmals beigelegt wurde, sondern ihn nur auf Integrale algebraischer Functionen bezog.

Noch eine zweite Bemerkung haben wir an die 1706 gedruckte Abhandlung zu knüpfen. In ihr erscheint[4]) das Differenzenzeichen Δ, ohne freilich, wie wir (S. 358) bemerkt haben, damals schon Nachahmung zu finden.

Die Abhandlungen der beiden Brüder waren nunmehr der Oeffentlichkeit übergeben. Jakob Bernoulli war todt und konnte nichts mehr sagen. Johann Bernoulli hatte die Drucklegung seiner Abhandlung, sei es unabsichtlich, sei es absichtlich, sich verzögern sehen oder verzögern lassen; er wünschte jedenfalls nicht ihr eine Selbstberichtigung auf dem Fusse nachzuschicken, mochte das Studium der brüderlichen Auflösung ihn auch misstrauisch gemacht oder gar überzeugt haben. Da kam 1715 die Methodus Incrementorum von Brook Taylor und in ihr, wie (S. 369) im Vorübergehen bemerkt worden ist, eine Behandlung der isoperimetrischen Aufgabe[5]). In Hilfssätzen, welche der eigentlichen Auflösung vorangehen[6]), ist das Princip des Statthabens in kleinsten Curventheilchen, was von der ganzen Curve verlangt wurde, und die Berücksichtigung von vier gleich weit von einander abstehenden Punkten der Abscissenaxe und den zugehörigen Ordinaten beim Uebergang zu unendlich kleinen Abmessungen erörtert.

[1] Joh. Bernoulli *Opera* I, 424 und wiederholt im ganzen Aufsatze.
[2] Ebenda II, 241: *On appelle ici fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.*
[3] Ebenda III, 174. [4]) Ebenda I, 426: *en prenant Δ pour le signe ou la caractéristique des différences des fonctions.* [5]) *Methodus Incrementorum* Propositio XVII, Problema XII, pag. 68—70. [6]) Ebenda Lemma III und Lemma IV pag. 67—68.

Sodann ist die Aufgabe auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung zurückgeführt. Keiner der beiden Brüder Bernoulli ist mit Namen erwähnt, aber man kann wohl sagen, Taylor wiederhole die Auflösung Jakobs in zusammengezogener, wenn auch kaum weniger durchsichtiger Form und widerlege dadurch Johann. Das war eines von den Dingen, durch welche Taylor den Aerger von Johann Bernoulli erregte, und welche, wie wir wissen (S. 369), einen leidenschaftlich geführten Streit zwischen beiden entfachten. Bezüglich der Bernoullischen Reihe war ja, wie wir damals hervorhoben, der, nach welchem sie nachmals benannt wurde, im Recht, nicht so bezüglich der isoperimetrischen Aufgabe, und das wurmte den überaus empfindlichen Gelehrten auf's Schmerzlichste.

Jetzt gab er in den Abhandlungen der Académie des Sciences von 1718 eine neue Arbeit über den Gegenstand in die Oeffentlichkeit[1]), dieselbe Arbeit, aus welcher wir oben die Definition des Wortes Function erwähnt haben, dieselbe Arbeit, von welcher schon (S. 232) ankündigend die Rede war. Johann Bernoulli erklärte hier, er habe, durch einen Freund darauf aufmerksam gemacht, dass seine erst nach des Bruders Ableben erfolgte Veröffentlichung seiner eigenen Auflösung der isoperimetrischen Aufgabe missdeutet werden könne, als habe er sie nur aus Angst vor sachgemässer Beurtheilung zurückgehalten, diese Auflösung noch einmal gründlich geprüft. Bei genauer Ueberlegung habe er einen Fehler darin entdeckt. Diesen einzugestehen sei Ehrensache für ihn, und somit übergebe er jetzt die verbesserte Methode der Oeffentlichkeit. Man werde seine Darstellung kürzer und klarer als die Jakob Bernoulli's von 1701 finden, sicherlich auch klarer als die Taylor's, der im Bestreben zu kürzen und deutlich zu sein, so viel Dunkelheit über den Gegenstand verbreitet habe, dass man glauben sollte, diese mache ihm Vergnügen.

Hier schliesst sich sehr naturgemäss der Bericht über einen anderen von Taylor behandelten Gegenstand an, dessen wir (S. 367) vorgreifend mit kurzer Ankündigung gedachten. In einem Lemma[2]) macht Taylor die Bemerkung, der Differentialgleichung, die in heutiger Schreibweise $4x^3 - 4x^2 = (1+z^2)^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2$ heisst, entspreche das Integral $x = \frac{1+z^2}{(az+\sqrt{1-a^2})^2}$. Eine Begründung dieser Behauptung giebt er an der betreffenden Stelle nicht.

Heute würde man die Integration etwa folgendermassen vollziehen. Man würde zunächst $\frac{\pm dx}{2x\sqrt{x-1}} = \frac{dz}{1+z^2}$ folgern und daraus

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* II, 235—269. [2]) *Methodus Incrementorum* pag. 17 Lemma I.

$$\operatorname{arctg}(\pm\sqrt{x-1}) = \operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} C.$$

Geht man dann unter Benutzung der Formel

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta}$$

auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zur Tangente über, so entsteht $\pm\sqrt{x-1} = \frac{C+z}{1-Cz}$ und durch Quadrirung

$$x = 1 + \left(\frac{C+z}{1-Cz}\right)^2 = \frac{(1+C^2)(1+z^2)}{(1-Cz)^2}.$$

Giebt man aber der Constanten die neue Gestalt $C = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$, so geht die Gleichung in die von Taylor angegebene über.

Taylor selbst integrirt an einer späteren Stelle[1]) mittels eines Kunstgriffes, der einigermassen an den erinnert, dessen sich Johann Bernoulli 1697 bei der Bernoulli'schen Differentialgleichung (S. 223), dessen sich auch Jakob Bernoulli 1701 (S. 435) bediente. Er setzt nämlich $x = v^\vartheta . y^\lambda$ und hält die beiden Constanten ϑ und λ, sowie die Veränderliche v zu freier Verfügung. Benutzen wir zur Abkürzung bestrichelte Buchstaben, um die Differentiirung nach z anzudeuten, so ergiebt sich

$$\frac{dx}{dz} = x' = \vartheta v^{\vartheta-1} y^\lambda v' + \lambda v^\vartheta y^{\lambda-1} y' = v^{\vartheta-1} y^{\lambda-1}(\vartheta y v' + \lambda v y')$$

und in Folge davon auch $x'^2 = v^{2\vartheta-2} y^{2\lambda-2}(\vartheta y v' + \lambda v y')^2$. Setzt man diesen Werth ebenso wie $4x^3 = 4v^{3\vartheta} y^{3\lambda}$ und $4x^2 = 4v^{2\vartheta} y^{2\lambda}$ in die ursprüngliche Differentialgleichung $4x^3 - 4x^2 = (1+z^2)^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2$ ein, so entsteht

$$4v^{3\vartheta} y^{3\lambda} - 4v^{2\vartheta} y^{2\lambda} = (1+z^2)^2 v^{2\vartheta-2} y^{2\lambda-2} (\vartheta y v' + \lambda v y')^2.$$

Division durch $v^{2\vartheta-2} y^{2\lambda-2}$ bringt dann

$$(1+z^2)^2 (\vartheta y v' + \lambda v y')^2 = 4v^{\vartheta+2} y^{\lambda+2} - 4v^2 y^2$$

hervor. Taylor macht nunmehr drei Annahmen. Er setzt erstens $v = 1 + z^2$. Diese Annahme gestattet ihm rechts vom Gleichheitszeichen durch v^2, links durch $(1+z^2)^2$ zu dividiren und ausserdem das links auftretende v' durch $2z$ zu ersetzen. Er gelangt also zu $(2\vartheta yz + \lambda v y')^2 = 4v^\vartheta y^{\lambda+2} - 4y^2$. Die zweite Annahme ist $\lambda = -2$. Diese verwandelt die Gleichung weiter in $v^\vartheta - y^2 = (\vartheta yz - vy')^2$ oder in $v^\vartheta = y^2 + \vartheta^2 z^2 y^2 - 2\vartheta yzvy' + v^2 y'^2$. Endlich drittens wird $\vartheta = 1$ gesetzt. Die ursprüngliche Substitution $x = v^\vartheta y^\lambda$ heisst also eigentlich $x = \frac{1+z^2}{y^2}$ und ihr Ergebniss ist

$$v = (1+z^2) y^2 - 2yzvy' + v^2 y'^2 = vy^2 - 2yzvy' + v^2 y'^2.$$

---

[1]) *Methodus Incrementorum* pag. 26–27.

Hier wird wieder durch v dividirt, so dass endlich

$$1 = y^2 - 2yzy' + vy'^2$$

entsteht, mit der einmaligen Abkürzung $v = 1 + z^2$. Die ganze Rechnung hat mithin keine Integration der vorgelegten Differentialgleichung, sondern nur eine Umformung derselben bewirkt. Jetzt kommt Taylor, man begreift nicht wieso, auf den Gedanken, die umgeformte Differentialgleichung neuerdings nach z zu differentiiren, wobei er wiederholt, wie schon oben, $v' = 2z$ setzt. Er erhält

$$2y''(vy' - zy) = 0$$

und diese Gleichung erfüllt sich unter zwei Voraussetzungen. Die erste ist $vy' - zy = 0$, $y' = \frac{zy}{v}$. Einsetzung dieses Werthes in

$$1 = y^2 - 2yzy' + vy'^2$$

bringt

$$1 = y^2 - \frac{2y^2z^2}{v} + v \cdot \frac{y^2z^2}{v^2} \quad \text{oder} \quad v = vy^2 - z^2y^2 = (v - z^2)y^2 = y^2,$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{v} \quad \text{und} \quad x = \frac{v}{y^2} = 1,$$

eine singuläre Lösung, wie Taylor sich ausdrückt[1]). Die zweite Voraussetzung ist $y'' = 0$, $y' = a$. Die Einsetzung dieses Werthes in die vorgelegte Differentialgleichung bringt $1 = y^2 - 2yza + va^2$ hervor, oder, da $v = 1 + z^2$, auch

$$1 - a^2 = y^2 - 2azy + a^2z^2 = (y - az)^2.$$

Mithin ist

$$y = az + \sqrt{1 - a^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{v}{y^2} = \frac{1 + z^2}{y^2} = \frac{1 + z^2}{(az + \sqrt{1 - a^2})^2}$$

in Uebereinstimmung mit dem früher Behaupteten. Bei Taylor heisst es allerdings an beiden Stellen, wo das Integral genannt ist,

$$x = \frac{1 + z^2}{(a + \sqrt{1 - a^2} . z)^2}$$

in Folge eines offenbaren Rechenfehlers, und wir nehmen keinen Anstand, das richtige Ergebniss als seinen Absichten entsprechend hineinzuverbessern. Einen Rechenfehler wird man freilich annehmen müssen, da zweimaliges durch viele Seiten getrenntes Auftreten ein und desselben Druckfehlers kaum zu vermuthen sein dürfte. Aber gleichviel! Wichtiger als das bei Taylor irrig angegebene Integral ist das andere $x = 1$. Wenn auch Taylor sich über die ganze Tragweite dieser seiner Bemerkung kaum klar gewesen sein wird, da er sie sonst stärker betont hätte, so hat er doch das unzweifelhafte Ver-

---

1) *Methodus Incrementorum* pag. 27: *quae est singularis quaedam solutio Problematis.*

dienst sich erworben, die singulären Lösungen und deren Ermittelung durch abermalige Differentiation einer Differentialgleichung entdeckt zu haben.

Das nächste Problem, mit dessen Geschichte wir uns zu beschäftigen haben, ist das der Trajectorien. Die Aufgabe stand (S. 222) seit 1697 auf der Tagesordnung der Veröffentlichungen Johann Bernoulli's. Im darauf folgenden Jahre gab er ihr zwar erst in den A. E. ihren Namen, aber 1697 hat er schon ausgesprochen, was er 1698 wiederholte, diese Aufgabe finde eine wichtige Anwendung bei der Bestimmung der Bahn des Lichtes in einem ungleich dichten Mittel, wenn man mit Huygens voraussetze, der Lichtstrahl sei nichts anderes als eine Linie, welche Wellen rechtwinklig durchschneide[1]. Wir rufen weiter in's Gedächtniss zurück (S. 233), dass Jakob Bernoulli 1698 die Aufgabe der rechtwinkligen Trajectorie für logarithmische Curven löste[2], aber er liess sich daran genügen, eine Construction der gesuchten Curve kennen zu lehren, ohne die Aufgabe auf eine Differentialgleichung zurückzuführen. Das that Johann Bernoulli in dem erwähnten Aufsatze von 1698. Er berief sich dabei auf Briefe an und von Leibniz. Letzterer habe die Auffindung der Trajectorie eine Eliminationsaufgabe zwischen zwei Gleichungen genannt. Die eine Gleichung sei die der geschnittenen Curvenschaar und enthalte eine Grösse b, welche in jeder einzelnen Curve constant, von einer Curve der Schaar zur anderen veränderlich sei. Die andere Gleichung gebe $\frac{dy}{dx}$ für die Trajectorie mittels der Bedingung, dass diese auf irgend einer der geschnittenen Curven senkrecht stehe. Eliminire man b zwischen beiden Gleichungen, so erhalte man die Differentialgleichung erster Ordnung der Trajectorie. Aus $y^2 = 2bx$ z. B. finde er, dass $b = -y\frac{dx}{dy}$ der Bedingung der Perpendicularität entspreche, und dieser Werth von b in die Parabelgleichung eingesetzt gebe $y^2 = -2xy\frac{dx}{dy}$ als Differentialgleichung der Trajectorie. Deren Integral sei $a^2 - x^2 = \frac{1}{2}y^2$, folglich genügen unendlich viele Ellipsen der Aufgabe[3]. Johann Bernoulli erweiterte dann im weiteren Verlaufe seines Aufsatzes[4] die Aufgabe dahin, dass er verlangte die Trajectorie zu finden, welche irgend eine Curve, die in ihrer Ebene um einen gegebenen Punkt in Drehung versetzt sei, stets unter irgend einem gegebenen Winkel schneide. Von da an trat die Aufgabe bis 1715 in den Hintergrund.

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 193 und 267. [2]) Jac. Bernoulli *Opera* II, 806—813. [3]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 268. [4]) Ebenda I, 272.

Wir erinnern uns (S. 309) des Briefes, welchen Leibniz damals im Eifer des Prioritätsstreites an Conti richtete. In der Nachschrift[1]) bat Leibniz jenen eigenthümlichen Vermittler, er möge den englischen Analysten, um ihnen einmal an den Puls zu fühlen, die Aufgabe vorlegen, eine Curve zu finden, welche eine bestimmte Schaar anderer Curven, z. B. alle Hyperbeln von gleichem Mittelpunkte und gleichem Scheitel, rechtwinklig schneide, und zwar solle dabei ein allgemein genügender Weg eingeschlagen werden.

Die englischen Analysten überhaupt waren von Leibniz genannt, aber Newton war unzweifelhaft gemeint, und diesem stellte Conti die ganze Nachschrift mit der in ihr enthaltenen Aufgabe zu. Man erzählte sich in England, und Fontenelle hat die Erzählung 1727 in seine Lobrede auf den Verstorbenen aufgenommen[2]), dass Newton die Aufgabe um 4 Uhr erhielt, als er ermüdet aus der Münze nach Hause kam, und dass er sie noch vor Schlafengehen gelöst habe. Jedenfalls ist Newton's Auflösung ohne Verfassernamen bereits in den P. T. von 1716 gedruckt[3]).

Auf Leibnizens briefliche Aufforderung geht Newton dabei mit keiner Silbe ein. Es ist, als wenn sie für ihn nicht vorhanden wäre. Dagegen spricht er in der Einleitung des kurzen Aufsatzes von Johann Bernoulli's Veröffentlichung in den A. E. vom October 1698, von welcher Kenntniss genommen zu haben er damit eingesteht. Er kannte also auch das, was dort aus einem Leibnizischen Briefe abgedruckt war. Diesen Umstand im Auge behaltend übersetzen wir, was Newton als seine Auflösung der Aufgabe veröffentlichte, ein allgemeines Verfahren anzugeben, nach welchem eine Reihe von Curven gefunden werden könne, welche eine andere Reihe von Curven in einem entweder constanten und gegebenen oder nach einem gegebenen Gesetze veränderlichen Winkel schneide. Wir erlauben uns bei der Uebersetzung die einzige Veränderung, dass wir die zu schneidenden Curven kurzweg als Curven, die durch sie hindurchgehenden als Trajectorien benennen. Wir glauben dadurch an Kürze und Deutlichkeit zu gewinnen.

Die Natur der Curven, sagt also Newton, giebt ihre Tangenten in den Schnittpunkten. Die Winkel beim Durchschnitte geben die Normalen zu den Trajectorien. Das Zusammentreffen zweier nächsten Normalen giebt den Krümmungsmittelpunkt der Trajectorie in jedem Schnittpunkte. Man ziehe nun eine passend gewählte Abscissenaxe und wähle ihre Fluxion als Einheit. Die Lage der Normalen an die

[1]) *Recueil Des Maizeaux* II, 11. [2]) *Histoire de l'Académie des Sciences.* Année 1727 (Histoire pag. 168). [3]) Sie ist auch abgedruckt in *Opuscula Newtoni* I, 293—294.

Curve giebt die erste Fluxion der Ordinate der Trajectorie. Deren Krümmungshalbmesser giebt die zweite Fluxion derselben Ordinate, und so wird die Aufgabe immer auf eine Gleichung zurückgeführt.

Wenn zwischen dieser Schilderung des einzuschlagenden Verfahrens und dem, was Johann Bernoulli aus Leibnizens Brief abdrucken liess, verglichen wird, so finden wir zwischen beiden Verfassern erstens den Unterschied, dass Newton, ohne ein bestimmtes Beispiel zu erörtern, sich in allgemeinen Redensarten ergeht, während Leibniz wenigstens das eine Beispiel der Ellipsen angab, welche alle Parabeln, deren Scheitel im gemeinsamen Mittelpunkte der Ellipsen liegen, und deren Axe mit der grossen Axe der Ellipsen zusammenfällt, senkrecht schneiden, beigefügt hat. Ein zweiter Unterschied besteht darin, dass Leibniz die für den Fall, dass die Gleichung der zu schneidenden Curven in endlicher Form gegeben ist, unzweifelhaft richtige Behauptung aussprach, die Aufgabe der Trajectorie führe zu einer Differentialgleichung erster Ordnung, während Newton an eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gedacht zu haben scheint, wenn nicht der Krümmungsmittelpunkt und die zweite Fluxion ausschliesslich zu dem Zwecke erwähnt wurden, um nicht gar zu wörtlich mit Leibniz zusammenzutreffen.

Die Meinung, Newton habe an eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gedacht, ist indessen nicht ganz von der Hand zu weisen. Fatio de Duillier hat (S. 279) auf Krümmungshalbmesser, d. h. auf zweite Fluxionen, zurückgeführt, was mit ersten Fluxionen zu bewältigen war. Fatio war vielleicht, wie wir im 94. Kapitel sahen, damals nicht unbeeinflusst durch Newton. Sollte Newton überhaupt die Neigung besessen und in ihm nahe stehenden Gelehrten die gleiche Neigung angeregt haben, zum Krümmungshalbmesser seine Zuflucht zu nehmen, auch wo die Aufgabe nicht von selbst darauf hinwies? Sollte Taylor unter diesem Einflusse gestanden haben, als er (S. 442) die Differentiation einer Differentialgleichung versuchte und fast zufällig die singulären Lösungen entdeckte? Wir halten diese Fragen für gestattet, wenn auch deren Beantwortung nicht in unserer Absicht liegt, und wenn wir auch eine andere Erklärung für Newton's Ausdrucksweise noch vermuthen, auf die wir später zurückkommen.

Newton hat noch einen kleinen Zusatz bei seiner Veröffentlichung, dem zu Liebe wir abermals zu dem Aufsatze von Johann Bernoulli von 1698 zurückkehren müssen. Nachdem dieser die schon von uns berücksichtigte allgemeine Auffassung Leibnizens nebst dessen Beispiel von den durch Ellipsen geschnittenen Parabeln mitgetheilt hat, fügt er hinzu, er selbst habe die Aufgabe erweitert und sei zu deren allgemeinen Differentialgleichung gelangt. Ob in dieser die Veränder-

lichen sich trennen lassen oder nicht, sei eine andere Aufgabe und nicht in dem Rahmen dieser, sondern einer anderen Untersuchung zu besprechen[1]). Fast in wörtlicher Uebereinstimmung damit sagt Newton in einem den Schluss bildenden Scholium: „Die Umformung der Gleichungen und die Trennung der Veränderlichen womöglich in geschlossener Gestalt[2]), wo nicht durch unendliche Reihen, bildet eine andere Untersuchung. Die hier behandelte Aufgabe blieb, da sie kaum irgend welchen Nutzen besitzt, mehrere Jahre unbeachtet und ungelöst in den A. E. Aus dem gleichen Grunde verfolge ich ihre Auflösung nicht weiter.“

Hier ist die letzte Gelegenheit, bei welcher wir die Namen der beiden grossen Nebenbuhler Leibniz und Newton gemeinschaftlich in Beziehung auf eine und dieselbe wissenschaftliche Leistung zu nennen haben, und hier werden wir deshalb vielleicht am zweckmässigsten unser Urtheil über beide einschalten. Wir beabsichtigen selbstverständlich keine Abschätzung von massgebender Giltigkeit. Wir erheben nicht den Anspruch, unsere Leser zu dem genau gleichen Urtheil bestimmen zu wollen, welches wir fällen, wir wollen nur nicht den Anschein haben, ein vergleichendes Urtheil vermieden zu haben. Vielleicht wäre zwar ein solches Vermeiden das Klügste. Newton und Leibniz sind so hoch über den gewöhnlichen Menschenschlag sich erhebende Geister gewesen, dass man sich die Freude darüber, dass sie beide lebten, nicht durch ängstliches Gegeneinanderhalten dessen, was jeder von ihnen leistete, verkümmern sollte. Beide haben so viel in die Wagschalen menschlicher Fortschritte eingeworfen, dass es kaum darauf ankommt, welche Seite die schwerer belastete erscheint. Und dann wieder sind ihre Leistungen so ungemein verschiedenartig gewesen, dass auch daran das Urtheil zu scheitern droht. Wer wagt es zu entscheiden, ob Michel Angelo oder Beethoven der titanischere Künstler gewesen ist? Weit getrennt, wenn auch nicht ganz so weit wie bildende Kunst und Musik, liegen die Gebiete, auf welchen Leibniz und Newton ihre Lorbeeren pflückten. Wir haben hier nicht von dem Physiker, dem Astronomen Newton zu reden, nicht von dem Philosophen, dem Geschichtsforscher, dem Diplomaten, dem alles menschliche Wissen gierig und nie erfolglos in sich aufnehmenden Leibniz, wiewohl auch die Grösse der bearbeiteten Felder neben der Tiefe, bis zu welcher eingedrungen wurde, in Betracht gezogen werden darf, wir reden nur von den mathematischen Leistungen des Einen wie des Anderen, und wir müssen suchen, uns dabei von

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 269: *non enim hujus, sed alius est methodi indeterminatas separare.* [2]) *absolute.*

einem Einflusse frei zu halten, der geschichtlich für die Höherschätzung Newton's unzweifelhaft gewirkt hat, von dem Einflusse der Zeitfolge. Newton's bahnbrechende Arbeiten erschienen später als die Leibnizens. Sie wirkten begeisternd, als man jenen gegenüber schon zu vergessen anfing, dass es eine Zeit gab, wo man ohne sie sich behelfen musste, und auch unsere Leser haben sich vielleicht diesem Eindrucke nicht zu entziehen vermocht. Ferner war Newton mathematisch vielseitiger als Leibniz. In der Reihenlehre steht er kaum von diesem erreicht, in der Lehre von den Gleichungen und der Geometrie überhaupt unerreicht über allen seinen Zeitgenossen. Leibnizens Grösse ist die analytische Form, beginnend mit der Combinatorik, gipfelnd in der Erfindung des Differential- und Integralzeichens, ohne welche keine Differential- und Integralrechnung entstanden wären. Newton hat diese Bedeutung der Form nie verstanden. Man möchte sich dafür grade auf seine Versuche, das inverse Tangentenproblem zu lösen, berufen. Integration durch Reihen war für Newton der Stein der Weisen, das allgemeine Lösungsmittel, während Leibniz als höchstes Ziel die Integration in geschlossener Form vor sich sah. Es ist ja wahr, dass unsere Zeit sich mehr auf Newton's Seite zu stellen gewöhnt hat, aber die heutigen und die damaligen Forschungswege sind so grundsätzlich verschieden, dass man es einem damals betretenen Pfade nicht als Verdienst anrechnen kann, dass er den heutigen Weg kreuzt. Die Integration in geschlossener Form musste geschichtlich vorausgehen, und Leibniz hat den Zugang dazu geebnet. Newton hat Schriften hinterlassen, an welche da und dort nach fünf Vierteljahrhunderten wieder angeknüpft werden konnte. Leibniz hat es möglich gemacht, dass überhaupt Mathematiker da waren, welche diese Anknüpfung versuchten.

Wir kehren zu den Trajectorien zurück. Leibniz hat (S. 444) jene Aufgabe für Newton nicht ganz ohne befreundeten Rath gestellt. Ende December 1714 schrieb Leibniz an Johann Bernoulli, er denke daran, mit etwas herauszurücken, wobei Newton's Quelle verstopft sein werde[1]). Bernoulli billigte dieses Vorhaben am 6. Februar 1715 und schlug vor[2]), etwa solche Curven zu wählen, bei welchen die *Differentiatio de curva in curvam* (S. 222) in Betracht komme; auch die Complanation krummer Oberflächen liefere Brauchbares, und hier ist die Stelle, auf welche (S. 402) hingewiesen wurde, um das Vorkommen der rechtwinkligen Raumcoordinaten bei Johann Bernoulli mit einem Beispiele zu belegen. In einem anderen Briefe vom

[1]) Leibniz III, 934: *Dabo etiam operam, ut quaedam edam, in quibus Newtono aquam haerere scio.* [2]) Ebenda III, 937—938.

23. November 1715 schlug Bernoulli die Trajectorienaufgabe als geeignet vor[1]), und im December 1715 theilte Leibniz dem Freunde endlich mit, in welcher Form er die Trajectorienaufgabe an Conti schicke[2]). Kaum war der Brief in Johann Bernoulli's Händen, so beantwortete er ihn am 15. Januar 1716 unter Einsendung einer Auflösung des besonderen Beispiels von den Hyperbeln[3]), welche von seinem damals 21jährigen Sohne Niclaus II. Bernoulli herrührte. Er machte zugleich auf die Nothwendigkeit aufmerksam, ein schwierigeres Einzelbeispiel auszuwählen als das der Hyperbeln, wozu er alsdann am 11. März Vorschläge machte[4]). Der Aufsatz von Niclaus II. Bernoulli erschien[5]) im Maihefte 1716 der A. E. und kommt auf Folgendes hinaus.

Sei (Figur 67) O der Mittelpunkt, A der Scheitel der Hyperbeln AC, AD, AG, welche durch die Trajectorie CDG senkrecht geschnitten werden, d. h. das Trajectorienelement CD steht senkrecht auf der Hyperbeltangente CF, und das unendlich kleine Dreieckchen CSD mit den Katheten $CS = -dy$, $SD = dx$ ist ähnlich dem Dreieck FEC mit den Katheten $FE = x$ und $EC = y$. Dabei wurde $CS = -dy$ gesetzt, weil die Ordinate der Trajectorie abnimmt, während ihre Abscisse wächst. Daher muss $\frac{FE}{y} = -\frac{dy}{dx}$ sein, $FE = -y\frac{dy}{dx}$,

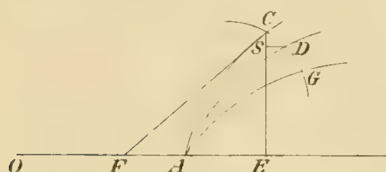


Fig. 67.

$$OF = OE - FE = x + y\frac{dy}{dx} = \frac{xdx + ydy}{dx}$$

und

$$OF \,.\, OE = \frac{x^2dx + xydy}{dx}.$$

Bei der Hyperbel findet aber die Proportion statt $OF : OA = OA : OE$. Demnach ist $OF \,.\, OE = OA^2 = a^2$ und die Differentialgleichung der Trajectorie ist $\frac{x^2dx + xydy}{dx} = a^2$, beziehungsweise

$$ydy = \frac{a^2 - x^2}{x}dx = a^2\frac{dx}{x} - xdx.$$

Die Integration liefert

$$y^2 \pm b^2 = 2a^2 \log x - x^2 \quad \text{oder auch} \quad x^2 + y^2 \pm b^2 = \log(x^{2a^2})$$

und mit n als Grundzahl des Logarithmensystems $n^{x^2 + y^2 \pm b^2} = x^{2a^2}$.

Nach dem jungen Niclaus II. Bernoulli trat Jakob Hermann im August 1717 in den A. E. mit einem Aufsatze über rechtwink-

[1]) Leibniz III, 949. [2]) Ebenda III, 952. [3]) Ebenda III, 954. [4]) Ebenda III, 958. [5]) Er ist auch abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* II, 270—272.

lige Trajectorien hervor, und schickte 1718 und 1719 noch Nachträge nach[1]. Er stellte eine Regel auf, welche er zwar nicht ableitete, deren Begründung aber sehr nahe liegt. Sei $F(x, y, c) = 0$ die Schaar der zu schneidenden Curven, welche durch die von einer Curve zur anderen ihren Werth ändernde Constante c sich kennzeichnen. Hermann nannte dieses c den Modulus der Curven, während Leibniz es einst (S. 204) als Parameter der Curven benannt hatte. Die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührungslinie an eine geschnittene Curve mit der Abscissenaxe einschliesst, ist die entgegengesetzt genommene Cotangente des Winkels, den die Berührungslinie an die Trajectorie im Schnittpunkte mit der Abscissenaxe bildet. Ist daher $y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ die ersterwähnte trigonometrische Tangente, so hat der zweitgenannte Winkel $\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ als seine Tangente. Anders ausgesprochen besagt dieses: aus der Differentialgleichung der geschnittenen Curve $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$ folge die Differentialgleichung $\frac{\partial F}{\partial y} dx = \frac{\partial F}{\partial x} dy$ der Trajectorie, sofern die Gleichung $F(x, y, c) = 0$ der geschnittenen Curven noch Beachtung findet, um c zu eliminiren. Hermann drückte nun diese Vorschrift folgendermassen aus. Man solle die Differentialgleichung der geschnittenen Curven

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0\right)$$

bilden; man solle in ihr dx durch dy und dy durch $-dx$ ersetzen $\left(\frac{\partial F}{\partial x} dy - \frac{\partial F}{\partial y} dx = 0\right)$; man solle aus der letzteren Gleichung c ermitteln und in die Curvengleichung $(F(x, y, c) = 0)$ einführen, alsdann habe man die Differentialgleichung erster Ordnung der Trajectorie. In dem Hyperbelbeispiele ist die Ausführung folgende: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$ oder $a^2y^2 = c^2(x^2 - a^2)$; $a^2ydy = c^2xdx$; $-a^2ydx = c^2xdy$:

$$c^2 = -\frac{a^2ydx}{xdy}; \quad a^2y^2 = -\frac{a^2ydx}{xdy}(x^2 - a^2)$$

oder $ydy = a^2\frac{dx}{x} - xdx$, beziehungsweise durch Integration

$$x^2 + y^2 + b^2 = 2a^2 \log x,$$

wie Niclaus II. Bernoulli gefunden hatte.

[1] Hermann's Aufsätze sind abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* II, 275—279; 279—281; 299—305.

Die Regel drückt unzweifelhaft viel klarer Leibnizens Meinung aus, als dessen eigene Worte (S. 443) es thaten, aber es blieb und bleibt die Leibnizische Regel. Daher hat es geschichtlich keine grosse Bedeutung, dass neben Hermann, wahrscheinlich sogar vor Hermann, auch Niclaus I. Bernoulli zu derselben Formulirung gelangte, die er zwar nicht sogleich veröffentlichte, aber doch seinem Oheim Johann Bernoulli mittheilte. So erzählt Niclaus II. Bernoulli in einem die Geschichte der Trajectorienuntersuchungen ausführlich erörternden Aufsatze im Junihefte 1718 der A. E.[1])

Hermann rechnete noch drei weitere Beispiele, auf deren letztes er durch De Montmort hingewiesen worden war. Es stammte aber nicht von diesem selbst her, sondern hatte, was Hermann nicht wusste, einen anderen Ursprung. Johann Bernoulli hatte (S. 448) unter dem 11. März 1716 Leibniz eine schwierigere Trajectorienaufgabe zur Verfügung gestellt, um die Engländer sich daran ihre Zähne ausbeissen zu lassen, und diese Aufgabe war in der That nach London abgegangen, wenn wir auch nicht wissen durch wessen Vermittelung, war nicht minder Niclaus I. Bernoulli, damals Professor in Padua, mitgetheilt worden, und durch diesen an De Montmort gelangt.

Die Aufgabe selbst ist folgende (Figur 68). Ueber AG als Abscissenaxe sind Curven ABD gezeichnet, welche alle durch Punkt A hindurchgehen und die Eigenschaft besitzen, dass ihre Krümmungshalbmesser, z. B. BO, durch die Axe in constantem Verhältnisse geschnitten werden, d. h. so, dass $BO : BC = 1 : n$. Man sucht die Trajectorie EBF jener Curven. Sollte Newton auch diese Aufgabe gekannt haben, als er 1716 seine kurze Notiz in die P. T. gab? Das ist die Vermuthung, auf welche wir (S. 445) anspielten, und welche das Betonen von Krümmungshalbmessern in seiner Notiz rechtfertigen würde, ohne freilich den Vorwurf zu entkräften, er sei über allgemeine Redensarten nicht hinaus gegangen.

Fig. 68.

Wohl aber that dieses Brook Taylor, der ungefähr gleichzeitig mit Hermann sich mit der Aufgabe beschäftigte, und da in seiner Veröffentlichung in den P. T. von 1717[2]) die Gleichung der Curven

[1]) Der Aufsatz ist abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* II, 286—298. Die hier angeführte Stelle auf II, 297. [2]) Taylor's Aufsatz ist abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* II, 281—285.

ABD, deren Trajectorie nachher gesucht werden muss, hergeleitet ist, während Hermann sich damit begnügte, sie einfach hinzuschreiben, so folgen wir hier Taylor mit dem wiederholt ausgesprochenen Vorbehalte, von seiner Bezeichnung der Fluxionen keinen Gebrauch zu machen. Die einzelnen Stücke der Figur heissen $AH = z$, $HB = x$, Bogen $AB = v$. Dann ist, sagt Taylor, $BC = \frac{x\,dv}{dz}$ und $BO = \frac{dx \cdot dv}{d^2z}$ unter der Voraussetzung gleichförmiger Veränderung von v, oder, wie wir heute sagen, wenn v die unabhängige Veränderliche ist. Das waren damals allbekannte Formeln, und die für den Krümmungshalbmesser z. B. konnte Jeder aus De L'Hospital's in allen Händen befindlichen Analyse des infiniment petits entnehmen[1]. Um unseren Lesern die Prüfung zu erleichtern, leiten wir den heute wenig üblichen Werth in Kürze ab. Die gewöhnliche Formel $\varrho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ kann man doch auch schreiben $\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{dy'}{dx}}$. Aber $y' = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}$ und $\frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{ds}}{\frac{dx}{ds}}$.
Nun ist

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}, \quad \text{folglich} \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^3}$$

und

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}\right)^3}{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{1}{\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}}.$$

Ferner folgt aus der bekannten Gleichung $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$, dass

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dy}{ds}} \frac{d^2x}{ds^2}$$

und

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{\frac{dy}{ds}} \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}.$$

Mithin ist $\varrho = -\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{d^2x}{ds^2}}$ oder unter Anwendung von Differentialen statt der Differentialquotienten $\varrho = -\frac{dy \cdot ds}{d^2x}$. Schreibt man z, x, v an

[1]) *Analyse des infiniment petits* pag. 78 vorletzte Zeile.

Stelle von x, y, s und zieht einzig den absoluten Werth des Krümmungshalbmessers in Betracht, so erscheint das von Taylor benutzte $BO = \frac{dx.dv}{d^2z}$. Die gegebene Bedingung $n.BO = BC$ nimmt dadurch die Gestalt an $ndxdz = xd^2z$, und das Integral dieser Gleichung ist (immer unter der Voraussetzung von v als der unabhängigen Veränderlichen) $x^{-n}dz = \alpha^{-n}dv$ mit $\alpha^{-n}dv$ als Integrationsconstante, wovon man sich durch Differentiation überzeugen kann. Taylor wünscht dv aus der Gleichung zu entfernen. Er quadrirt diese deshalb und ersetzt alsdann dv^2 durch $dx^2 + dz^2$. So gelangt er zur Differentialgleichung $x^{-2n}dz^2 = \alpha^{-2n}(dx^2 + dz^2)$ der geschnittenen Curven, welche sich leicht umformt in $dz = \frac{x^n dx}{\sqrt{\alpha^{2n} - x^{2n}}}$. Der zweite Theil der Aufgabe sucht die Trajectorie zu den Curven, deren Differentialgleichung im ersten Theile ermittelt worden war. Aus der noch nicht von dv befreiten Gleichung $x^{-n}dz = \alpha^{-n}dv$ folgt die Proportion $dv : dz = \alpha^n : x^n$. Nun war $BC = \frac{xdv}{dz}$, $BH = x$, mithin ist auch $dv : dz = BC : BH$ und $BC : BH = \alpha^n : x^n$. Betrachtet man $AH = z$, $BH = x$ als Coordinaten der Curve EBF, deren Bogen $EB = r$ heissen mag, und welche die BC als Berührungslinie besitzt, so verhält sich $dr : -dx = BC : BH$, und $\frac{x^n}{\alpha^n} = -\frac{dx}{dr}$ ist eine Differentialgleichung der Trajectorie mit r als unabhängiger Veränderlichen. Oben war $dz = \frac{x^n dx}{\sqrt{\alpha^{2n} - x^{2n}}}$, und eine Reihenentwicklung (so behauptet Taylor, ohne der Art der Entwicklung ein weiteres Wort zu widmen) führt zu $\frac{dz}{dx} = A\frac{x^n}{\alpha^n} + B\frac{x^{3n}}{\alpha^{3n}} + \cdots$. Durch Integration entsteht daraus $z = \frac{Ax}{n+1}\frac{x^n}{\alpha^n} + \frac{Bx}{3n+1}\frac{x^{3n}}{\alpha^{3n}} + \cdots$. Eine Integrationsconstante erscheint nicht, weil die Voraussetzung gemacht wurde, dass sämmtliche Curven durch A hindurchgehen, dass also zugleich mit $x = 0$ auch $z = 0$ sein muss. In die durch Integration gewonnene Gleichung wird der vorher gefundene Werth $\frac{x^n}{\alpha^n} = -\frac{dx}{dr}$ eingeführt, so dass

$$z = -\frac{Ax}{n+1}\frac{dx}{dr} - \frac{Bx}{3n+1}\frac{dx^3}{dr^3} - \cdots$$

entsteht. Ohne dem r seine Stellung als unabhängige Veränderliche zu verkümmern, führt Taylor eine weitere Veränderliche s mittels der Annahme $-\frac{dx}{dr} = \frac{s^n}{a^n}$ ein, wobei a constant ist. Diese Substitution

bringt zunächst $z = \frac{Ax}{n+1} \cdot \frac{s^n}{a^n} + \frac{Bx}{3n+1} \cdot \frac{s^{3n}}{a^{3n}} + \cdots$ hervor, dann durch Multiplication mit $\frac{s}{x}$ die zweite Gleichung

$$\frac{sz}{x} = \frac{As^{n+1}}{n+1\, a^n} + \frac{Bs^{3n+1}}{3n+1\, a^{3n}} + \cdots.$$

Diese letztere differentiirt Taylor und gelangt zu

$$\frac{xzds + xsdz - szdx}{x^2} = \left(A\frac{s^n}{a^n} + B\frac{s^{3n}}{a^{3n}} + \cdots\right) ds.$$

Die hier auftretende Reihe sieht der vorher benutzten Entwicklung Glied für Glied ähnlich, muss daher $\frac{s^n}{\sqrt{a^{2n} - s^{2n}}}$ als Summe haben, oder es muss sein

$$\frac{xzds + xsdz - szdx}{x^2} = \frac{s^n ds}{\sqrt{a^{2n} - s^{2n}}}.$$

Um das mittels $-\frac{dx}{dr} = \frac{s^n}{a^n}$ eingeführte s wieder wegzuschaffen, muss ebendieselbe Definitionsgleichung Anwendung finden. Sie liefert zunächst

$$\frac{s^n}{\sqrt{a^{2n} - s^{2n}}} = \frac{-\frac{dx}{dr}}{\sqrt{1 - \frac{dx^2}{dr^2}}} = -\frac{dx}{\sqrt{dr^2 - dx^2}} = \frac{dx}{dz},$$

also

$$\frac{xzds + xsdz - szdx}{x^2} = -\frac{dxds}{dz},$$

beziehungsweise $(xdx + zdz)xds + (xdz - zdx)sdz = 0$ und

$$\frac{ds}{s} = \frac{zdx - xdz}{xdx + zdz} \cdot \frac{dz}{x}.$$

Eine fernere Anwendung der Gleichung $-\frac{dx}{dr} = \frac{s^n}{a^n}$ besteht in deren Differentiation nach r. Man erhält dadurch

$$-\frac{d^2x}{dr^2} = \frac{ns^{n-1}}{a^n}\frac{ds}{dr} = \frac{n}{s} \cdot \frac{s^n}{a^n} \cdot \frac{ds}{dr} = -\frac{ndxds}{sdr^2} \text{ und } \frac{ds}{s} = \frac{d^2x}{ndx}.$$

So hat man zwei Werthe von $\frac{ds}{s}$ erhalten, deren Gleichsetzung zu

$$nzdzdx^2 - xzdzd^2x - nxdxdz^2 - x^2dxd^2x = 0$$

führt. Die unabhängige Veränderliche war r. Nach ihr darf man daher $dx^2 + dz^2 = dr^2$ differentiiren und erhält $dxd^2x + dzd^2z = 0$, beziehungsweise $-x^2dxd^2x = x^2dzd^2z$, welcher Werth in der gefundenen Differentialgleichung zweiter Ordnung an Stelle des letzten Gliedes links vom Gleichheitszeichen eingesetzt wird. Dividirt man dann durch $x^{n+1}dz$, so entsteht als neue Form

$$\frac{nz}{x^{n+1}}\,dx^2 - \frac{z}{x^n}\,d^2x - \frac{n}{x^n}\,dxdz + \frac{d^2z}{x^{n-1}} = d\left[-\frac{z}{x^n}\,dx + \frac{dz}{x^{n-1}}\right] = 0.$$

Integrirt man und wählt unter fortwährender Berücksichtigung des Umstandes, dass dr als constant gilt, $\frac{dr}{a^{n-1}}$ als Integrationsconstante, so gewinnt man

$$-\frac{z}{x^n}\,dx + \frac{dz}{x^{n-1}} = \frac{dr}{a^{n-1}},\ \text{beziehungsweise}\ (xdz - zdx)a^{n-1} = x^n dr$$

als Differentialgleichung erster Ordnung der Trajectorie, deren Integration, meint Taylor, ohne bestimmte Annahmen für n zu machen eine keineswegs leichte Aufgabe sei[1]).

Im gleichen Jahre 1717 hat auch Stirling in dem Anhange zu seinem Bändchen *Lineae tertii ordinis* (S. 413) die Hyperbeltrajectorie besprochen[2]). Er gelangte unter Anwendung der Fluxionszeichen, welche wir wieder durch Differentialzeichen ersetzen, zur Gleichung $ydy = \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}\,dx$, von der er behauptet, sie könne nicht integrirt werden, weil offenbar der Ausdruck rechts die Fläche einer Hyperbel von der Gleichung $y = \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$ darstelle. Er will damit offenbar nur sagen, eine Integration durch algebraische Functionen sei unmöglich und lässt $y^2 + (a - x)^2 + k = 2c^2 \log (a - x)$ nicht als ein wirklich ermitteltes Integral gelten.

Wir würden der Trajectorienaufgabe eine unverhältnissmässig grosse Bedeutung verleihen, wenn wir in gleicher Ausführlichkeit weiter berichten wollten, wie Niclaus I. Bernoulli und Niclaus II. Bernoulli in den A. E., Taylor in den P. T. sich fortgesetzt herumstritten. Sämmtlichen Abhandlungen ist Scharfsinn nachzurühmen, insbesondere kommen da und dort geistreiche Versuche vor, eine erste Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu vollziehen, aber methodisches Vorgehen ist grade in letzter Beziehung am wenigsten zu erwähnen.

Johann Bernoulli hat sich ebenfalls mit Differentialgleichungen zweiter Ordnung abgequält und z. B. in einem unter dem 20. Mai 1716 an Leibniz gerichteten Briefe[3]) von dem Integrale einer besonderen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einer Weise gesprochen, welche sicherstellt, dass er es gekannt haben muss, aber wie er dazu gelangt war, sagt er nicht. Es handelt sich um $z^2d^2x = 2xdz^2$. Die heutige Integralrechnung lehrt ihr Integral als

[1]) *Haud proclive est aequationem, manente n in terminis generalibus, revocare ad aequationem Fluentes tantum involventem.* [2]) Stirling, *Lineae tertii ordinis.* Appendix pag. 15—19. [3]) Leibniz III, 961.

$x = \frac{z^2}{a} + \frac{b^2}{3z}$ kennen, mit a und b als Integrationsconstanten. Mittels $b = 0$ entsteht $ax = z^2$, d. h. eine Parabel; mittels $a = \infty$ entsteht $xz = \frac{b^2}{3}$, d. h. eine Hyperbel; ist b von 0 und a von ∞ verschieden, so ist eine Curve dritten Grades vorhanden. Dem entspricht vollständig, was Johann Bernoulli behauptet, wenn er sagt, drei Gattungen von Curven steckten in der Gleichung $z^2 d^2 x = 2x dz^2$, Parabeln, Hyperbeln und gewisse Curven dritten Grades.

Eine Abart der Trajectorienaufgabe ist die der reciproken Trajectorien[1], d. h. solcher Curven, die mit ihren Trajectorien von derselben Art sind. Niclaus II. Bernoulli stellte die Aufgabe am Schlusse einer langen Abhandlung über Trajectorien, welche theils in den A. E. von 1720, theils im VII. Supplementbande der A. E. erschien[2]) und bemerkte dabei, sein Vater, Johann Bernoulli, habe die Aufgabe bereits bewältigt. Eine lange Polemik knüpfte sich auch an dieses Problem, welche von einem englischen Anonymus eröffnet wurde. Johann Bernoulli scheint unter diesem seinen alten Gegner Taylor vermuthet zu haben, was ihn wohl anregte, den Streit in noch bissigerer Weise zu führen, als es ohnedies in seiner Gewohnheit lag. Später erst erfuhr er, dass Pemberton, der Mitarbeiter Newton's an der dritten Ausgabe der Principien (S. 198), jener Anonymus gewesen war. Der abschliessende Aufsatz von Johann Bernoulli[3]) von 1727 erschien erst im IX. Supplementbande der A. E. und würde hier nicht mehr genannt werden dürfen, wenn wir nicht beabsichtigten, die Bemühungen Johann Bernoulli's um die Trajectorien nicht in den folgenden Abschnitt mit hinüber zu nehmen. Als einfachste algebraische reciproke Trajectorie hat Johann Bernoulli die semicubische Parabel $y^3 = ax^2$ erkannt.

Mit der Betrachtung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung begann ein italienischer Gelehrter seine Untersuchungen, welche aber bald eine andere Richtung einschlugen. Es war Graf Jacopo Riccati[4]) (1676—1754). In Venedig geboren wurde der mit zehn Jahren vaterlose Knabe dem Jesuitencollegium in Brescia anvertraut, wo er überraschende Fortschritte machte. Von 1693—1696 studirte er in Padua und kehrte dann nach Venedig zurück, von wo ihn weder eine Berufung nach Padua, noch eine solche nach Wien, auch nicht eine dritte an die Spitze der Petersburger Akademie einem glücklichen und dem Studium geweihten Familienleben entreissen

[1]) Klügel V, 113—136. [2]) Der Aufsatz ist abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* II, 423—472. [3]) Ebenda II, 600—616. [4]) *Nouvelle Biographie universelle* XLII, 131—132 (Paris 1863).

konnte. Ziemlich spät, 1747 siedelte er nach Treviso über, wo er starb. Er führte mit zahlreichen Gelehrten aller Länder Europas einen so ausgedehnten Briefwechsel, dass er ihn nicht allein bewältigen konnte, vielmehr auf die Mithilfe seiner beiden Söhne, Vincenzo Riccati (1707—1775) und Giordano Riccati (1709—1790) sich verlassen musste. Von 1720 bis 1722 befand sich Niclaus II. Bernoulli als Hauslehrer in einer italienischen Adelsfamilie in Venedig[1]). Dort erneuerte er die Bekanntschaft mit Riccati, welche er schon bei einem früheren Aufenthalte 1716 gemacht hatte, dort trat er auch bei fünftägigem Zusammensein in nähere Beziehung zu Christian Goldbach, wovon nachher noch die Rede sein muss. Jacopo Riccati theilte Niclaus II. Bernoulli einen Aufsatz mit, damit dieser ihn seinem Vater Johann Bernoulli zur Begutachtung einsende. Von letzterem sollte es dann abhängen, ob er den Aufsatz zum Drucke geben wolle. Die A. E. brachten den Aufsatz ziemlich bald[2]). Wie schon bemerkt, nimmt Jacopo Riccati seinen Ausgangspunkt von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, zu deren Integration er es für nothwendig erklärt, dass ein erstes Differential als constant gegeben sei, oder dass man ein solches annehme. Er versteht darunter, man müsse eine unabhängige Variable annehmen, wenn sie nicht schon im Wortlaute der Aufgabe selbst enthalten sei.

Riccati's Verfahren an der Gleichung $x^m d^2x = d^2y + dy^2$ geprüft ist folgendes, wobei wir uns nur gestatten, zur grösseren Deutlichkeit Differentialquotienten zu benutzen, wo Riccati sich nur der Differentiale bedient. Er denkt sich irgend ein p als unabhängige Veränderliche, wodurch die vorgelegte Gleichung die Gestalt

$$x^m \frac{d^2x}{dp^2} = \frac{d^2y}{dp^2} + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2$$

annimmt. Wie freilich x und y von p abhängen, ist unbekannt. Man setze ferner $\frac{dx}{dp} = q$, $\frac{dy}{dp} = u$, wo q und u irgendwie aus x, y und Constanten bestehen. Um unseren Lesern Riccati's Ausdrucksweise einmal vorzuführen, bemerken wir, dass die hier erörterten Annahmen so ausgesprochen sind: Riccati sagt, er wolle $\frac{dx}{q}$ als constant betrachten, ferner $\frac{dx}{q} = dp$ setzen, welches hiernach auch constant sei,

[1]) Vergl. den von Daniel Bernoulli verfassten Nekrolog von Niclaus II. Bernoulli in *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres Géomètres du XVIII. Siècle éditée par* P. H. Fuss II, 268—269 (Petersburg 1843). Wir citiren dieses wichtige Quellenwerk als *Corresp. math.* (Fuss). [2]) A. E. Supplementa VIII, 66—73. Dieser Supplementband ist von 1724 datirt, aber Riccati's Aufsatz ist jedenfalls früher in die Oeffentlichkeit gelangt, da im Novemberhefte 1723 der A. E. schon von ihm die Rede ist.

ausserdem nehme er $dq = u\,dp$ an, wo dp fortwährend constant bleibe. Fortsetzung der Differentiation nach p bringt $\frac{d^2x}{dp^2} = \frac{dq}{dp}$, $\frac{d^2y}{dp^2} = \frac{du}{dp}$ hervor, und die gegebene Differentialgleichung nimmt die Gestalt an $x^m \frac{dq}{dp} = \frac{du}{dp} + u^2$. Setzt man

$$\frac{dq}{dp} = \frac{dq}{dx} : \frac{dp}{dx}, \quad \frac{du}{dp} = \frac{du}{dx} : \frac{dp}{dx}$$

und vervielfacht die dadurch neuerdings umgeformte Gleichung mit $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{q}$, so entsteht $x^m \frac{dq}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{q}$, eine Differentialgleichung, welche zwar erster Ordnung ist, bei welcher aber die Trennung der Veränderlichen unter den ganz allgemeinen Voraussetzungen, welche für q und u gemacht werden mussten, nicht gelingt. Riccati versucht es nun mit der weitaus engeren Annahme, dass q nur von x allein abhänge und zwar eine Potenz x^n sei. Unter dieser Voraussetzung schliesst er seinen Aufsatz mit der Aufgabe: Werthe von n zu ermitteln, welche die Trennung der Veränderlichen gelingen lasse, während der Werth des Exponenten m keiner Beschränkung unterworfen sein soll.

Unmittelbar hinter Riccati's Aufsatz sind Bemerkungen des damals etwa 22jährigen Daniel Bernoulli (S. 86) abgedruckt, aus welchen hervorgeht, dass Niclaus I., Niclaus II., aber auch Johann und Daniel Bernoulli sich mit der Riccatischen Gleichung, welche in etwas anderer Schreibart

$$x^n \frac{du}{dx} + u^2 = nx^{m+2n-1}$$

heisst, beschäftigt haben, und dass sie alle unabhängig von einander arbeitend zu dem gleichen Werthe von n gelangten, welcher die Trennung der Veränderlichen gestattet[1]). Daniel gab seine Auflösung in der damals so beliebten undurchsichtigen anagrammatischen Form.

Im Novemberhefte 1723 der A. E. kam Riccati wiederholt auf seinen Aufsatz zurück[2]). Er gab seiner Gleichung jetzt die einfacher aussehende Gestalt

$$x^m dx = du + \frac{u^2 dx}{x^n},$$

fügte aber die von ihm selbst ermittelten, die Trennung der Veränderlichen ermöglichenden Bedingungen für n nicht bei, während er

[1]) A. E. Supplementa VIII, 74: *Praescribit frater meus, se illud solvisse; sed praeter ipsum alii quoque existunt solutores, solutionem enim eruerunt Pater et Patruelis Nicolaus Bernoulli pariter ac egomet; eorum vero analyses nondum vidi, excepta illa a Parente excogitata, quae Ratione operationis et in procedendi modo a me diversa est.* [2]) A. E. 1723 pag. 502—510.

sich laut dagegen verwahrte, als habe er eine Herausforderung oder gar eine Verletzung der von ihm hochgeschätzten Familie Bernoulli beabsichtigt.

Daniel Bernoulli wartete noch zwei Jahre mit der Veröffentlichung seiner Methode. Als aber kein anderer Mathematiker in den A. E. die Riccatische Gleichung, wie sie nun schon genannt wurde, um einen Schritt weiter führte, gab er im Novemberhefte 1725 heraus, was er der Hauptsache nach seit 1722 besass[1]). Die Form der fraglichen Gleichung, von welcher er ausgeht, ist

$$\text{I.} \quad ax^n dx + u^2 dx = b du$$

und nun behauptet er, wenn irgend ein Werth $n = m$ die Trennung der Veränderlichen gestatte, so sei diese noch möglich erstens bei $n = -\frac{m}{m+1}$ und zweitens bei $n = -m - 4$.

Setzt man erstens $u = \frac{1}{y}$, $du = -\frac{dy}{y^2}$, so geht I. in

$$ax^n dx + \frac{dx}{y^2} = -\frac{b dy}{y^2}$$

über, oder in $dx + ax^n y^2 dx = -b dy$. Nun sei

$$x = s^{\frac{1}{n+1}}, \quad dx = \frac{s^{-\frac{n}{n+1}}}{n+1} ds.$$

Durch Einführung dieses Werthes entsteht

$$\frac{s^{-\frac{n}{n+1}}}{n+1} ds + as^{\frac{n}{n+1}} y^2 \frac{s^{-\frac{n}{n+1}}}{n+1} ds = -b dy$$

oder

$$\text{II.} \quad \frac{s^{-\frac{n}{n+1}}}{a} ds + y^2 ds = -\frac{(n+1)b}{a} dy,$$

eine Form, welche mit I. die grösste Aehnlichkeit besitzt. Ist also I. in seinen Veränderlichen trennbar bei $n = m$, so muss Gleiches für II. stattfinden bei $-\frac{n}{n+1} = m$, d. h. bei $n = -\frac{m}{m+1}$. Zweitens kann man

$$u = -\frac{b}{x} + \frac{y}{x^2}, \quad u^2 = \frac{b^2}{x^2} - \frac{2by}{x^3} + \frac{y^2}{x^4},$$

$$du = \frac{b}{x^2} dx - \frac{2y}{x^3} dx + \frac{1}{x^2} dy$$

setzen. Dadurch geht I. über in

$$ax^n dx + \frac{b^2}{x^2} dx - \frac{2by}{x^3} dx + \frac{y^2}{x^4} dx = \frac{b^2}{x^2} dx - \frac{2by}{x^3} dx + \frac{b}{x^2} dy.$$

Das 2. und 3. Glied links streichen sich gegen das 1. und 2. Glied

[1]) A. E. 1725, pag. 473—475.

rechts, und wird die noch aus drei erhalten bleibenden Gliedern bestehende Gleichung mit x^2 vervielfacht, so entsteht

$$ax^{n+2}dx + \frac{y^2}{x^2}dx = bdy.$$

Eine abermalige Veränderung bringt $x = \frac{1}{s}$, $dx = -\frac{ds}{s^2}$ hervor. Diese Substitution liefert nämlich

$$\text{III.} \quad -as^{-n-4}ds - y^2ds = bdy$$

mit wieder in die Augen fallender Aehnlichkeit mit I. Hilft also bei I. der Werth $n = m$ die Trennung der Veränderlichen zu vollziehen, so muss bei III. genügen, wenn $-n-4 = m$, d. h. $n = -m-4$.

So sind die beiden Hilfssätze bewiesen, und es bedarf zu deren Anwendung nur eines besonderen m. Aber augenscheinlich ist 0 ein solches m, denn bei $n = 0$ verwandelt einfache Division durch $a + u^2$ die Gleichung I. in $dx = \frac{bdu}{a+u^2}$ mit getrennten Veränderlichen. In Folge abwechselnder Anwendung erst des zweiten, dann des ersten Hilfssatzes, dann wieder des zweiten, des ersten u. s. w. ist also die Trennung der Veränderlichen ferner möglich bei $n = -0-4 = -4$, bei $n = -\frac{-4}{-4+1} = -\frac{4}{3}$, bei $n = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$ u. s. w., allgemein bei $n = \frac{-4c}{2c \pm 1}$, wo c irgend eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Die Verallgemeinerung bewies Daniel Bernoulli allerdings nicht. Er überliess es vielleicht dem Leser, sich durch Anwendung vollständiger Induction zu überzeugen, dass von $n = \frac{-4c}{2c+1}$ die Veränderung des ersten Hilfssatzes zu

$$n = -\frac{\frac{-4c}{2c+1}}{\frac{-4c}{2c+1}+1} = \frac{-4c}{2c-1}$$

führt, und von diesem $n = \frac{-4c}{2c-1}$ die Veränderung des zweiten Hilfssatzes zu $n = \frac{4c}{2c-1} - 4 = \frac{-4(c-1)}{2(c-1)+1}$.

Dagegen fügte Daniel Bernoulli noch einige Bemerkungen hinzu. Alle ermittelten Werthe von n, sagt er, seien innerhalb der Grenzen $n = 0$, $n = -4$ gelegen. Bei $c = \infty$ entstehe $n = -2$, ein Fall, der besonderer Betrachtung werth sei. Die Differentialgleichung I. hiesse nämlich alsdann $\frac{adx}{x^2} + u^2dx = bdu$ und verwandle sich mittels $u = \frac{1}{y}$ in $\frac{adx}{x^2} + \frac{dx}{y^2} = -\frac{bdy}{y^2}$, bei welcher die Trennung der Ver-

änderlichen möglich sei, wie daraus hervorgehe[1]), dass die Veränderlichen in den einzelnen Gliedern gleiche Exponentensumme besitzen. Diese Bemerkung lässt erkennen, dass damals schon Daniel Bernoulli von der Integrabilität homogener Differentialgleichungen in einer Weise spricht, als wenn es sich um eine ganz allgemein bekannte Thatsache handelte, und doch war, so viel wir wissen, noch nichts darüber im Drucke erschienen. Erst im Jahre 1726 brachten die Veröffentlichungen der Petersburger Akademie die Integration jener besonderen Klasse von Differentialgleichungen. Das ist grade das Grenzjahr, welches von diesem Abschnitte zum folgenden führt. Wir beabsichtigen erst in jenem von dem Gegenstande weiter zu reden.

Die Riccatische Gleichung war ein Gegenstand steigenden Interesses geworden und wurde auch in dem Briefwechsel zwischen Niclaus II. Bernoulli und Christian Goldbach viel besprochen. Von Christian Goldbach[2]) (1690—1764) aus Königsberg in Preussen wissen wir kaum irgend etwas vor seiner Reise, welche er um 1720 nach Italien machte, und auf welcher er (S. 456) in Venedig mit Niclaus II. Bernoulli bekannt wurde. Die angeknüpften Beziehungen führten zu einem über die Jahre 1721—1725 sich erstreckenden Briefwechsel, der allerdings erst 1843 in die Oeffentlichkeit trat, vorher also ebensowenig eine allgemeine Wirksamkeit ausüben konnte, als ein anderer gleichfalls 1843 gedruckter in den Jahren 1723—1730 zwischen Goldbach und Daniel Bernoulli geführter Briefwechsel[3]). Aus dem erstgenannten Briefwechsel geht hervor, dass Jacopo Riccati die Einzelfälle, welche die Trennung der Veränderlichen in seiner Differentialgleichung gestatten, sehr gut kannte. Goldbach suchte solche durch Reihenentwicklung[4]). Um nämlich $ax^m dx + by^n x^p dx = dy$ zu behandeln, setzte er

$$y = cx^e + fx^{e+k} + gx^{e+2k} + hx^{e+3k} + \cdots,$$

entwickelte daraus

$$y^n = \alpha x^{en} + \beta x^{en+k} + \gamma x^{en+2k} + \delta x^{en+3k} + \cdots,$$

sowie

$$dy = [cex^{e-1} + f(e+k)x^{e+k-1} + \cdots]dx$$

und erhielt nach Division durch dx auf beiden Seiten des Gleich-

[1]) *in qua constat indeterminatas separationem admittere eo, quod in singulis terminis indeterminatae eandem habent exponentium summam.* [2]) Allgemeine deutsche Biographie IX, 330—331. [3]) Der Briefwechsel zwischen Goldbach und Niclaus II. Bernoulli findet sich *Correspond. math.* (Fuss) II, 97—170, der zwischen Goldbach und Daniel Bernoulli ebenda II, 173—406.
[4]) *Correspond. math.* (Fuss) II, 106 flgg.

heitszeichens Reihen, deren Glieder er der Ordnung ihres Auftretens nach mit einander verglich. Er setzte also

$$ax^m = cex^{e-1},\ bax^{en+p} = f(e+k)x^{e+k-1} \text{ u. s. w.}$$

Aus der ersten Gleichsetzung fand er $e = m + 1$, $c = \frac{a}{e}\cdot$ Aus der zweiten ergab sich $en + p = e + k - 1$, sowie $ba = f(e + k)$, und $en + p = e + k - 1$ liess sich auch $mn + n + p = m + 1 + k - 1$ schreiben, woraus $k = (m + 1)n + p - m$ folgte, nebst andererseits $f = \frac{ba}{e+k}$ als Folgerung aus $ba = f(e + k)$ u. s. w. Die vorher willkürlich angesetzte Reihe für y wurde dadurch zu einer ganz bestimmten. Niclaus II. Bernoulli dagegen brachte die Riccatische Gleichung auf andere Formen zurück[1]), welche, abgesehen von der Gestalt gewisser in ihr auftretender Exponenten, der ursprünglichen Riccatischen Gleichung durchaus ähnlich waren, so dass, wenn nicht die (S. 457) erwähnte Aeusserung Daniel Bernoulli's schnurstracks entgegenstände, man sich fragen müsste, ob letzterer bei dem oben erörterten Aufsatze von 1725 ganz unabhängig verfuhr und nicht Anregung von seinem Bruder erhielt, der ihn schon als Kind in die Mathematik eingeführt hatte, und mit dem er, so lange Niclaus II. Bernoulli lebte, in engster Bruderliebe vereint blieb, eine grade in dieser Familie auf's Angenehmste berührende Erscheinung.

Zum Schlusse des Kapitels sparten wir uns die Erwähnung einer Arbeit wieder eines italienischen Adligen auf, welche uns zugleich Gelegenheit giebt etwas nachzutragen, was im XVI. Abschnitte, wo es eigentlich hingehört, übersehen wurde. Wir können das Gebiet, über welches wir zu berichten haben, mit einem freilich ganz der Neuzeit angehörenden Namen als das der Additionstheoreme bezeichnen. Tschirnhaus hat im November 1695 einen solchen Satz, wenn auch unbewiesen und unbeweisbar, ausgesprochen, indem er (S. 149) behauptete, er sei im Besitze eines Verfahrens, welches ihm ermögliche, bei jeder Curve ein Bogenstück zu ermitteln, welches zu einem anderen auf ihr gegebenen Bogenstücke in gegebenem Verhältnisse stehe. Tschirnhaus wollte vielleicht damit übertrumpfen, was die Brüder Bernoulli wirklich schon geleistet hatten.

Jakob Bernoulli brach die neue Bahn mit einem Aufsatze im Januarhefte 1691 der A. E., über welchen (S. 212) hätte berichtet werden müssen[2]). Jakob Bernoulli will (Figur 69), man solle die

[1] *Correspond. math.* Fuss, II, 140—143. [2]) Ueber den in Jac. Bernoulli's *Opera* I, 431—442 abgedruckten Aufsatz: *Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis* vergl. G. D. E. Weyer, Ueber die parabolische Spirale. Kiel und Leipzig 1894.

Axe einer gewöhnlichen Parabel in Gestalt eines Kreises $BCDM$ zusammenbiegen. Die Ordinaten sollen senkrecht zur Axe gerichtet sein, wie z. B. $DG = y$, während $BD = x$. Die Endpunkte G der Ordinaten, welche mit Hilfe der Gleichung $y^2 = lx$ bestimmt sind, bilden die Curve, welche *parabola helicoidis* oder auch *spiralis parabolica* genannt werden könne. Der Name der parabolischen Spirale ist der Curve geblieben. Schon hier kann Zweierlei bemerkt werden. Erstens hat Jakob Bernoulli hier an einem besonderen Beispiele das benutzt, was Leibniz ein Jahr später (S. 204) krummlinige Coordinaten nannte, und zweitens sind hier wahre Polarcoordinaten vorhanden. Jede auf die Kreisperipherie $BCDM$ in irgend einem Punkte D senkrecht gezogene DG muss verlängert durch den Kreismittelpunkt A hindurchgehen, kann mithin auch als von dort ausgehender Polarleitstrahl gedacht werden, und der Kreisbogen BCD ist dem Drehungswinkel des Leitstrahls aus seiner Anfangslage proportional. Würde man $AB = r$, $AG = \varrho$, $DG = r - \varrho$, $\angle BAD = \vartheta$, arc. $BCD = r\vartheta$ nennen, so würde als Gleichung der parabolischen Spirale $(r - \varrho)^2 = lr\vartheta$ entstehen, während Bernoulli allerdings es bei $lx = y^2$ bewenden lässt. Die Bogenlänge wird vermöge des bei E rechtwinkligen Dreieckchens FEG gefunden. In diesem Dreieckchen ist $FG^2 = FE^2 + EG^2$. Aber $FE = dy$; $EG : CD = AG : AD$, also $EG = \frac{CD \, . \, AG}{AD} = \frac{dx(r-y)}{r}$ und $FG^2 = dy^2 + \frac{(r-y)^2}{r^2} dx^2$.

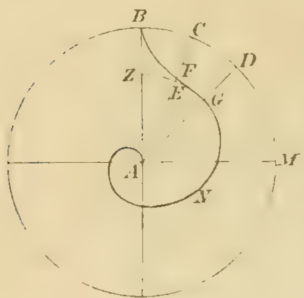


Fig. 69.

Aber die Gleichung $lx = y^2$ liefert $dx = \frac{2y}{l} dy$, mithin

$$FG^2 = dy^2 \cdot \frac{r^2l^2 + 4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4}{r^2l^2}$$

und

$$FG = \frac{dy}{rl} \sqrt{r^2l^2 + 4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4}.$$

Könnte man, sagt Jakob Bernoulli[1]), das Integral dieses Ausdruckes finden, so hätte man die Länge der Curve BFG. Hier tritt also, so weit uns bekannt ist, das erste Integral auf, in welchem eine Quadratwurzel aus einem Ausdrucke 4. Grades vorkommt, mit anderen Worten ein elliptisches Integral. Das wäre schon von Wichtigkeit, wenn wir darin auch nur ein zufälliges, durchaus unbewusstes Verdienst Jakob Bernoulli's erkennen dürften, einem Integrale begegnet

[1]) *cujus quantitatis integrale, si dari posset, exhiberet longitudinem curvae BFG.*

zu sein, das dazu bestimmt war, später eine Rolle zu spielen. Aber Jakob Bernoulli ging weiter als das.

Seit Van Heuraet (Bd. II, S. 842—843) wurde die Aufgabe der Rectification nicht selten auf eine solche der Quadratur zurückgeführt, d. h. man zeichnete, wenn $\int X dx$ eine Curvenlänge darstellte, eine Hilfscurve $y = X$, deren Fläche jener Länge als Maass diente. Für die Integration als solche war damit natürlich gar nichts gewonnen, denn das Integral behielt seine Form, während es die Bedeutung wechselte. Ein sehr grosser Vortheil ergab sich aber durch Zeichnung der Hilfscurve in dem besonderen Falle der parabolischen Spirale. Hier zeigte nämlich die Hilfscurve einen vollkommen symmetrischen Verlauf, wodurch sich beim blossen Augenschein die Gleichheit gewisser Flächenstücke, beziehungsweise verschiedener Curvenlängen, welchen jene Flächenstücke als Maass dienten, ergab, und Jakob Bernoulli durfte den Satz aussprechen[1]), es offenbare sich dadurch auch für Curven, deren Länge nicht bestimmt werden könne, eine Gleichheit von einander unähnlichen Bögen. In Zeichen moderner Integral rechnung lautet der Satz für die parabolische Spirale

$$\int_{\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}+\cdot} \sqrt{1 + \frac{4y^2(r-y)^2}{r^2l^2}}\, dy = \int_{\frac{r}{2}-\cdot}^{\frac{r}{2}} \sqrt{1 + \frac{4y^2(r-y)^2}{r^2l^2}}\, dy.$$

Setzt man nämlich in dem links vom Gleichheitszeichen befindlichen Integrale $y = \frac{r}{2} + z$, in dem rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen $y = \frac{r}{2} - z$, so nehmen beide die gleiche Gestalt

$$\int_0^{\cdot} \sqrt{1 + \frac{4\left(\frac{r}{2}-z\right)^2\left(\frac{r}{2}+z\right)^2}{r^2l^2}}\, dz$$ an[2]).

Johann Bernoulli, damals noch auf dem besten Fusse mit seinem Bruder stehend, warf im Augustheft 1695 der A. E. die Frage auf[3]), ob man nicht im Stande sei, Curven zu finden, deren Summe oder Differenz sich durch einen Kreisbogen darstellen lasse, und beantwortete sie bejahend. Sei (Figur 70) eine Curve ABC gegeben mit DE als Berührungslinie im Punkte A. Diese DE wird als Berührende in Bewegung gesetzt, so dass sie nach und nach die Lagen LBM, lBm, zuletzt GCF (als Berührende an die ABC im Punkte C)

[1]) *unde patet, quod in curvis etiam illis, quae rectificationem nondum acceperant, nonnumquam partes aequales dissimilares assignari possunt.* [2]) Diese Form der Beweisführung benutzte Enneper in Note VII seines Werkes: Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte. [3]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 142—144.

annimmt. Die Endpunkte der DE beschreiben bei dieser Bewegung die Curven $DLlG$ und $EMmF$. Um D als Mittelpunkt wird mit DE als Halbmesser ein Kreisbogen $ENnO$ beschrieben, dessen Endpunkt O durch die Gleichheit der Winkel $EDO = EPF$ bestimmt ist. Dann wird behauptet, die Curvenlängen DG und EF glichen zusammen dem Kreisbogen EO. Zum Beweis werden zwei zunächst auf einander folgende Lagen der bewegten DE, nämlich LBM und lBm in's Auge gefasst und DN LM, Dn lm gezogen. Die doppeltrechtwinkligen Dreiecke LBl, MBm, NDn sind der Construction nach einander ähnlich.

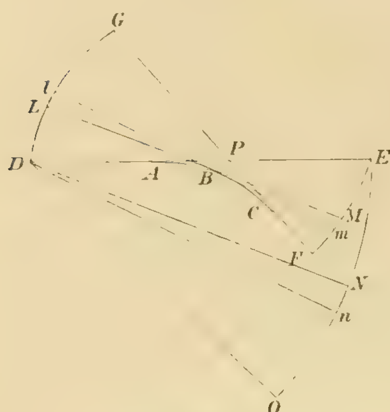


Fig. 70.

Folglich ist

$$\frac{BM}{BL} = \frac{Mm}{Ll}, \quad \frac{BL + BM}{BL} = \frac{Ll + Mm}{Ll},$$

oder wegen $BL + BM = LM$ auch

$$\frac{LM}{BL} = \frac{Ll + Mm}{Ll}, \text{ und daraus } \frac{LM}{Ll + Mm} = \frac{BL}{Ll},$$

oder, wegen $LM = DN$, auch $\frac{BL}{Ll} = \frac{DN}{Ll + Mm}$. Wegen der hervorgehobenen Dreiecksähnlichkeiten ist aber auch $\frac{BL}{Ll} = \frac{DN}{Nn}$ und folglich $Nn = Ll + Mm$. Dasselbe Gleichheitsverhältniss findet über den ganzen Bogen EO statt, d. h. es ist $EO = DG + EF$, während DG und EF zwei Evolventen von ABC sind. Voraussetzung war, dass der Punkt A sich zwischen D und E befand. Liegt dagegen E zwischen D und A, so findet ein ganz ähnlicher Satz statt, bei welchem nur statt der Summe zweier Curven deren Differenz auftritt.

Im Octoberhefte 1698 der A. E. kam Johann Bernoulli in dem Aufsatze *Theorema universale rectificationi Linearum Curvarum inserviens*[1]) auf den Gegenstand zurück und fragte nunmehr, ob nicht der Kreisbogen der früheren Untersuchung durch eine Gerade ersetzt werden könne, ob es also nicht Curven gebe, deren Summe oder Differenz eine geradlinig herstellbare Länge besitzen? Er beantwortete die Frage dahin, jede parabolische Curve $a^m y^p = b^n x^q$, wo $m + p = n + q$, sei entweder für sich oder mit einer anderen parabolischen Curve vereinigt rectificirbar. Die erste cubische Parabel

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* I, 249—253.

mit der Gleichung $3a^2y = x^3$ habe die Eigenschaft, sich selbst in der Art zugeordnet zu sein, dass auf ihr zwei Curvenstücke angegeben werden können, deren Unterschied rectificirbar sei[1]). Einen Beweis des so Ausgesprochenen gab Johann Bernoulli nicht.

Nun trat eine 17jährige Pause ein, bis ein italienischer Gelehrter sich an den Gegenstand wagte. Graf Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano[2]) (1682—1766), gewöhnlich kürzer als Graf Fagnano bezeichnet, gehörte einem alten Adelsgeschlechte in Sinigaglia an. Im Collegio Clementino in Rom, wo er erzogen wurde, zeichnete er sich in allen Fächern aus mit alleiniger Ausnahme der Mathematik. Erst später beim Lesen der *Recherche de la verité* von Malebranche erkannte er die Nothwendigkeit mathematischer Bildung und warf sich voll Eifer und ohne Lehrer auf die früher vernachlässigten Studien, die er bald beherrschte. Er war Consul der Könige von Spanien und Sicilien in seiner Vaterstadt und pflegte die Wissenschaft nur so nebenbei. Hatte er seinen Schreibtisch verlassen, so hörte er ohnedies mit jedem Nachdenken auf. Dieser eigenthümliche Geist hat nun zahlreiche mathematische Arbeiten hervorgebracht, welche meistens zuerst in dem *Giornale de' letterati d'Italia* erschienen, dann in zwei Bänden *Produzioni matematiche* (Pesaro 1750) gesammelt wurden. Auf dem Titelblatte eines jeden der beiden Bände findet sich eine Lemniscate mit der Ueberschrift *Deo veritatis gloria*, und Figur wie Ueberschrift wurden Fagnano's ausdrücklicher Anordnung gemäss auf seinem Grabsteine wiederholt[3]). Wir erkennen daraus, dass Fagnano das grösste Gewicht auf seine Untersuchungen über die Lemniscate legte. Die Zeitfolge wie die Gedankenfolge, welche uns zu Fagnano geführt hat, verlangen indessen, dass vorher über andere Arbeiten berichtet werde[4]).

Im XIX. Bande des *Giornale de' letterati d'Italia*, welches abgekürzt G. L. I. heissen mag, stellte Fagnano 1714 unter ausdrücklicher Berufung auf Johann Bernoulli und dessen Aufsatz in den A. E. von 1698 die Aufgabe, man solle, wenn auf einer biquadratischen Parabel erster Art von der Gleichung $x^4 = y$ ein Curvenstück abgegrenzt sei, auf derselben Parabel ein anderes Stück abgrenzen,

[1]) *adeoque est Parabola cubicalis primaria, quae cum se ipsa comparata rectificari potest, seu in qua assignari possunt duo arcus quorum differentia est rectificabilis.* [2]) *Memorie concernenti il Marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano fino al Mese di Febbraio dell' anno 1752 inviate dal Padre Don Angelo Calogera abate Benedettino Camaldolese al Conte Giovanni Maria Mazzuchelli* abgedruckt in *Bulletino Boncompagni* III, 37—46. [3]) Bald. Boncompagni im *Bulletino Boncompagni* III, 31. [4]) F. Siacci, *Sul teorema del Conte di Fagnano* im *Bulletino Boncompagni* III, 1—26. — Enneper, Elliptische Functionen, Note VI und VII.

so dass beide Curvenstücke einen gradlinig darzustellenden Unterschied besitzen. Im folgenden Jahre 1715 gab Fagnano im G. L. I. XXII die Auflösung seiner Aufgabe unter Verallgemeinerung derselben auf Parabeln verschiedener Art, sofern dieselben nur der Gleichung $y = \frac{2}{m+2} \cdot \frac{x^{\frac{m+2}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}$ genügen, wo m beliebig postiv oder negativ, ganz oder gebrochen gewählt werden darf. Wird s für die Länge des Bogens, t für die Länge der Berührungslinie vom Berührungspunkte bis zur Abscissenaxe gesetzt, und bedeutet Bestrichelung die Differentiation nach x, so ist $s = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ und $t = \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2}$. Die gegebene Parabelgleichung liefert $y' = \frac{x^{\frac{m}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}$ und $t = \frac{2x}{m+2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^m}$ nebst

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^m}\, dx = \frac{2x}{m+2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^m} + \frac{m}{m+2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^m}}$$
$$= t + \frac{m}{m+2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^m}},$$

wie sich durch nachträgliche Differentiation leicht als wahr erkennen lässt. Demzufolge ist

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^m}} = \frac{m+2}{m} (s - t).$$

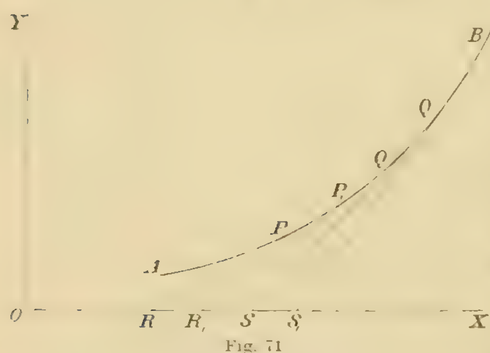


Fig. 71

Die Einsetzung der Grenzen, um von dem unbestimmten Integrale zu dem bestimmten überzugehen, erfolgt in der Weise, dass, wenn (Figur 71) P, P_1, Q, Q_1 Curvenpunkte bedeuten, denen die Abscissen x_0, x_1, z_0, z_1 angehören, und bei welchen die entsprechenden Längen der Berührungslinien PR, P_1R_1, QS, Q_1S_1 sind, die beiden Gleichungen stattfinden

$$\frac{m}{m+2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^m}} = (\text{arc } AP_1 - \text{arc } AP) - (P_1R_1 - PR)$$
$$= \text{arc } PP_1 - (P_1R_1 - PR)$$

und

$$\frac{m}{m+2}\int_{z}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}} = \text{arc}\, QQ_1 - (Q_1S_1 - QS).$$

Kann man die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}} = \pm\frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}}$$

integriren, so dass die aus ihrer Integralgleichung folgende Transformation von z nach x das Integral

$$\int_{z}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}} \quad \text{in} \quad \int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}}$$

übergehen lässt, so müssen auch die diesen beiden bestimmten Integralen gleichen Werthe einander selbst gleich sein, d. h. es muss sein arc PP_1 — arc $QQ_1 = (P_1R_1 - PR) - (Q_1S_1 - QS)$. Bei $m = 4$ integrirt sich z. B.

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^4}} + \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^4}} = 0$$

mittels $\frac{x}{a}\cdot\frac{z}{a} = 1$. Die Ausgangsgleichung $y = \frac{2}{m+2}\,\frac{x^{\frac{m+2}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}$ heisst alsdann $3a^2y = x^3$. Bei $m = 6$ heisst die Ausgangsgleichung $4a^3y = x^4$, stellt also den Fall der Aufgabe von 1714 her, ebenso wie $m = 4$ der Behauptung Johann Bernoulli's von 1698 (S. 465) entspricht. Die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^6}} = \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^6}}$$

wird alsdann durch $2\left(\frac{xz}{a^2}\right)^2 + 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}$ integrirt. Auch der Fall $m = 3$, d. h. die Curve $25a^3y^2 = 4x^5$ wird von Fagnano behandelt und $\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{z}{a}\right) = 3$ als Integral von

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^3}} = \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^3}}$$

erkannt. Andere Einzelfälle übergehen wir und erörtern auch nicht genauer, wie die Gleichungen, welche wir Integralgleichungen genannt haben, dazu dienen z aus x, beziehungsweise z_1 aus x_1 zu finden.

Wieder ein Jahr später, 1716 im G. L. I. XXVI, erschien das *Teorema da cui si deduce una nuova misura degli Archi Elittici, Iper*

bolici e Cicloidali. Mit Fagnano's eigener Bezeichnung, in welcher h, l, f, g beliebige Constanten bedeuten und

$$X = \frac{dx\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}, \quad Z = \frac{dz\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{fz^2+g}}$$

ist, heisst der Fagnano'sche Satz, dass unter der Voraussetzung

$$\text{F)} \quad (fhx^2z^2)^s + (flx^2)^s + (flz^2)^s + (gl)^s = 0$$

und $s = \pm 1$ das Integral von $X + Z = 0$ im ersten Falle ($s = 1$) durch $\frac{-hxz}{\sqrt{-fl}}$, im zweiten Falle ($s = -1$) durch $\frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$ dargestellt werde.

Bei $s = 1$ ist

$$\text{F)} \quad fhx^2z^2 + flx^2 + flz^2 + gl = 0$$

und daraus

$$z^2 = \frac{-flx^2 - gl}{fhx^2 + fl}, \quad x^2 = \frac{-flz^2 - gl}{fhz^2 + fl}.$$

Mithin ist

$$\frac{hx^2+l}{fx^2+g} = \frac{-l}{fz^2} \quad \text{und} \quad \frac{hz^2+l}{fz^2+g} = \frac{-l}{fx^2},$$

und daraus

$$X = \frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}}, \quad Z = \frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}}, \quad \text{d. h. } X + Z = \left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right)\frac{\sqrt{-l}}{\sqrt{f}}.$$

Differentiation von F) giebt nach Division durch $2fxz\sqrt{-fl}$ die Gleichung

$$\frac{\sqrt{-l}}{\sqrt{f}}\left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right) + \frac{h}{\sqrt{-fl}}(zdx + xdz) = 0,$$

beziehungsweise

$$\frac{\sqrt{-l}}{\sqrt{f}}\left(\frac{dx}{z} + \frac{dz}{x}\right) = \frac{-h}{\sqrt{-fl}}(zdx + xdz) = \frac{-h}{\sqrt{-fl}}d(xz)$$

und folglich $X + Z = \frac{-h}{\sqrt{-fl}}d(xz)$. Integration bringt daher

$$\int X + \int Z = \frac{-hxz}{\sqrt{-fl}}$$

hervor.

Bei $s = -1$ ist

$$\text{F)} \quad \frac{1}{fhx^2z^2} + \frac{1}{flx^2} + \frac{1}{flz^2} + \frac{1}{gl} = 0.$$

Daraus erhält man

$$x^2 = \frac{-ghz^2 - gl}{fhz^2 + gh}, \quad z^2 = \frac{-ghx^2 - gl}{fhx^2 + gh}.$$

Mithin ist

$$\frac{hx^2+l}{fx^2+g} = \frac{-hz^2}{g} \quad \text{und} \quad \frac{hz^2+l}{fz^2+g} = \frac{-hx^2}{g},$$

und daraus

$$X = \frac{zdx\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}, \quad Z = \frac{xdz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}},$$

$$X + Z = (z\,dx + x\,dz)\frac{\sqrt{-h}}{\sqrt{g}} = d\left(\frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}\right).$$

Hier bringt die Integration $\int X + \int Z = \frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$ hervor.

Der so in seiner allgemeinen Form bewiesene Lehrsatz entwickelt seine eigentliche Wirksamkeit bei der Anwendung auf die Ellipse und die Hyperbel.

Sei (Figur 72) die Ellipse $AIHG$ gegeben, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sein soll. Ihr Bogenelement ist $dx\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^4 - a^2x^2}}$.

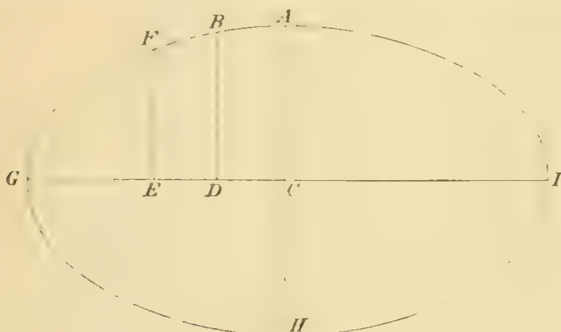


Fig. 72.

Fagnano setzt, um die von ihm gewünschte Form zu erhalten, $a^2 - b^2 = -\frac{ah}{2}$, so dass das Bogenelement $dx\sqrt{\frac{hx^2 + 2a^3}{-2ax^2 + 2a^3}}$ wird oder X, sofern $l = 2a^3$, $f = -2a$, $g = 2a^3$ gewählt wird. Die Vermittlungsgleichung $z^2 = \frac{-flx^2 - gl}{fhx^2 + fl}$ zwischen z^2 und x^2 heisst alsdann $z^2 = \frac{2a^5 - 2a^3x^2}{2a^3 + hx^2}$ und gestattet, wie im allgemeinen Falle, z zu finden, wenn x gegeben ist. Aus $x = 0$ zum Beispiel folgt $z = a$, und $\frac{-h}{\sqrt{-fl}}$ wird $-\frac{h}{2a^2}$, was auch für x angenommen werden mag. Sind $CD = x$, $CE = z$ zwei zu einander gehörende Abscissen, so stellt $\int X$ den Ellipsenbogen AB, $\int Z$ den Ellipsenbogen AF vor, und der Fagnano'sche Lehrsatz spricht aus: arc AB + arc $AF = \frac{-hxz}{2a^2} + K$, wo K eine Integrationsconstante ist. Zu deren Bestimmung dient, dass, wie wir hervorgehoben haben, $x = 0$ mit $z = a$ zusammen stattfindet. Zugleich fällt aber bei $x = 0$ der Punkt B auf A und bei $z = a$ der Punkt F auf G, d. h. es ist $0 +$ arc $AG = 0 + K$. Setzt man den Werth $K =$ arc AG in die als Ausdruck des Fagnanoschen Lehrsatzes angegebene Gleichung ein, so entsteht

$$\text{arc } AB + \text{arc } AF - \text{arc } AG = -\frac{hxz}{2a^2},$$

oder endlich $\text{arc } AB - \text{arc } GF = -\frac{hxz}{2a^2}$.

Die Hyperbel dient Fagnano als Beispiel des zweiten Falles, in welchem $\frac{1}{fhx^2z^2} = \frac{1}{flx^2} + \frac{1}{flz^2} + \frac{1}{gl} = 0$ ist, und

$$\int X + \int Z = \frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$$

nach sich zieht. Sei (Figur 73) ABF die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ihr Bogenelement ist $dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2 - a^4}{a^2x^2 - a^4}}$.

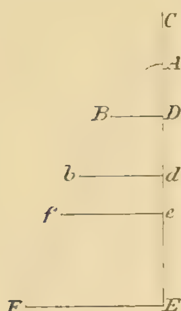


Fig. 73.

Fagnano setzt $a^2 + b^2 = \frac{ah}{2}$ und erhält dadurch das Bogenelement in der Form $dx\sqrt{\frac{hx^2 - 2a^3}{2ax^2 - 2a^3}}$, welche mit X übereinstimmt, sofern $l = -2a^3$, $f = 2a$, $g = -2a^3$ gewählt wird. Das Integral $\frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$ nimmt also hier den Werth $xz\sqrt{\frac{h}{2a^3}} = \frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}$ an, und rechnet man die Hyperbelbögen von A an, nimmt $CD = x$, $CE = z$, wo x und z mittels

$$z^2 = \frac{-ghx^2 - gl}{fhx^2 + gh} \quad \text{d. h. mittels} \quad z^2 = \frac{a^2hx^2 + 2a^5}{hx^2 - a^2h}$$

zusammenhängen, so wird $\text{arc } AB + \text{arc } AF = \frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} + K$. Zur Ermittelung der Integrationsconstante K wählt Fagnano diesmal zwei andere Abscissen $Cd = t$, $Ce = u$, wo $u^2 = \frac{a^2ht^2 + 2a^5}{ht^2 - a^2h}$ und erhält so eine zweite Gleichung $\text{arc } Ab + \text{arc } Af = \frac{tu\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} + K$. Durch Abziehen der zweiten Gleichung von der ersten fällt K weg, und es bleibt $\text{arc } Ff - \text{arc } Bb = (xz - tu)\frac{\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}$. Er fügt die Bemerkung hinzu, der eine der beiden Hyperbelbögen, etwa Ff, könne ganz beliebig angenommen werden, worauf der andere bestimmt sei.

In späteren Aufsätzen von 1717 G. L. I. XXIX und 1720 G. L. I. XXXIII hat Fagnano noch weitere Differentialgleichungen mit Quadratwurzeln behandelt und gezeigt, dass $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = 0$ mittels $x^2 + z^2 + x^2z^2 = 1$ und $\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} = 0$ mittels

$$x^2 + z^2 - x^2z^2 + 2xz\sqrt{2} = 1$$

integrirt werde, dadurch eine Bahn zu neuen Entdeckungen eröffnend.

Wir haben (S. 465) von Fagnano's Untersuchungen über die Lemniscate gesprochen. Dieselben ziehen sich durch mehrere Abhandlungen, deren älteste aus dem Jahre 1718 zu stammen scheint[1]). Die gewöhnliche Gleichung der Lemniscate $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(a^2 - y^2)$ kann durch das Gleichungspaar $\frac{x}{a} = \sqrt{u + u^2}$, $\frac{y}{a} = \sqrt{u - u^2}$ ersetzt werden. Dann ist $dx^2 = \frac{a^2}{4}\frac{(1+2u)^2}{u+u^2}du^2$, $dy^2 = \frac{a^2}{4}\frac{(1-2u)^2}{u-u^2}du^2$,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2}{2u(1-u^2)}du^2 \quad \text{und} \quad s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{u(1-u^2)}}.$$

Der Bogen CS (Figur 74) soll von C an gerechnet werden, wo $x = 0$ sowie $y = 0$, mithin auch $u = 0$ ist. Im Punkte L ist

$$x = a\sqrt{2},\quad y = 0,$$

mithin $u = 1$. Im Punkte S mag $x = a\sqrt{m + m^2}$, $u = m$ sein. Man hat alsdann



Fig. 74.

$$\text{arc } CS = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_0^m \frac{du}{\sqrt{u(1-u^2)}}.$$

Nun wird eine neue Veränderliche v mittels $u = \frac{1-v}{1+v}$ eingeführt. Diese Substitution macht, dass bei $u = 0$, $v = 1$ und bei $u = m$, $v = \frac{1-m}{1+m}$ wird. Ausserdem wird

$$du = -\frac{2dv}{(1+v)^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{u(1-u^2)}} = \frac{1+v}{2}\sqrt{\frac{1+v}{v(1-v)}}.$$

Man erhält so

$$\text{arc } CS = -\frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_1^{\frac{1-m}{1+m}}\frac{dv}{\sqrt{v(1-v^2)}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{1-m}{1+m}}^1\frac{dv}{\sqrt{v(1-v^2)}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1\frac{dv}{\sqrt{v(1-v^2)}} - \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{1-m}{1+m}}\frac{dv}{\sqrt{v(1-v^2)}}.$$

[1]) Poggendorff I, 715. — Wir geben unseren Auszug nach Enneper, Elliptische Functionen, Note VII, da uns Fagnano's Werke und ebenso das G. L. I. nicht zur Verfügung standen. Dass allerdings Enneper sich nicht genau an Fagnano angeschlossen haben kann, geht aus der geführten Rechnung hervor.

In den beiden rechts stehenden Integralausdrücken kann man ohne Weiteres den Integrationsbuchstaben v wieder durch u ersetzen. Sie bedeuten augenscheinlich wieder Lemniscatenbögen, und zwar beginnen beide bei C, wo $u = 0$ war. Der erste derselben endet bei L, wo, wie wir bemerkten, $u = 1$ ist, der zweite etwa in M, wenn dort $u = \frac{1-m}{1+m}$, beziehungsweise $x = \frac{a}{1+m}\sqrt{2-2m}$ ist. Die gefundene Gleichung heisst demnach arc CS = arc CL — arc CM = arc ML. Zwei Lemniscatenbögen von gleicher Länge sind gefunden, deren einer in C, der andere in L beginnt, während die anderen Endpunkte durch $u = m$ und $u = \frac{1-m}{1+m}$ bestimmt sind. S und M fallen beide in einen Punkt T zusammen, wenn $m = \frac{1-m}{1+m}$, d. h. $m = \sqrt{2} - 1$ ist. Dazu gehört der Wert $x = a\sqrt{2-\sqrt{2}}$ und der über diesem Abscissenpunkt liegende Lemniscatenpunkt T halbirt den Lemniscatenquadranten CTL.

Fagnano wusste aber ausser der Halbirung des Lemniscatenquadranten auch dessen Drittheilung und Fünftheilung zu vollziehen, worauf wir nicht näher eingehen, und er zog die Folgerung, der Lemniscatenquadrant lasse sich algebraisch n-theilen, wenn n in einer der Formen $2 . 2^m$, $3 . 2^m$, $5 . 2^m$ enthalten sei, wo m eine ganze positive Zahl bezeichnet. Dieses ist, ruft er aus, eine neue und eigenthümliche Eigenschaft meiner Curve[1]).

[1]) *Questa è una nuova e singolare proprietà della mia curva.*

XVIII. Die Zeit von 1727—1758.

101. Kapitel.

Geschichte der Mathematik. Klassikerausgaben. Wörterbücher.

Die Geschichte der Mathematik als Gegenstand wissenschaftlicher Forschung nahm in dem Zeitabschnitte, zu dessen Behandlung wir uns wenden, einen gewaltigen Aufschwung. Wir begegnen Schriftstellern, deren Absicht auf die Bearbeitung des ganzen Gebietes gerichtet war, wie solchen, welche an Einzeluntersuchungen sich genügen liessen, und wir werden von ihnen in dieser Reihenfolge reden.

Johann Christoph Heilbronner[1]) (1706—1747 etwa), ein Schlosserssohn aus Ulm, widmete sich nach der Theologie der Mathematik, über welche er in Leipzig mehrere Jahre lang Vorlesungen hielt. Er bezeichnet sich auf dem Titelblatte seiner ersten Schrift: *Versuch einer mathematischen Historie. Erster Theil. Darinnen eine Abhandlung von dem Nutzen der Mathematik überhaupt, und die Historie der Rechenkunst enthalten sind (Franckfurt und Leipzig verlegts Samuel Wohler, Buchhandler in Ulm 1739)* als *Theol. et Mathem. Studios.*, während er auf dem Titel der 1742 bei Johann Friederich Gleditsch in Leipzig erschienenen *Historia matheseos universae a mundo condito ad seculum p. C. n. XVI praecipuorum mathematicorum vitas, dogmata, scripta et manuscripta complexa. Accedit recensio elementorum, compendiorum et operum mathematicorum atque historia arithmetices ad nostra tempora* nur Jo. Christoph. Heilbronner schlechtweg und ohne jeden Zusatz heisst. Heilbronner ist bald über-, bald unterschätzt worden. Zur richtigen Würdigung ist eine Vergleichung mit dem etwa hundert Jahre älteren Vossius (Bd. II, S. 600) unerlässlich. Ihn hat Heilbronner als hauptsächliche Quelle benutzt, allerdings äusserst kritiklos benutzt, so dass der Sinn des von Vossius Behaupteten unter Umständen zur Unkenntlichkeit entstellt ist. Am deutlichsten zeigt folgendes Beispiel, wie wir das meinen. Vossius spricht[2]) von der vor 86 Jahren durch Vertranius Maurus verfassten Lebensbeschreibung des Terentius Varro. Deren Datum kommt dadurch

---

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XI, 313. [2]) Vossius pag. 39.

ungefähr auf das Jahr 1560. Heilbronner sagt demnach in dem deutschen Versuch u. s. w. ganz richtig[1]), das Zeugnis des Vertranius Maurus sei noch nicht 200 Jahre alt. In der lateinischen Historia u. s. w. dagegen heisst es: *haec cum ille anno 86 scripserit*[2]). Die 86 Jahre des Vossius sind also ohne Umrechnung wiederhergestellt, und kein Leser wird jetzt dem Wortlaute entnehmen können, wann eigentlich die schriftstellerische Thätigkeit des Vertranius Maurus stattfand. Wo Heilbronner anderen Gewährsmännern als Vossius folgt, ist er nicht selten unglücklich in seiner Wahl. Vossius[3]) hat Hypsikles etwas mehr als 100 Jahre vor Christi Geburt angesetzt, was der geschichtlichen Wahrheit entsprechen dürfte. Heilbronner[4]) setzt denselben mit Fabricius auf 160 nach Christi Geburt. Eudemus, der ausdrücklich als Schüler des Aristoteles bezeichnet ist[5]), soll im 4. nachchristlichen Jahrhunderte gelebt haben, Leonardo von Pisa im 15. Jahrhundert, wofür Blancanus als Quelle angeführt ist[6]). Und dennoch ist neben den grossen Mängeln und groben Fehlern eine Fülle von Gelehrsamkeit in dem deutschen wie in dem lateinischen Bande Heilbronner's aufgestapelt. Es ist auch an einzelnen Stellen wenigstens versucht den mathematischen Inhalt der genannten Schriften zu schildern, so z. B. wenn der Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes aus der Aehnlichkeit der Dreiecke hergeleitet wird, welche bei Ziehung der Senkrechten von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse entstehen[7]), wenn die *Arithmetica infinitorum* von John Wallis als die Darstellung einer neuen Methode die Quadratur von Curven und schwierigere Aufgaben der Mathematik zu untersuchen bezeichnet wird, wenn hinzugesetzt ist, sie laufe darauf hinaus, dass die Summe der natürlichen Zahlenreihe, dann die Summe der Quadratzahlen, der Kubikzahlen u. s. f. erforscht werde[8]). Heilbronner hat ferner das Verdienst, auf mathematische Handschriften aufmerksam gemacht zu haben. Bernhard von Montfaucon gab 1739 seine *Bibliotheca bibliothecarum* heraus, ein grossartig angelegtes Handschriftenverzeichniss. Heilbronner hat es durchgearbeitet und was mathematischen Inhaltes schien, seinem lateinischen Geschichtswerke einverleibt. Die Angaben sind nichts weniger als stets zutreffend oder gar vollständig, wie man heute weiss, aber brauchbar sind sie immer noch, wie Heilbronner's ganze *Historia matheseos* es ist, wenn man nur bei der Benutzung die nöthige Vorsicht walten lässt und ins-

---

[1]) Heilbronner, Versuch S. 115 am Schlusse der Anmerkung nn. [2]) Heilbronner, *Historia* pag. 291, Anmerkung m. [3]) Vossius pag. 328, § 7. [4]) Heilbronner, *Historia* pag. 342. [5]) Ebenda pag. 370: *Eudemus Rhodius, Aristotelis discipulus.* [6]) Ebenda pag. 497. [7]) Ebenda pag. 108, Anmerkung kk. [8]) Ebenda pag. 699, § 91, Nr. 5.

besondere stets auf die ersten Quellen zurückgeht, eine Vorschrift, welche man eigentlich bei geschichtlichen Untersuchungen nicht nöthig haben sollte besonders einzuschärfen.

Johann Friedrich Weidler[1] (1691 oder 1692—1755) gehörte mit seiner Thätigkeit der Universität Wittenberg an. Wir finden ihn dort 1712 als Assessor der philosophischen Facultät, 1719 als ordentlichen Professor der höheren Mathematik, beziehungsweise der Sternkunde, 1733 (nachdem er 1727 zu Basel die juristische Doctorwürde erworben hatte) als ausserordentliches Mitglied der juristischen Facultät, 1746 als ordentlichen Professor der Rechte, ohne dass jedoch anscheinend die Verpflichtung juristische Vorlesungen zu halten von ihm gefordert oder erfüllt worden wäre. Sein geschichtliches Hauptwerk ist die *Historia astronomiae sive de ortu et progressu astronomiae* von 1741, welcher er 1755 noch eine *Bibliographia astronomica etc. Accedunt historiae astronomiae supplementa* nachfolgen liess. So wenig wir die Astronomie in den Kreis unserer Berichterstattung eingezogen haben, so wenig gehört deren Geschichte in das Bereich dieses Werkes, und wir nannten Weidler's Buch nur gelegentlich, weil wir nachher eine Sonderuntersuchung des gleichen Verfassers zu erwähnen haben, der uns alsdann keine unbekannte Persönlichkeit mehr ist.

Wir haben (S. 260) für Christian von Wolf's *Elementa matheseos universae* auf den XVIII. Abschnitt verwiesen. Wenn wir in diesem Kapitel die gegebene Zusage noch nicht vollständig erfüllen, berichten wir doch über den fünften, letzten Band des grossen Handbuchs. Er ist 1741 in erster, 1752 in zweiter Auflage erschienen[2]) und bezeichnet seinen Inhalt auf dem Titelblatte als *Tomus quintus, qui commentationem de praecipuis scriptis mathematicis, commentationem de studio mathematico recte instituendo ... continent.* Dessen zweiter, grösserer Abschnitt[3]) ist eine Gesammtübersicht aller Theile der reinen Mathematik, wie sie nacheinander erlernt werden sollen. Wolf greift dabei vielfach auf Dinge der formalen Logik über und beruft sich nicht selten auf sein Wörterbuch, von dem weiter oben (S. 260) die Rede war. Der erste Abschnitt[4]) ist eine Zusammenstellung der Literatur der reinen wie der angewandten Mathematik und besitzt insofern auch heute noch eine gewisse geschichtliche Bedeutung, als man entnehmen kann, welche Werke Wolf empfehlenswerth erschienen. Ausser dieser allgemeinen Bemerkung möchten wir noch auf zwei Stellen besonders hinweisen.

[1] Allgemeine deutsche Biographie XLI, 453—455. Artikel von S. Günther.
[2] Uns liegt diese zweite Auflage vor, und auf sie beziehen sich unsere Anführungen. [3]) Wolf, *Elementa math.* V, 129—408. [4]) Ebenda V, 1—128.

Das mehrgenannte Wolf'sche Wörterbuch war vergriffen. Der Verleger bat Wolf[1]) eine neue Auflage nach seinem, des Verlegers, Sinne, *ad mentem ipsius*, zu bearbeiten oder zu gestatten, dass der Titel wenigstens unverändert Wolf's Namen zeige, während die Umarbeitung durch einen Anderen vollzogen würde. Wolf nennt die Zumuthung abgeschmackt, *insulsum petitum*, und konnte und wollte sich nicht darauf einlassen, weil seine Feder nicht käuflich sei. Der Verleger veranstaltete nichtsdestoweniger 1732 eine neue Auflage[2]), mit welcher in Verbindung gebracht zu werden Wolf sich öffentlich verwahrt.

Wir wissen aus dem 95. Kapitel, dass Wolf in dem Prioritätsstreite zwischen Newton und Leibniz auf des Letzteren Seite stand und ihm manche Dienste leistete. In dem geschichtlichen Abschnitte, von dem wir reden, erzählt Wolf jenen Streit[3]). Er begnügt sich damit, die nackten Thatsachen zu erwähnen, d. h. zu sagen in dem und dem Jahre habe in der und der Zeitschrift der und der Aufsatz gestanden oder sei der und der Brief geschrieben worden. Er teilt mit, dass er dem damals in Wien befindlichen Leibniz das Erscheinen des *Commercium epistolicum* angezeigt und ihn gefragt habe, ob er eine Besprechung in den A. E. wünsche. Zuletzt sagt Wolf: „Dieser Streit, wer Erfinder der Differentialrechnung sei, ist nachher mit grosser Erregung der Gemüther insbesondere zwischen Keill und Johann Bernoulli geführt worden, worüber in erster Linie die Leipziger A. E. nachzulesen sind. Unsere Aufgabe ist es nicht, den Streit zum Abschlusse zu bringen, da hier nicht Raum für eine Erörterung ist, ohne welche ein Abschluss nicht möglich, und wir uns eine solche auch nicht vorgenommen haben. Zudem ist es unnöthig, aus der erwähnten Zeitschrift abzuschreiben, was dort gelesen werden kann. Wir selbst verehren die Verdienste Newton's, wir verehren die Verdienste Leibnizens, Bernoulli's und Anderer. Wir halten es für billig, dass Jedem das Seine zugewiesen werde, und dass grosse Talente durch den Ruhm, der die Kraft zu glänzenden Leistungen verleitet, angespornt werden. Wir sind bereit, die Verdienste Anderer zu erheben, aber wir erachten es als einen Verstoss gegen die Grundgesetze der Moral, über das Lob in Streit zu gerathen, und kein

---

[1]) Wolf, *Elementa math.* V, 10, § 21. [2]) Die Heidelberger Universitätsbibliothek besitzt ein Exemplar der II. Auflage des Wörterbuchs in altem Einbande, auf dessen Rücken der Titel *Johann Hübner Lexicon mathematicum* gedruckt ist. Wir haben nicht ermitteln können, ob der dem Verleger willfährige neue Herausgeber wirklich Johann Hübner hiess. Sein Name kommt weder auf dem Titelblatte noch in einer Vorrede vor. Wolf's Name ebensowenig. [3]) Wolf, *Elementa math.* V, 51—53, §§ 34, 35, 36.

Beispiel wird uns veranlassen, einen Stein zu solchem Streite beizutragen."

Ein hierher gehörendes Werk aus dem Jahre 1750 ist die *Historica et dogmatica ad Mathesin introductio qua succincta matheseos historia cum ceteris ejusdem praecognitis, nec non systematis mathematici delineatio continentur* von Frobesius[1]. Ihr Verfasser, mit deutschem Namen Johan Nikolaus Frobes (1701—1756), studierte in Helmstädt, dann als enger Schüler Wolf's in Halle und Marburg. Seit 1726 las er in Helmstädt über Wolf'sche Philosophie zuerst als Privatdocent, später als Professor. Im Jahre 1741 wurde er überdies zum Professor der Physik und Mathematik ernannt, und nun lehrte er alle diese Fächer durch 10 Jahre, bis er 1751 die philosophischen Vorlesungen abgab. Das erwähnte historisch-mathematische Werk verleugnet die Abhängigkeit seines Urhebers von Wolf keineswegs. Auch Frobesius hat zwei grosse Abschnitte unterschieden, deren zweiter die Umrisse der gesammten Mathematik zeichnet, während der erste nach einer Schilderung der Natur und des Wesens der Mathematik, also nach einer philosophischen Einleitung, sich in den §§ X—XX auf pag. 62—136 der Geschichte zuwendet[2]. Nach einer Auseinandersetzung des Nutzens der Geschichte folgt § XI eine Literatur der Biographien der Mathematiker, § XII Literatur der mathematischen Bibliographien, § XIII Literatur der Geschichte der Mathematik, alle drei recht brauchbar, wenn auch nicht ganz vollständig. Von § XIV an folgt die Geschichte selbst, welche Frobesius in fünf Perioden theilt: 1) barbarica sive orientalis (Inder, Chinesen, Chaldäer, Phönizier, Aegypter). 2) graecanica vel graeca, von Thales bis zur Stiftung der Alexandrinischen Schule. 3) Alexandrino-romana bis zum siebenten christlichen Jahrhundert. 4) arabica. 5) occidentalis. Eigene Forschungen sucht man auch hier vergebens, indess giebt der Verfasser genau seine Quellen und Gewährsmänner an. Die Geschichte selbst ist eine ziemlich compendiarische Aufzählung der einzelnen Mathematiker und ihrer Erfindungen. Die Bearbeitung der 4. Periode ist ein blosses numerirtes Namenverzeichniss, die 5. Periode fehlt ganz.

Johann Friedrich Stockhausen[3] (1718—1776) war Prediger in Kirdorf in Oberhessen und verfasste verschiedene theologische Schriften. Mit mathematischen Studien hat er sich daneben aus Liebhaberei beschäftigt und Geschichtliches über diese Wissenschaft

[1] Allgemeine deutsche Biographie VIII, 129—130. [2] Wir berichten von hier an wörtlich nach Nesselmann, Die Algebra der Griechen § 17, da wir selbst das Werk von Frobesius nie gesehen haben. [3] Allgemeine deutsche Biographie XXXVI, 292—293.

gesammelt und 1752 in Berlin bei den bekannten Verlegern Haude und Spener herausgegeben. Der Titel lautet: *Historische Anfangsgründe der Mathematik, worinnen der Ursprung, Wachsthum, mancherley Veränderung und heutiger Zustand sowohl der Mathematik überhaupt, als auch aller und jeder Theile derselben insonderheit mit Beyfügung eines Registers der vornehmsten Sachen und Scribenten gezeiget wird.* Das Büchelchen hat dadurch ein gewisses Interesse, dass in ihm von Berühmtheiten des 17. und 18. Jahrhunderts die Rede ist, die heute kein Mensch mehr kennt, während wirklich hervorragende Mathematiker nur ganz obenhin genannt sind. Eine gelungene Verwechslung[1]) ist die des John Newton, des Verfassers der 1658 gedruckten *Trigonometria Britannica* (Bd. II S. 682), mit Isaac Newton. Da des Letzteren Geburtsjahr 1642 ausdrücklich angegeben ist, so meinte Stockhausen offenbar, Newton habe jene Trigonometrie mit 16 Jahren veröffentlicht.

Jean Etienne Montucla[2]) (1725—1799) wurde als Sohn eines Kaufmanns in Lyon geboren. In dem dortigen Jesuitencollegium erhielt er einen ausgezeichneten Unterricht und erwarb sich ebensowohl reiche Sprachkenntnisse als er tief in die Mathematik eindrang, beides gleich unentbehrlich für das, was später seine Lebensaufgabe sein sollte. Zunächst studierte er zwar in Toulouse Rechtsgelehrsamkeit, dann aber ging er nach Paris, um seine allgemeinen Bildungsbedürfnisse zu befriedigen. Das Haus des Buchhändlers Jombert bildete dort einen Vereinigungspunkt für zahlreiche Schriftsteller, namentlich für Mathematiker, deren Schriften einen Verlagsartikel ihres Wirthes bildeten. Dort verkehrte auch Montucla, dort lernte er D'Alembert, dort De Gua de Malves, den Architekten Jacques François Blondel[3]) (1705—1774), den Astronomen Joseph Jérôme le François de Lalande[4]) (1732—1807), welcher gleichfalls ein Zögling des Lyoner Jesuitencollegiums gewesen war, Guillaume Le Blond[5]) (1704—1781), den Mathematiklehrer der königlichen Pagen, später der königlichen Prinzen kennen, und er befreundete sich mehr und mehr mit dem Gedanken, das Werden der so verschiedenartigen wissenschaftlichen Richtungen, die er bei den Männern seines täglichen Verkehrs vorfand, zu ergründen und es darzustellen. Eine Sonderuntersuchung, auf welche wir zurückkommen werden, bahnte 1754 den Weg und lenkte die Aufmerksamkeit auf deren

[1] Stockhausen l. c. S. 149. [2]) Montucla IV, 662—672 (*Sur la vie et les ouvrages de Montucla, extrait de la Notice historique lue par Auguste Savinien Le Blond à la Société de Versailles le 15 Janvier 1800 avec des additions par Jérôme De Lalande*). [3]) Poggendorff I, 213. [4]) Ebenda I, 1349—1351. [5]) Ebenda I, 1398—1399.

Verfasser. Dann erschien 1758 die *Histoire des Mathématiques* in 2 Bänden und brachte ihm neuen Ruhm und Beförderung. Montucla begleitete 1764 Turgot als königlicher Astronom nach Cayenne, wurde 1766 Oberaufseher der königlichen Gebäude in Paris, zog sich 1792 nach Versailles zurück. Jetzt drang De Lalande in ihn, eine neue Auflage des grossen Geschichtswerkes zu veranstalten und es bis auf die Gegenwart fortzuführen. Der schon 67jährige Montucla liess sich bewegen. Am 7. August 1799 erschienen die beiden ersten Bände der neuen Auflage, aber am 18. December des gleichen Jahres starb Montucla, ohne die Fortsetzung druckfertig haben machen zu können. Dieser Aufgabe unterzog sich De Lalande, und der Abstand des 3. und 4. Bandes von dem 1. und 2. ist ein Zeugniss für die Vortrefflichkeit von Montucla's eigener Arbeit. Sein Nekrolog, welchem wir die lebensgeschichtlichen Angaben entnehmen, rührt von Auguste Savinien Le Blond[1] (1760—1811) her, einem Grossneffen von Guillaume Le Blond. Wir entnehmen ihm auch, dass Montucla Mitglied der Akademien von Paris und Berlin war. Wir haben den hohen Werth der Geschichte der Mathematik aus Montucla's Feder nicht bloss hier durch den Vergleich mit De Lalande's Fortsetzung, sondern an den verschiedensten Stellen unseres eigenen Werkes, wo immer wir Montucla benutzen konnten, theils ausdrücklich, theils da durch anerkannt, dass wir ihm folgten. Allerdings stand uns überall nur die zweite Auflage zu Gebot, welche gegen die erste wesentlich verbessert und fast um die Hälfte vermehrt sein soll, die zweite Auflage, welche durch das Jahr ihres Erscheinens erheblich jenseits der Grenze dieses Abschnittes liegt. Aber wenn uns die erste Auflage auch nicht bekannt ist, die Möglichkeit, dass sie sich zu der mit Recht weit und breit berühmten zweiten Auflage auswachsen konnte, schliesst ihr Lob in sich. Zweifellos ist Montucla in zahlreichen Einzelheiten heute überholt, allein man darf nicht vergessen, dass es dazu eines vollen Jahrhunderts und der Anstrengung zahlreicher Forscher bedurfte, welche Neues entdeckten, Neues herausgaben und dadurch Folgerungen ermöglichten, welche Montucla niemals hätte ziehen können, weil ihm die Vordersätze fehlten. Was Montucla geleistet hat, sein Eindringen in den Geist der zahllosen von ihm gelesenen Schriftsteller, sein Zusammenfassen der Hauptgedanken der Werke, über welche er berichtet, sein besonnenes Urtheil über zahlreiche Streitfragen, an welchen er niemals scheu vorüberschleicht, erheben ihn so hoch über alle seine Vorgänger, dass seine Nachfolger sich glücklich schätzen können, wenn nur ein

---

[1]) Poggendorff I, 1399.

halb so grosser Fortschritt von Montucla zu ihnen zugestanden wird, als er etwa von Vossius zu Montucla vorhanden war. Man darf dabei nicht aus den Augen verlieren, dass Montucla sich seine Aufgabe zum Schaden seines Werkes dadurch ungeheuer erschwert hat, dass er die ganze angewandte Mathematik in den Kreis seiner Betrachtungen mit hineinzog. Es war, wie mit vollem Rechte gesagt worden ist[1]), in der That zu viel für einen Mann, eine ganz neue Bahn betretend, eine aus den unmittelbaren Quellen geschöpfte Geschichte der Geometrie, Arithmetik, Algebra, Mechanik, Astronomie, Optik, Schiffahrtskunde, Geographie, Chronologie, Gnomonik, Differential- und Integralrechnung zu schreiben. Dieses Streben nach extensiver Vollendung musste die innere ersticken.

Nächst den Schriftstellern, welche der Geschichte der Mathematik im Allgemeinen sich befleissigten, nennen wir solche, welche Einzeluntersuchungen veröffentlichten, die selbst wieder nach zwei Richtungen auseinandergehen, indem entweder die Mathematik an besonderen Orten oder einzelne Gebiete der Mathematik in Frage kommen.

Johann Gabriel Doppelmayr[2]) (1671—1750) war der Sohn eines Nürnberger Kaufmanns, der sich aus Liebhaberei mit Physik beschäftigte und in Nürnberg die erste aufrecht stehende Luftpumpe in Gestalt einer Blumenvase angefertigt haben soll. Der Sohn erbte die Neigungen seines Vaters, zu denen sich Freude an der Mathematik gesellte, und das Studium zu Altdorf als Schüler von Johann Christoph Sturm (S. 10) befestigte ihn in seinem Vorhaben, sich von der Rechtsgelehrsamkeit, welcher er eigentlich sich widmen sollte, abzuwenden. Er kehrte ihr 1700 vollständig den Rücken, machte zwei Jahre lang Reisen durch Deutschland, Holland, England und erhielt nach weiteren zwei Jahren 1704 die Professur der Mathematik am Egidischen Gymnasium zu Nürnberg. Diese Stellung behielt Doppelmayr bis zu seinem Tode, den ihm vielleicht ein physikalisches Experiment brachte. Nach Versuchen mit einer Leydner Flasche, vermuthlich infolge derselben, befiel Doppelmayr eine rechtsseitige Lähmung, welche mit seinem Tode endigte. Von seinen zahlreichen Schriften hat die *Historische Nachricht von den nürnbergischen Mathematicis und Künstlern*, Nürnberg 1730, bleibenden Werth. Die Sprache, ein Gemenge von Deutsch und Latein, ist zwar im höchsten Grade unerquicklich, auch die Uebermenge von Berufungen erleichtert das Lesen des Werkes keineswegs; dafür ist es aber im höchsten Grade zuverlässig und geeignet, sowohl auf anderweitige Quellenschriften

[1]) Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 19. [2]) Allgemeine deutsche Biographie V, 344—345.

für die Geschichte der Mathematik hinzuweisen, als auch dieselben zu ersetzen.

Wolfgang Ludwig Graefenhahn[1] (1718—1767) veröffentlichte als Subrector des Gymnasiums zu Bayreuth 1744 und 1745 Schulschriften über die hervorragende Bedeutung deutscher Gelehrten in der Mathematik und der Optik, und Frobesius (S. 479) widmete 1751—1755 mehrere Abhandlungen den Helmstädter Mathematikern. Hierher gehört auch die Erwähnung des Grafen Maruli Giovanni Maria Mazzuchelli[2] (1707—1765) aus Brescia, der 1737 Geschichtliches und Kritisches über Archimed veröffentlichte, später eine allgemeine italienische Schriftstellerbiographie herauszugeben beabsichtigte, aber mit sechs in den Jahren 1753—1763 gedruckten Bänden nicht über den Buchstaben B hinauskam.

Gabriel Cramer[3] (1704—1752) gehörte einer ursprünglich holsteinischen Familie an, welche nach Strassburg übergesiedelt war, von wo aus in der Mitte des 17. Jahrhunderts ein weiterer Umzug nach Genf erfolgte. Zwei Cramer, Vater und Sohn, waren beliebte Genfer Aerzte, und auch der zweite Sohn des Letzteren, Gabriel, wurde einer Gelehrtenlaufbahn zugeführt. Er studirte an der grade damals an vorzüglichen Lehrkräften reichen Universität Genf. Der Inhalt seiner Studien kann aus dem Titel der 1722 von ihm vertheidigten Abhandlung über den Schall entnommen werden. Schon 1724 wurde Cramer mit einer abwechselnd durch ihn und einen Studienfreund zu versehenden Professur der Mathematik betraut. Im Mai 1727 erhielt er einen zweijährigen Urlaub, den er zu Reisen benutzte. Er verweilte zunächst fünf Monate in Basel in nahem Verkehre mit Johann Bernoulli. Von da aus begab er sich nach England, nach Holland, im December 1728 nach Paris, wo er bis zu seiner Heimkehr verblieb. Sein Hauptwerk über Curven von 1750 wird uns im 106. wie im 116. Kapitel ausführlich beschäftigen. Es ist bei rasch sinkender Gesundheit vollendet worden. Ein schwerer Fall mit einem Wagen trug dazu bei, den Zustand zu verschlimmern. Ende 1751 suchte Cramer Besserung auf einer Reise ins südliche Frankreich, aber schon am 4. Januar 1752 endete sein Leben in Bagnols, einem kleinen Orte bei Nismes. Dass wir ihn hier als einen Vertreter geschichtlicher Forschung über localisirte Mathematik zu nennen haben, beruht auf einer Veröffentlichung Cramer's in den Abhandlungen der Berliner Akademie 1748. Es ist eine Untersuchung[4] über Hippokrates von Chios, in welcher der Nachweis

---

[1]) Poggendorff I, 934. [2]) Ebenda II, 97—98. [3]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz III, 203—226. [4]) *Histoire de l'Académie de Berlin. Année* 1748. pag. 482—498.

geführt wird, dass wirklich Hippokrates und nicht, wie gelehrte Philologen damals meinten, Oinopides die Quadratur der Mondchen erfand, womit alsdann eine mathematische Erörterung der Frage sich verband, über welcherlei Kreissehnen quadrierbare Mondchen herzustellen seien.

Zu geschichtlichen Untersuchungen über einzelne mathematische Gegenstände uns wendend haben wir zuerst einer (S. 477) ankündigungsweise erwähnten Abhandlung Weidler's von 1727 zu gedenken. Sie führt den Titel: *De characteribus numerorum vulgaribus et eorum aetatibus veterum monimentorum fide illustratis Dissertatio mathematica et critica.* Wallis hatte bereits im 4. Kapitel seiner Algebra erwähnt, es gebe alte Ausgaben von Boethius, von Beda und Anderen, in welchen Zahlzeichen vorkommen, welche mit den sogenannten arabischen Zahlzeichen übereinstimmen, aber es sei nicht glaublich, dass dieselben älteren Handschriften entstammen. Weidler wurde in Altdorf mit der Handschrift der Geometrie des Boethius bekannt, welche später nach Erlangen kam, und welche in den neuesten Ausgaben der mathematischen Schriften des Boethius als die Handschrift e bezeichnet wird. Man nimmt gegenwärtig allgemein an, sie stamme aus dem 11. oder 12. Jahrhunderte. Weidler hielt sie für wesentlich älter[1], und auf diese Ansicht sich stützend sprach er zuerst und bestimmt die seitdem oftmals wiederholte, oftmals bekämpfte Behauptung aus, die sogenannten Apices des Mittelalters seien nicht von Gerbert und seinen Schülern eingeführt worden, sondern sie seien bereits im 6. Jahrhunderte etwa den Römern bekannt gewesen. Gegen die Meinung von altem jenseits des Jahres 1200 hinaufreichendem Gebrauche von Zahlzeichen mit Stellungswerth sind verschiedene Abhandlungen von John Ward in den P. T. von 1735 bis 1748 gerichtet[2]. Mit dem von Weidler und Ward behandelten Gegenstande wird sich wohl auch Gabriel Cramer's Abhandlung: *À qui est due l'invention des chiffres arabes* beschäftigt haben, welche 1739 in Genf erschien, uns aber nur durch eine Erwähnung[3]) bekannt ist.

Nicht besser kennen wir eine andere Schrift aus dem gleichen Jahre 1739: *Entwurf einer Historie der Rechenkunst*[4]) von Johann Gottfried Büchner[5]) (1695—1749), Archivrath in Greiz und Schriftsteller auf verschiedenen naturwissenschaftlichen Gebieten.

---

[1]) Weidler, *De characteribus numerorum* pag. 20: *Occurrunt in codice pervetusto, cujus literarum figurae monstrant, quod seculo minimum octavo vel nono scriptus sit.* [2]) P. T. 1735 pag. 120 und 136; 1744 pag. 79; 1745 pag. 283; 1748 pag. 603. [3]) Poggendorff I, 493. [4]) Nesselmann, Die Algebra der Griechen S. 15. Nach Stockhausen, Historische Anfangsgründe u. s. w. S. 114—115 wäre das Buch schon 1719 erschienen. [5]) Poggendorff I, 333.

Im Vorübergehen nennen wir die 1741 von De Gua de Malves veröffentlichten im Grossen und Ganzen recht zuverlässigen Untersuchungen zur Geschichte der Algebra. Sie bilden die Einleitungen zu eigenen Arbeiten über die Gleichungslehre, über welche wir im 105. Kapitel berichten werden.

Georg Wolfgang Krafft[1] (1701—1754) aus Tuttlingen, wurde, nachdem er durch verschiedene Klosterschulen seiner Heimath hin durchgegangen und in Tübingen Magister geworden war, durch Vermittlung des gleichfalls aus Württemberg stammenden und von 1725 bis 1731 als Akademiker in Petersburg ansässigen Georg Bernhard Bilfinger[2] (1693—1750) gleichfalls in die russische Kaiserstadt gezogen. Er folgte dem Rufe an das dortige Gymnasium, wurde 1730 Mitglied der Akademie, ging aber 1744 als Professor der Physik und der Mathematik nach Tübingen zurück. Dort verfasste er *Institutiones geometriae sublimioris*, deren erster und einziger Band 1753 kurz vor Krafft's Tode erschien. Krafft hatte ja offenbar mehr die Curvenlehre selbst als ihre Geschichte sich zum Gegenstande erwählt, aber, ihm vielleicht unbewusst, verschob sich das Hauptgewicht in seiner Behandlung und, mag das Buch für heutige Leser sonst wenig Erfreuliches bieten, die zahlreichen geschichtlichen Angaben bis auf die Zeit unmittelbar vor Krafft sind dankenswerth.

Alexandre Savérien[3] (1720—1805), Ingenieur bei der Marine, später Literat zu Paris, veröffentlichte 1753 eine *Histoire critique des infiniments petits*. Wir haben das Buch nie gesehen, noch irgend eine Beurtheilung desselben kennen gelernt. Der geringe Werth von jenseits der Zeitgrenze unseres Bandes erschienenen Schriften Savérien's machen uns indessen im höchsten Grade misstrauisch.

Einen durchaus befriedigenden Eindruck macht die letzte Einzeluntersuchung, bei welcher wir zu verweilen haben, ein schon (S. 480) erwähnter Vorläufer von Montucla's grossem Geschichtswerke. Wir meinen seine *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* von 1754. Allerdings kennen wir auch von diesem Buche ausschliesslich die 2. Auflage, welche Sylvestre François Lacroix (1765—1843) im Jahre 1831 veranstaltete, aber auch in diesem Falle, und vielleicht mit grösserem Rechte als bei der *Histoire des mathématiques*, können wir aus der zweiten Ausgabe einen Rückschluss auf die erste ziehen, da Lacroix in einer Vorrede erklärt, er habe sich damit begnügt, ziemlich zahlreiche Druckfehler zu verbessern, welche namentlich den Anfang des Buches verunstalteten, und eine Reihe kurzer Fussnoten

---

[1] Allgemeine deutsche Biographie XVII, 9—10. Artikel von S. Günther. [2] Ebenda II, 634—635. Artikel von J. Hartmann. [3] Poggendorff II, 761.

beizugeben; einige wenige grössere Ergänzungen seien am Schlusse als Zusätze vereinigt. Mit Rücksicht auf diese Erklärung des späteren Herausgebers können wir die Geschichte der Versuche zur Kreisquadratur zu gelangen von Montucla auch in ihrer ursprünglichen Gestalt als ein Meisterwerk bezeichnen, welches heute noch Niemand ohne Nutzen zu Rathe ziehen wird, geschweige denn zur Zeit, als es in die Welt hinausging. Das damals erregte Aufsehen war in vollstem Maasse gerechtfertigt.

Abermals früherer Gewohnheit folgend wollen wir nach den eigentlich geschichtlichen Arbeiten die Ausgaben bedeutender mathematischer Werke erwähnen, durch welche die Literatur bereichert worden ist. Man kann billigerweise nicht verlangen, dass wir hierin Voltaire's *Éléments de la philosophie de Newton mis à la portée de tout le monde* von 1738 und seine *Réponse aux objections principales qui ont été faites contre la philosophie de Newton* von 1739 rechnen, welche den Nachweis liefern, mit welcher Unbefangenheit der geistsprühende Verfasser über Dinge schrieb, die er nicht verstand.

Der erste ernsthaft zu nennende Gelehrte, der sich wiederholt der oft mehr arbeitvollen als dankbaren Mühe unterzog fremde Schriften herauszugeben, war Gabriel Cramer. Seine erste derartige Thätigkeit widmete er den 5 Bänden von Christian von Wolf's *Elementa matheseos universae*. Es wird behauptet[1]), Cramer habe schon die Ausgabe von 1732—1741 besorgt. Davon ist indessen in deren Vorrede nicht die leiseste Andeutung zu finden. Die Vorrede der Ausgabe von 1743—1752 dagegen nennt zwar auch Cramer's Namen nicht, allein Wolf erklärt dort wenigstens, er habe den in Genf wohnenden Verleger ermahnt, die Correctur durch eine in der Mathematik erfahrene Persönlichkeit lesen zu lassen[2]), und damit dürfte Cramer's Mitwirkung bestätigt sein. Ganz sichergestellt ist, dass Cramer 1742 die 4 Bände der Werke von Johann Bernoulli mit dessen Einwilligung herausgab, und dass Johann Bernoulli ausdrücklich erklärte, keine andere etwaige Ausgabe anzuerkennen. Cramer hat alle Abhandlungen anderer Schriftsteller, auf welche die vielfach als Streitschriften zu bezeichnenden Arbeiten Johann Bernoulli's sich beziehen, mit abdrucken lassen, sodass wir in unserem Geschichtswerke sehr häufig von der Vereinigung der auf den gleichen Gegenstand sich beziehenden Untersuchungen, die Cramer's Verdienst ist, Gebrauch machen konnten. Auf die Werke von Johann Bernoulli

---

[1]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz III, 215 Note 34 mit Berufung auf Senebier, *Histoire littéraire de Genève*. [2]) *Editorem hortati sumus, ut correctionem typorum committeret Mathematum perito.*

folgten 1744 in 2 Bänden, deren Seitenzahlen aber ohne Unterbrechung durchgezählt sind, die Werke des seit 1705 verstorbenen Jacob Bernoulli. Cramer schickte ihnen eine Widmung an Niclaus I Bernoulli voraus, in welcher er sich G. C. G. (Gabriel Cramer aus Genf) nannte, und noch deutlicher gab ihn die Vorrede an den Leser zu erkennen, in welcher er die Herausgabe der Gesammtwerke von Johann Bernoulli für sich in Anspruch nahm. Die *Ars Conjectandi* ist nicht aufgenommen. Im Uebrigen hat Cramer bei Jacob Bernoulli's Werken die gleichen Grundsätze verfolgt wie bei denen Johann's. Schriften anderer Mathematiker, welche zum Verständnisse unentbehrlich sind, sind mit abgedruckt, so dass man verschiedenen Abhandlungen der beiden gegnerischen Brüder sowohl in den Werken von Johann Bernoulli als in denen von Jacob Bernoulli, zweimal innerhalb zweier Jahre, begegnet. Jacob Bernoulli hatte auch Handschriftliches hinterlassen, theils von seiner eigenen Hand, theils von der Jacob Hermann's, dem er in die Feder dictirt hatte. Jacob Bernoulli hatte als gemeinsame Ueberschrift: *Posthuma varia* darüber gesetzt und dadurch zu erkennen gegeben, er wünsche eine nachträgliche Veröffentlichung. Cramer erfüllte diesen Wunsch und gab noch 20 weitere Nummern bei, die sich auf losen Blättern aufgefunden hatten, und zu welchen Niclaus I Bernoulli Anmerkungen verfasste. Andere Anmerkungen rühren offenbar von Cramer her. Endlich wird versichert[1], Cramer habe 1745 den Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli in 2 Bänden herausgegeben. Dass der Verleger Bousquet, bei welchem auch Johann Bernoulli's Werke erschienen waren, sich Cramer's zu bedienen wünschen musste, dass Johann Bernoulli selbst mit dieser Wahl sicherlich einverstanden war, liegt auf der Hand, und so fehlt es jener Behauptung nicht an Wahrscheinlichkeit. Anderes spricht dagegen, so z. B. dass sich in der Vorrede keinerlei Bestätigung nachweisen lässt. Dieselbe ist ohne Namensunterschrift Lausanne am 31. Januar 1745 gezeichnet, Cramer aber lebte in Genf. Lausanne war in der angegebenen Zeit der Wohnort eines anderen Gelehrten, zu welchem wir uns wenden.

Giovanni Francesco Mauro Melchior Salvemini[2]) (1708 bis 1791) aus Castiglione im oberen Arnothale, woher er den Beinamen Castillioneus annahm, der dann in der Form De Castillon der Familie verblieb, gehörte einer alten Patricierfamilie an. Er war in Pisa Student und erhielt dort 1729 die juristische Doctorwürde,

---

[1]) Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz III, 215 Note 35. [2]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Années 1792 et 1793 (*Histoire* p. 38—60). — Allgemeine deutsche Biographie IV, 67—69.

nach seiner eigenen Aeusserung ohne das Geringste von der Rechtswissenschaft zu verstehen, während er von Mathematik wenigstens Etwas gewusst habe. Letztere Wissenschaft und Sprachkenntnisse, welche ihm zum Uebersetzen nützlich waren, wurden seine Erwerbsquelle, als er wegen gottesleugnender Aeusserungen landesflüchtig werden musste. Er fand 1737 eine Lehrerstellung in Vevey, von wo er zu Anfang 1745 nach Lausanne übersiedelte. Dort bemühte er sich 1748 um eine theologische Professur, eine Bewerbung, welche zeigt, wie sehr seine religiöse Gesinnung sich geändert hatte. Ende 1751 wurde er Lector, 1755 Professor der Philosophie und der Mathematik in Utrecht. Im Jahre 1763, unmittelbar nach Beendigung des siebenjährigen Krieges, folgte De Castillon einem Rufe nach Berlin als Mathematiklehrer des Artilleriecorps. Im nächstfolgenden Jahre 1764 wurde er Mitglied der Berliner Akademie, 1787 Director ihrer mathematischen Klasse. Sein Nachruf stammt aus der Feder des einzigen Sohnes, der ihn von drei Kindern überlebte, und dessen Angaben wohl Vertrauen verdienen. Er erzählt, dass sein Vater in Vevey den Plan fasste, bei welchem Gabriel Cramer ihn brieflich unterstützte, die kleineren Schriften Newton's zu sammeln. So entstanden die *Opuscula mathematica Newtoni* in 3 Bänden, 1744 bei Bousquet gedruckt, die Ausgabe, von der wir in unserem Werke fortwährend Gebrauch gemacht haben, die thatsächlich wenigstens auf dem Festlande Europas die einzelnen Originalausgaben verdrängt hat. Wir erinnern daran, dass 1745 in dem gleichen Verlage *Leibnitii et Johannis Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum* in 2 Bänden erschien (S. 487). De Castillon's Sohn nennt seinen Vater ausdrücklich als den Herausgeber[1]) und setzt hinzu, Cramer habe ihm das Manuscript verschafft. In der, wie wir wiederholen, aus Lausanne datirten Vorrede des Herausgebers erwähnt dieser, mancherlei für die Wissenschaft gleichgiltige, persönliche Verhältnisse betreffende Stellen seien weggelassen worden; Leibnizens Geist werde darüber nicht unwillig sein, und Bernoulli werde, darauf rechne er und darum bitte er inständig, es für angemessen und gut halten[2]). De Castillon übernahm damit öffentlich die Verantwortung für die stattgehabten Kürzungen. Ob sie ihm nicht trotzdem von Bernoulli vorgeschrieben waren, mag dahingestellt sein. Noch bei einem weiteren Werke vertrat De Castillon den vom Druckorte weit entfernten Verfasser als Herausgeber. Es war bei Euler's *Introductio in analysin infini-*

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Années 1792 et 1793 (*Histoire* pag. 42).
[2]) *Hoc non aegre laturos beatos Leibnitii Manes, et aequi bonique ducturum Optimum Bernoullium confido, atque ut id faciat oro obtestorque.*

torum von 1748. Euler selbst ging, wie wir wieder aus dem mehr erwähnten Nachrufe wissen, von Berlin aus De Castillon an, den Druck zu überwachen.

Robert Simson[1] (1687—1768) führt uns nach England hinüber. Er war Schotte und seit 1711 Professor der Mathematik an der Universität Glasgow. Er legte schon 1723 eine erste Probe seiner Beschäftigung mit griechischer Geometrie ab, indem er in den P. T.[2]) eine Abhandlung über die Porismen Euklid's veröffentlichte. Im Jahre 1748 folgte eine Wiederherstellung der Ebenen Oerter des Apollonius, 1756 eine englische Uebersetzung von Euklid's Elementen. In fast zahllosen Abdrücken und immer neuen Auflagen beherrscht dieses Buch den englischen Elementarunterricht in der Geometrie, wenn auch Augustus De Morgan 1849 einen Sturmlauf gegen den ausschliesslichen und uneingeschränkten Gebrauch der euklidischen Elemente begann, an dem sich mehr und mehr Gelehrte betheiligten, so dass allmählich der Vorschlag ein anderes Schulbuch einzuführen gewagt werden konnte[3]). Nach Simson's Tode wurden 1776 aus seinem Nachlasse noch eine Wiederherstellung von dem Bestimmten Schnitte des Apollonius und eine ausführlichere Arbeit über Porismen zum Drucke gegeben. Von beiden darf der Zeitfolge nach hier keine Rede sein.

In dem den XVII. Abschnitt eröffnenden 93. Kapitel war (S. 259 bis 260) von Christian von Wolf's Mathematischem Wörterbuche von 1716 die Rede, und in unserem gegenwärtigen Kapitel (S. 478) von der neuen Bearbeitung dieses Werkes von 1732. Wo wir das Wörterbuch von 1716 das erste Werk dieser Art nannten, war uns entgangen, dass es vielmehr bereits zwei Vorgänger besass: Joseph Moxon hat 1680 in London ein englisches mathematisches Lexikon herausgegeben, Jaques Ozanam (S. 98) 1691 in Amsterdam ein *Dictionnaire mathématique*. Beide Werke sind uns nur aus Beschreibungen[4]) bekannt. Darnach scheint Moxon mathematische Ausdrücke und Redewendungen erklärt zu haben und Ozanam nicht viel weiter gegangen zu sein. Zudem ist Ozanam's Buch nicht alphabetisch sondern den Gegenständen nach geordnet gewesen, wenn auch ein angefügtes alphabetisches Inhaltsverzeichniss das Aufsuchen dessen, worüber man Aufklärung wünschte, zu erleichtern bestimmt war. In England gab dann Edmund Stone[5]), ein 1768 verstorbener Gärtnersohn, der 1725 zum Mitgliede der Royal Society erwählt, 1742 oder

---

[1]) Poggendorff II, 938. [2]) P. T. Vol. 40 pag. 330. [3]) G. Loria, *Della varia fortuna di Euclide* (Roma 1893) pag. 24 sqq. [4]) Heilbronner, *Historia matheseos universae* pag. 689 und 694—695. [5]) Poggendorff II, 1018.

1743 aus unbekannten Gründen wieder gestrichen wurde, im Jahre 1726 *A new mathematical dictionary* heraus. Ihm folgte Ephraim Chambers[1]) mit seiner 1728 in 2 Foliobänden gedruckten *Cyclopaedia*, einer Art von alphabetisch geordnetem Universallexikon, in welchem, natürlich nebensächlich genug, auch die Mathematik bedacht war. Wir würden das Werk kaum zu nennen verpflichtet sein, wenn es nicht den Anstoss zu einem grossartigen französischen Unternehmen gegeben hätte. Französische Buchhändler beabsichtigten nämlich eine Uebersetzung der Cyclopaedia und übertrugen De Gua de Malves die Leitung des Unternehmens[2]). De Gua (so nennt man ihn gewöhnlich) trat zu diesem Zwecke mit zahlreichen französichen Gelehrten, unter Anderen auch mit D'Alembert in Verbindung, aber das Werk sollte nach seinem Plane eine wesentliche Veränderung erfahren. Statt einer Uebersetzung dachte De Gua eine viel umfangreichere ganz neue Bearbeitung zu liefern, und darüber kam es zum Streit mit den Verlegern. De Gua trat von dem Unternehmen zurück. D'Alembert und Diderot übernahmen die Führung ganz in De Gua's Sinne, und so entstanden 1751—1780 die 32 Bände der grossen französischen *Encyclopédie*, deren mathematische und philosophische Artikel grossentheils von D'Alembert herrühren. Wir benutzen diese Gelegenheit zu lebensgeschichtlichen Angaben[3]). Jean le Rond D'Alembert (1717—1783) führt den Namen Jean le Rond wahrscheinlich von der Kirche Saint-Jean-le-Rond, auf deren Treppen er ausgesetzt gefunden worden sein soll, den Namen D'Alembert von einem Glaser Alembert, dessen Frau das Findelkind anvertraut worden sei, wenn auch von anderer Seite die ganze Aussetzungsgeschichte angezweifelt wird. Sicher ist, dass D'Alembert die Frau, welche ihn auferzog, für seine wirkliche Mutter hielt, dass er dagegen seine thatsächliche Mutter, eine Frau von Tencin, niemals kennen lernte. Sein Vater Destouches, ein Artilleriecommissär, setzte ihn in Besitz eines lebenslänglichen Einkommens von 1200 Francs, für deren Auszahlung durch Frau Destouches im Jahre 1781 der actenmässige Beleg vorhanden ist. Von der Encyclopédie werden wir in verschiedenen Kapiteln zu reden haben. Ein kurz nach dem Beginne der Encyclopédie erschienenes zweibändiges *Dictionnaire universel de mathématiques et de physiques* von Savérien aus dem Jahre 1752 kennen wir nur dem Titel nach.

---

[1]) *National Biography* X, 16—17 (London 1887, edited by Leslie Stephen). [2]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1786. (*Histoire* pag. 68—69.) [3]) Marie, *Histoire des sciences mathématiques et physiques* VIII, 172—174.

102. Kapitel.

Rechenkunst, besonders in Deutschland.

Das Zahlenrechnen kann als die unterste Stufe der Mathematik betrachtet werden und die Geschichte der Mathematik muss deshalb wenigstens berühren, wie es geübt und wie es gelehrt wurde. Wir können uns für den Rechenunterricht in Deutschland auf vorzügliche Vorarbeiten[1]) stützen und haben es auch früher gethan, wir konnten uns überdies mit manchen Originalschriften persönlich bekannt machen. Für den Rechenunterricht in den übrigen Ländern Europas fehlt uns leider nach beiden Richtungen die nothwendige Grundlage. Wir kennen weder eine brauchbare Zusammenstellung, noch eine genügende Menge von Schulbüchern über Rechenkunst, um selbst aus ihnen zu entnehmen, wie es mit dem Zahlenrechnen in England, in Holland, in Frankreich, in Italien und anderwärts bestellt war. Wir bitten deshalb, es nicht als Ueberhebung eines deutschen Schriftstellers betrachten zu wollen, wenn wir wesentlich über Deutsches hier berichten, wie es auch an früheren Stellen des II. Bandes und in diesem III. Bande S. 35—37 geschehen ist. Wir geben uns vielmehr der Hoffnung hin, auswärtigen Fachgenossen damit einen Anstoss zu geben, dass jeder derselben uns für seine Heimath ergänze.

Die Art, wie der Rechenunterricht sich in Deutschland im zweiten Viertel des 18. Jahrhunderts gestaltete, hängt aufs Engste mit der Entwicklung des Schulwesens in jener Zeit zusammen. Die Förderer des öffentlichen Unterrichtes waren besonders die Pietisten, ein Name, unter welchem Männer von tiefster werkthätiger Frömmigkeit zu verstehen sind. Sie fassten das Erziehungswerk im Geiste der christlichen Liebe auf. Sie wussten, dass in der Jugend der Samen gelegt werden muss, der später aufgehen soll, und sie gründeten, um Kinder aller Stände ihrem Unterrichte zu gewinnen, Schulen, welche ungleich den Lateinschulen und besser geleitet als die seitherigen Rechenschulen, mit denen sie Manches gemein hatten, ihren Schwerpunkt in den Realien besassen und deshalb Realschulen genannt wurden.

Christoph Semler[2]) (1669—1740) veröffentlichte schon 1705: *Nützliche Vorschläge von Aufrichtung einer mathematischen Handwerkerschule bey der Stadt Halle.* Er bezeichnete als *der Schulen Endzweck,*

[1]) Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung. (Leipzig 1888.) [2]) Allgemeine deutsche Biographie XXXIII, 694—698. Artikel von F. Jonas.

dass die Kinder in denselben zum gemeinen Leben praepariret werden, und da *die wenigsten Schulkinder zum Studieren, die meisten aber zu anderen Professionen und zu Handwerkern gelangten*, so müssten schon während der Schulzeit ihnen so viel als möglich Anschauungen gegeben werden. Materialien und Instrumente seien ihnen in natura oder im Modell vorzuzeigen, denn oculare Demonstrationen gäben am besten deutliche Vorstellungen.

Ein Gutachten der Berliner Akademie pflichtete Semler's Ansichten bei, und die erste Realschule wurde 1708 in Halle eröffnet. Sie hielt sich nur drei Jahre lang. Semler liess nicht von seinem Vorhaben und brachte es dahin, dass 1739 abermals ein Versuch gemacht wurde, der wahrscheinlich in Folge von Semler's baldigem Tode nicht mehr Glück hatte als der frühere.

Semler's geistiger Nachfolger war Johann Julius Hecker[1]) (1707—1768), der, als Sohn und Enkel von Schulmännern und nachdem er als Student an der Universität Halle den Einfluss von August Herrmann Francke, dem berühmten Gründer der Waisenanstalt, der mit Philip Jacob Spener an der Spitze der Pietisten stand, auf sich hatte wirken lassen, in doppelter Beziehung geeignet war, Semler's Werk fortzusetzen. Nachdem Hecker 1735 als Prediger und Schulinspector an das Militärwaisenhaus in Potsdam, dann 1738 als Prediger an die Dreifaltigkeitskirche in Berlin berufen worden war und in seiner Pfarrei aufs Thatkräftigste für Vermehrung und Verbesserung des niederen Schulunterrichtes eingetreten war, gab er 1747 eine Schrift heraus, welche ihrem Zwecke nach eine Wiederholung von Semler's Vorschlägen von 1705 genannt werden darf. Sie führte den Titel: *Nachricht von einer öconomisch-mathematischen Realschule, welche bei den Schulanstalten der Dreifaltigkeitskirche am Anfange des Maimonates dieses Jahres eröffnet werden soll.* Sie enthielt das Programm der aus einer ganzen Reihe von Classen, unter welchen wir eine mathematische, eine geometrische, eine physikalische hervorheben, geplanten Schule. Zu mehreren Classen sollte das Zeichnen hinzukommen. Die Methode sollte durchweg eine praktische, auf vielfache Anschauung und fortwährende Anwendung gerichtete sein. Der Unterricht in den alten Sprachen fiel nicht weg, wurde aber in neuer vereinfachender Weise ertheilt und liess die Realien zu weit ausgedehnterem Rechte kommen, als es in den Gelehrtenschulen der Fall gewesen war.

Schwierigkeiten aller Art, sowohl mit Rücksicht auf Beschaffung der nöthigen Geldmittel als auch auf Auffindung tüchtiger Lehrkräfte,

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XI, 208—211. Artikel von H. Krämmel.

stellten sich der Hecker'schen Realschule nicht weniger als dem Semler'schen Unternehmen entgegen, aber glücklicher als jenes fand diese die nothwendige Unterstützung bei der Bevölkerung und bei den Königen von Preussen und konnte sich erhalten und ausbreiten. Ein Umschwung in der öffentlichen Meinung gegenüber den leitenden Grundsätzen der Jugenderziehung, welcher sich erst in einer Zeit vollzog, die jenseits der Grenzen liegt, die wir uns gesteckt haben, sei nur mit wenigen Worten angedeutet.

Den Pietisten traten die Philantropen entgegen, an ihrer Spitze Johann Bernhard Basedow[1] (1723—1790). Aber wenn ihr ausgesprochenes Bestreben auf die Aufklärung des Menschengeschlechtes gerichtet war, mit welcher nicht früh genug begonnen werden könne, so mussten sie die realen Lehrgegenstände nicht minder bevorzugen, als es die Pietisten schon vorher gethan hatten. Ihr Ringen war ein Kampf um die Leitung der Schule, nicht um das, was in der Schule gelehrt werden sollte, wenigstens so weit es sich um mathematische Dinge handelte. Sehr weit gingen ja die Anforderungen nicht, welche man an den Inhalt des mathematischen Schulunterrichtes stellte, aber die Lehrart hob sich zusehends.

In ihr machte sich ganz besonders der Einfluss von Christian von Wolf geltend, der schon in seinem deutschen *Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften* sich dahin aussprach[2]): Es ist nicht genug, dass der Lehrer die Wahrheit sagt, sondern die Schüler müssen auch begreifen, dass es Wahrheit sei. Es ist aber ohne Erinnern klar, dass man den Nutzen von der Mathematik nicht zu erwarten hat, wenn nicht die von den alten Geometris gebrauchte Lehrart in allem auf das sorgfältigste in acht genommen wird. Denn nicht die mathematische Wahrheit, sondern die Ordnung, in welcher sie gründlich erkannt wird, ist das Mittel, wodurch der Verstand des Menschen geändert wird. Daher fällt der Nutzen der Mathematik weg, wenn man ihre Lehren auf gemeine Art vorträgt, nach welcher sie mehr in das Gedächtniss als in den Verstand gefasst werden. Man muss nicht allein in der Erklärung der Rechenkunst die Regeln zeigen, nach welchen man die verlangten Zahlen finden kann, sondern man muss auch deutlich begreifen, warum durch selbige Regeln die verlangten Zahlen können gefunden werden. Die Schüler müssen allezeit gefragt werden, warum sie dieses so und nicht anders machen, damit sie nicht allein den Grund der Rechnung einsehen und sie daher besser behalten, sondern auch

---

[1] Allgemeine deutsche Biographie II, 113—124. Artikel von Max Müller.
[2]) Wir citiren nach Unger S. 147.

gewöhnt werden, Nichts ohne Grund von Jemand anzunehmen, ingleichen in Allem, was sie sehen und hören, um seinen Grund sich zu bekümmern.

Diesen Grundsätzen gemäss ist auch die Arithmetik in Wolf's *Elementa matheseos universae* von 1741 behandelt, doch vorher erschienen schon andere Werke, deren wir gedenken müssen.

Christian Pescheck[1] (1676—1747), Lehrer der mathematischen Wissenschaften am Gymnasium seiner Vaterstadt Zittau, reicht mit seinen zahlreichen Schulbüchern, deren erstes, *Vorhof zur Rechenkunst*, schon 1708 erschien, in den vorigen Abschnitt zurück, zugleich aber auch über die Grenzen dieses Abschnittes hinaus, da eine neue Auflage seiner *Italiänischen Rechenstunden* noch 1762, eine ebensolche seiner *Allgemeinen deutschen Rechenstunden* gar noch 1790 gedruckt wurde. In der 1736 veröffentlichten 9. Auflage des schon genannten Vorhofes konnte Pescheck sich rühmen, dass 44 namhaft gemachte Schulmänner in allen Theilen Deutschlands sich seiner Schriften bedienten, und hat man — sagt der zuverlässige Berichterstatter, dem wir folgen — einige davon gelesen, so wundert man sich über den ungeheuern unverdienten Beifall, den sie fanden. Pescheck besass nur das besondere Geschick, dieselbe Sache ein wenig abgeändert unter neuem Titel immer wieder an den Mann zu bringen. Aber er hat die sehr bescheidenen Bedürfnisse der Schüler, des gemeinen Volkes und der ungeschickten Lehrer zugleich zu befriedigen gewusst und namentlich den letzteren durch eingestreute praktische Winke sich fast unentbehrlich gemacht.

Ganz anderen Werth besitzt die *Demonstrative Rechenkunst* von Christlieb von Clausberg[2] (1689—1751). Er war von jüdischen Eltern geboren und ist in wahrscheinlich schon männlichem Alter in Clausthal getauft worden. Er ertheilte in verschiedenen Handelsstädten, in Danzig (vielleicht seinem Geburtsort), Hamburg, Lübeck, Leipzig, Unterricht im Hebräischen und im Rechnen und war 1733 bis 1746 in königlich dänischem Finanzdienste, zugleich auch Lehrer des dortigen Kronprinzen. Das von uns schon genannte Werk gehört dem Aufenthalte in Leipzig an, wo es 1732, kurz vor Clausberg's Berufung nach Kopenhagen, erschien. Eine zweite Auflage[3]) ist von 1748. Nach dem Titel der *Demonstrativen Rechenkunst* liess Clausberg den Zusatz folgen: *Wissenschaft gründlich und kurz zu rechnen*, und er hat erfüllt, was beide Ueberschriften in Aussicht stellen. Er hat Rechnungsvortheile, welche ein zuverlässiges und rasches Rechnen

[1]) Poggendorff II, 410. — Unger S. 160—162. [2]) Allgemeine deutsche Biographie IV, 285 — Unger S. 149—160. [3]) Wir bedienten uns dieser 2. Auflage.

sichern, zu sammeln und anzugeben gewusst, er hat nirgend dem Leser zugemuthet, die Vorschriften auf Treu und Glauben für richtig zu halten, sondern Beweise seiner Sätze und seines Verfahrens angegeben, welche im Allgemeinen befriedigen können. Nur sehr ausnahmsweise finden sich ungenügende Beweise, wie z. B. für die Vertauschbarkeit der Factoren bei der Multiplication, welche daraus gefolgert wird[1]), dass 2 mal 3 mal 4 und 2 mal 4 mal 3 beidemal das Product 24 liefern.

Von einzelnen Vorschriften erwähnen wir, dass Clausberg beim Subtrahiren die dem Minuenden zu borgende Einheit nächsthöherer Ordnung dem Subtrahenden nach links vorrückend wieder zulegt[2]), dass er das Abziehen einer mit einer einzelnen Ziffer zu vervielfachenden Zahl von einer anderen Zahl in einem einheitlichen Denkacte vollziehen lässt, und dass von diesem das Anschreiben der Rechnung wesentlich vereinfachendem Verfahren bei der Division Gebrauch gemacht wird[3]). Von vielem Schreiben ist Clausberg überhaupt kein Freund. So verpönt er als eine üble Gewohnheit[4]) die Unsitte neben bei schriftlich zu bemerken, was bei Addition einer langen Zahlenreihe oder bei Multiplicationen zu der nächst höheren Ordnung hinüber zu ziehen ist, wenn er auch andrerseits Gedächtnissanstrengung durch Erlernen eines über 9 mal 9 hinausgreifenden grossen Einmaleins für überflüssig erklärt[5]). Clausberg lehrt nach altem Muster complementare Multiplication[6]) und Division[7]). Er wendet zwar nicht die alte Neunerprobe an, empfiehlt aber dafür um so dringender die Elferprobe[8]), während er eine besondere Abhandlung über die verschiedenen Proben in Aussicht stellt[9]).

Die Regeldetri ist die Grundlage aller praktischen Auflösungen, sei es dass sie einfach geübt wird, sei es in mehrfacher Wiederholung oder in Zusammenfassung, wobei die *Regel Quinque*[10]), beziehungsweise, wenn noch mehr Proportionen vereinigt werden, die *Regel Multiplex* oder *Conjointe*[11]) erscheinen, also diejenigen Regeln, die mit deutschem Namen der Kettensatz heissen. Alles was in der Welt anzutreffen, hat seine Schranken, sagt Clausberg[12]) und zeigt, dass nicht überall die Regeldetri angebracht sei, d. h. dass nicht immer unter den in einer Aufgabe vorkommenden Grössen eine Proportion

---

[1]) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst S. 85. [2]) Ebenda S. 65. [3]) Ebenda S. 109 und 146. [4]) Ebenda S. 60 und 104: Ich sehe nicht vor gut an, die Jugend in ihrer Blüthe zum Kriechen und Faullenzen anzugewöhnen, da man vielmehr ihre Sinnen, so viel als möglich, aufmuntern soll. [5]) Ebenda S. 461. [6]) Ebenda S. 466. [7]) Ebenda S. 585. [8]) Ebenda S. 678. [9]) Ebenda S. 678 und 704. [10]) Ebenda S. 722. [11]) Ebenda S. 769. [12]) Ebenda S.

stattfinde. Wenn ein 3 Fuss tiefer Brunnen in 4 Stunden gegraben werde, so könne die Frage, in welcher Zeit der Brunnen bis zu 100 Fuss vertieft werde, nicht nach der Regeldetri beantwortet werden, denn je tiefer man komme, um so langsamer gehe die Arbeit von statten, weil die Erde immer höher aus der Tiefe heraufgeschafft werden müsse. Ebensowenig genüge die Regeldetri zur Beantwortung der Frage, in welcher Zeit ein Gegenstand aus einer 72000 Fuss hohen Wolke zur Erde falle, wenn in der Nähe des Erdbodens in einer Secunde ein Raum von 20 Fuss durchfallen werde, denn es zeigt die unleugbare Erfahrung, dass, wenn ein schwerer Körper herunterfällt, seine Bewegung oder Geschwindigkeit im Fallen immerfort je mehr und mehr zunehme. Aehnliche Bedenken äussert Clausberg wiederholt, so wenn er das Gewicht des Brodes aus dem Roggenpreise durch indirecte Regeldetri abgeleitet hat und dann fortfährt[1]): Jedoch ist dieses Facit in der Praxi keineswegs als eine ausgemachte Sache anzunehmen, indem die Erfahrung mich belehret, als ich in einer berühmten Stadt auf Ansuchen der Becker bei einem Hochedlen Rath daselbst ein Tarif über die Gewichte der Kaufbrode nach allerhand Preisen des Getraydes vertiget, dass mir verschiedene andere Umstände bey dieser Sache berichtet worden, welche das vorige Facit allerdings verändern. Es ist mein Vorhaben anitzo nicht, die Ausfertigung einer solchen Tarif zu beschreiben. Jedoch nur von einem Umstande zu erwehnen, so hat man zu consideriren, wenn der Roggen theurer, dass der Becker auch die Kleyen theurer anbringet, welcher Nutzen hinwiederum der Schwere des Brods einigermassen zufliesset, und solches demnach am Gewichte schwerer macht.

Grössten Fleiss hat Clausberg auf die Zinsrechnung verwandt, und bei ihm dürfte zuerst die Vereinfachung der Rechnung vorkommen, dass wenn Kapitalien $K_1, K_2, \ldots K_n$ während $t_1, t_2, \ldots t_n$ Tagen sämmtlich zum gleichen Procentsatze p zinstragend angelegt sind, die Summe $K_1 t_1 + K_2 t_2 + \cdots + K_n t_n$ gebildet werden soll, bevor man den Zinsfuss berücksichtigt[2]). Das sind diejenigen Zahlen, welche man, nachdem sie durch 100 getheilt sind, in späterer Zeit die Zinszahlen genannt hat, und Clausberg's Rechnung weicht der Hauptsache nach nur darin von der späteren ab, dass das Jahr zu 365 Tagen, nicht zu 360 Tagen gerechnet wird, dass also der grosse Vortheil eines bequemen Factors $\frac{p}{36000}$, mit welchem jene Summe $K_1 t_1 + K_2 t_2 + \cdots + K_n t_n$ schliesslich zu vervielfachen ist, mangelt.

Zu den mathematisch interessanten Fragen gehört die der

[1]) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst S. 717. [2]) Ebenda S. 1139.

Summirung der unendlichen Reihe $\frac{1}{a} + \frac{2}{ba} + \frac{3}{b^2a} + \frac{4}{b^3a} + \cdots$. Clausberg[1] zerlegte dieselbe in folgende Unterreihen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{ba} + \frac{1}{b^2a} + \frac{1}{b^3a} + \cdots \\ + \frac{1}{ba} + \frac{1}{b^2a} + \frac{1}{b^3a} + \cdots \\ + \frac{1}{b^2a} + \frac{1}{b^3a} + \cdots \\ + \frac{1}{b^3a} + \cdots \\ + \cdots. \end{aligned}$$

Die Summen der in den einzelnen Zeilen vorhandenen geometrischen Reihen sind $\frac{b}{(b-1)a}$, $\frac{1}{(b-1)a}$, $\frac{1}{(b-1)ba}$, $\frac{1}{(b-1)b^2a}$, $\cdots$, und sie bilden selbst wieder die geometrische Reihe

$$\frac{b}{(b-1)a} + \frac{1}{(b-1)a} + \frac{1}{(b-1)ba} + \frac{1}{(b-1)b^2a} + \cdots = \frac{b^2}{(b-1)^2a}.$$

Von letzterer Summenformel ausgehend findet dann Clausberg[2] durch weitere Zerlegung die Summen der unendlichen Reihen von Brüchen, deren Nenner in geometrischer Progression ansteigen, während die Zähler die von 1 anfangenden Dreieckszahlen, sowie die gleichfalls mit 1 beginnenden Quadratzahlen sind.

Gleichungen als solche kommen bei Clausberg, der überhaupt nur sehr ausnahmsweise sich allgemeiner Buchstabenausdrücke bedient, nicht vor, wohl aber die *Regel Coeci* für unbestimmte Aufgaben[3] und die *Regel falsi simplicis* sowie *duplicis positionis*[4]. Setzen wir hinzu, dass Clausberg eine durch ihn selbst auf 32 Decimalstellen berechnete Tabelle der Briggischen Logarithmen der Zahlen 1 bis 100 zum Abdruck bringen liess[5], so sind schon zahlreiche Vorzüge der *Demonstrativen Rechenkunst* erwähnt, und dennoch haben wir zwei Gegenstände bisher vernachlässigt, deren erster die grosse Verbreitung des Werkes wesentlich veranlasste, deren zweiter uns zur Erwähnung anderer Schriftsteller hinüberführt.

Wir meinen in erster Linie die sehr ausführliche Behandlung der Wechselrechnung, welche Clausberg's dickes Buch für den Kaufmann geradezu unentbehrlich machte. Gab es doch damals eine Fülle von verschiedenen Maassen, Gewichten, Münzen, zum Theil sogar Rechnungsmünzen, die gar nie geprägt eine darum nicht minder

[1]) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst S. 1419. [2]) Ebenda S. 1422 bis 1426. [3]) Ebenda S. 1331 flg. [4]) Ebenda S. 1350 flg. [5]) Ebenda S. 1431—1434.

wichtige kaufmännische Bedeutung besassen, dass unsere Gegenwart kaum mehr im Stande ist sich hineinzudenken. Das gegenseitige Verhältniss aller dieser verschiedenen Einheiten, welches bald ein bleibendes, bald ein mit dem Curs wechselndes war, kam in Betracht, so oft in Folge von Handelsgeschäften Zahlungen von einem Orte nach dem anderen vorgenommen werden sollten. Gerade die Verschiedenheit der Münzsorten vermehrte die Anzahl der Möglichkeiten, die in Betracht gezogen werden mussten. Ein Leipziger konnte beispielsweise seine Schuld in Hamburg durch unmittelbaren Wechselverkehr ausgleichen, aber auch so, dass ein Umweg über Augsburg, über Amsterdam, über London gewählt wurde, und nun galt es, sich darüber Rechenschaft zu geben, welcher Zahlungsweg der vortheilhaftere sei. Wechselarbitrage[1]) wurde eine solche Aufgabe genannt, und der Name hat sich wie der Sinn desselben erhalten, wenn auch die Gattung der Werthpapiere, auf welche die Arbitrage sich bezieht, sich im Laufe der Zeit vielfach verschoben hat.

Der zweite Gegenstand, von welchem wir noch zu reden haben, ist die Berechnung des Interusurium. Wir haben (S. 50—51) erörtert, wie Carpzow sich mit der Aufgabe abfand, wie Leibniz in den A. E. von 1682 als Baarwerth der nach a Jahren zu zahlenden Schuld 1, unter der Voraussetzung, dass sie mit $\frac{1}{v}$ im Jahre sich verzinsen solle, den Ausdruck $\left(\frac{v}{v+1}\right)^a$ ermittelte, beziehungsweise $\left(\frac{20}{21}\right)^a$, sofern ein Zinsfuss von 5 Procent angenommen wurde. So klar und jeden Zweifel ausschliessend Leibnizens Darstellung gewesen war, blieb sie dennoch den Rechtsgelehrten unverständlich. Zwei derselben, Barth und Caspar Heinrich Horn, suchten das Abzuziehende, das eigentliche Interusurium, anstatt des Baarwerthes der später fälligen Forderung, und sie fassten, da Leibniz bei 5 Procent die Ermässigung der nach 1 Jahre fälligen Forderung um $\frac{1}{21}$ verlangte, seine Meinung so auf, als solle das Interusurium weiter im Verhältnisse der Zeit wachsen, also für 2 Jahre $\frac{2}{21}$, für 3 Jahre $\frac{3}{21}$ der Forderung betragen.

Ein Rechtslicentiat Gottfried August Hoffmann[2]) (1700 bis 1775) gab sich, wie es scheint, gar nicht die Mühe Leibnizens Aufsatz zu lesen, sondern fand die Berichte von Barth und Horn genügend, um 1731 in einer Schrift *Klugheit hauszuhalten oder Prudentia oeconomica nebst einem Anhange vom Interusurio* gegen Leibniz

[1]) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst S. 968 flg. [2]) Poggendorff I, 1127. Die Schreibart Hofmann scheint irrig zu sein.

und zugleich auch gegen Carpzow aufzutreten. Carpzow rechne den Baarwerth der nach n Jahren fälligen Forderung K bei 5 Procent als $K - \frac{nK}{20}$, Leibniz habe statt dessen $K - \frac{nK}{21}$ empfohlen, das richtige von ihm (Hoffmann) entdeckte Ergebniss sei $\frac{100\,K}{100 + 5\,n}$.

Gegen diesen Schriftsteller wandte sich Clausberg[1]) mit aller Entschiedenheit. Er hatte schon vorher[2]) Leibnizens Rechnung, welche bei einem Jahre die Rabattirung auf hundert, d. h. $\frac{100\,K}{105}$ fordert, genau erörtert, hatte erörtert, dass bei der Rabattirung in hundert, d. h. nach Carpzow's Vorschrift, der 20jährige 5procentige Rabatt die Forderung vernichten würde, hatte gefragt: „wie würde es alsdann erst aussehen, wenn es eine Schuld wäre, die länger als 20 Jahre noch zu laufen hätte; da man nach solcher Rechnung, von jedem 100 mehr als 100 abziehen sollte?“ Er hatte hinzugefügt, dass trotz der theoretischen Unrichtigkeit der Rabattirung in 100 dieselbe in Leipzig und in Italien kaufmännische Uebung sei, die keine Uebervortheilung in sich schliesse, weil es „eine recipirte Sache ist, wornach jeder Verkäufer beim Accord des Preises sich reguliret“. Er war dann zum *Interesse auf Interesse* übergegangen und hatte Zinseszins bei Rabattirung über Zeiträume von mehreren Jahren in Anwendung gebracht. So war er bei Hoffmann's Angriffen auf Leibniz angelangt, und Clausberg unterliess es nicht zu zeigen, dass Hoffmann den Aufsatz von 1682 gar nicht verstand, ihm vielmehr einen ihm ganz fremden Inhalt unterschob. Wir kommen auf den Streit zwischen Clausberg und Hoffmann noch zurück. Vorher wollen wir von einigen anderen Rechenbüchern reden.

Unter den Schriften, von welchen man vielleicht sagen kann, sie seien durch den Wunsch des Wettbewerbs mit der rasch ungemein beliebt gewordenen Demonstrativen Rechenkunst hervorgerufen worden, nennen wir die *Allgemeine Regel der Rechenkunst* von Caspar Franz de Rees[3]) (geboren 1690). Das Buch kam in holländischer Sprache heraus, wurde aber 1737 ins Französische, 1739 aus dem Französischen ins Deutsche übersetzt und in dieser letzteren Gestalt mehrfach neu aufgelegt. Was ihm solchen Beifall erwarb, war die Rees'sche Regel zur Auflösung von Aufgaben, bei denen Clausberg sich des Kettensatzes bediente, das Unterscheidende beider Regeln bestand in der Anordnung. Im Kettensatze war die kettenartige Verbindung der Glieder vorgeschrieben. Die Benennung jedes Gliedes in der Columne rechts musste der des nächsten Gliedes in der Columne links

[1]) Clausberg, Demonstrative Rechenkunst S. 1237 flg. [2]) Ebenda S. 1164 flg. [3]) Klügel V, 749—750 (s. v. Verhältniss). — Unger S. 170—171.

gleich sein, die Benennung des letzten Gliedes rechts mit der des Fragegliedes, welches die Columne links eröffnete, übereinstimmen. Dadurch übte der Aufbau der Glieder eine Selbstkritik, welche für Sicherheit der Rechnung werthvoll war, wenn sie auch gewisse Schwierigkeiten in sich schloss, sofern die Zeit bei Zinsrechnungen in den Kettensatz eintreten sollte, wovon uns allerdings bei Clausberg's Kettensätzen kein Beispiel begegnet ist. Bei der Rees'schen Regel ist dagegen der Aufbau der Glieder so, dass je zwei auf gleicher Zeile stehende Zahlen gleiche Benennung führen mussten und es in dem Belieben des Rechners lag, wie er die Zeilen aufeinander folgen lassen wollte. Denken wir uns beispielsweise die Aufgabe: Wieviel Mark Zins geben 800 Mark in $^3/_4$ Jahren, wenn 2800 Mark in 2 Jahren 280 Mark Zins gaben? Der Kettensatz ist

?	800
1	$^3/_4$
2	1
2800	280

und wird folgendermassen gelesen: Wie viele Mark Zins geben 800 Mark Kapital, 1 Mark Kapital steht $^3/_4$ Jahre, 2 Jahre stand 1 Mark Kapital, damit 2800 Mark Kapital 280 Mark Zins ergaben. Die Rechnung liefert $\frac{800 \cdot {}^3/_4 \cdot 1 \cdot 280}{1 \cdot 2 \cdot 2800} = 30$. Die Rees'sche Regel dagegen zeigt die Gestalt:

?	280 Zins
2800	800 Kapital
2	$^3/_4$ Jahre

Johann Christian Nelkenbrecher[1]), gestorben 1760, gab im Jahre 1752 in Leipzig und zwar im Selbstverlage *Logarithmische Tabellen zur Berechnung derer Wechselarbitragen* heraus. Ungleich bekannter wurde das nach des Verfassers Tode erstmalig 1762 und in 20. Auflage 1877 gedruckte *Taschenbuch eines Bankiers und Kaufmannes*, ein Nachschlagebuch allerersten Ranges insbesondere für Münz- und Maassvergleichungen.

In diesem Zusammenhange nennen wir auch den 1753 gedruckten *Traité des changes et des arbitrages* von Pierre Senebier[2]) (1715 bis 1778), Rechenmeister in Genf.

Martin Knutzen[3]) (1713—1751), Professor in Königsberg, scheint in seiner *Arithmetica mechanica oder Beschreibung eines compendiösen Rechenkästchens* von 1744 eine Erleichterung des Rechnens durch äussere Hilfsmittel beabsichtigt zu haben.

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXIII, 417—418. [2]) Poggendorff II, 903. [3]) Ebenda I, 1285—1286.

An der Spitze der lateinischen Schulen in Deutschland stand die Fürstenschule zu Pforta, und an ihr wirkte Johann Georg Gotthold Hübsch[1], dessen *Arithmetica portensis* von 1748 den Plan und zugleich das Muster dessen darstellt, was an seiner Anstalt gelehrt wurde und wie es gelehrt wurde. Drei Abtheilungen von Schülern waren unterschieden. Bei den unteren wurden die ganzen Zahlen und die Brüche nach dem langen Wege gelehrt, bei den mittleren die Praktik in Ganzen und Brüchen nebst der Regeldetri, bei den oberen die Decimalrechnung und Regeldetri. Offenbar versteht Hübsch unter den „Brüchen nach dem langen Wege", man solle mit den Brüchen als solchen rechnen, ohne sie in eine Summe von Stammbrüchen zu zerlegen, während die „Praktik" diese Zerlegung vorschrieb. Nach dem langen Wege war beispielsweise $\frac{7}{8} \cdot 3824 = \frac{7 \cdot 3824}{8} = \frac{26768}{8} = 3346$, nach der Praktik war

$$\frac{7}{8} \cdot 3824 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 3824 = 1912 + 956 + 478 = 3346.$$

Der Ausdruck langer Weg, der uns bei Hübsch begegnet, der aber auch bei anderen Schriftstellern der gleichen Zeit vorkommt, erinnert täuschend an das *ad majorem quisam* des Leonardo von Pisa (Bd. II, S. 14), und da dieser Schriftsteller die Zerlegung in Stammbrüche trefflich zu handhaben wusste, so ist nicht ausgeschlossen, dass sie es war, welche er *minoris guise* nannte, die spätere wälsche Praktik der deutschen Rechenmeister. Eigenthümlich genug, dass ein Schriftsteller des 18. Jahrhunderts uns einen bisher unverstandenen Ausdruck des 13. Jahrhunderts deutlicher machen musste, ein neuer Beleg für die erhaltende Kraft der Gewohnheit.

Die Rechenkunst war für Hübsch *wie ein Schleif- oder Wetzstein, und man lernt distinct, ordentlich und vorsichtig denken.* Diesem Zwecke gemäss ist weit mehr Gewicht auf den Sinn der Methoden als auf ihre Einübung gelegt, das Uebungsmaterial ist beschränkt, die Erklärungen werden auf ihre Richtigkeit, die Rechnungsvortheile auf ihre Anwendbarkeit, die Rechnungsproben auf ihre Zuverlässigkeit untersucht.

Hübsch empfiehlt das Kopfrechnen, welches allerdings nach und nach von selbst entstehe, wenn man viel mit der Feder gerechnet habe und fest darin sei. Man hat diesem Ausspruche entnommen, dass Hübsch das Kopfrechnen der Zeit nach erst später und nicht gleich zu Anfang des Unterrichtes eingeübt wünschte. Aber seine Hochschätzung desselben spricht sich deutlich in der Verwunderung aus, dass seines Wissens in keiner Practic ex professo davon gehandelt

---

[1]) Unger S. 140, 148, 162, 168.

sei, ungeachtet es bei den meisten concurrire; es sei das aller geschwindeste und bequemste Rechnen, da es ohne allen Apparat, allerwegen und zu allen Zeiten, sogar im Finstern geschehen könne. Die hierin enthaltene Anklage gegen andere Werke ist allerdings, Clausberg gegenüber, wie wir uns erinnern (S. 495), nicht gerechtfertigt.

Hübsch war der Erste, der beim schriftlichen Rechnen auf Sorgfalt in der äusseren Darstellung sah, der auf Reinlichkeit, Deutlichkeit und Ordnung Gewicht legte, welche letztere besonders bei dem Untereinanderschreiben von Zahlen die genaueste Beachtung zu finden habe.

Wir kehren jetzt endlich zu Christian von Wolf und seinen *Elementa matheseos universae* von 1741 zurück (S. 494). Die in dem I. Bande enthaltenen *Elementa arithmeticae* stellen sich als ein wissenschaftliches Buch dar, aus welchem wohl Niemand das Rechnen gelernt haben wird, der es nicht schon konnte, welches aber die Begründung und den Beweis der Vorschriften sich angelegen sein liess.

Wir heben nur ganz Weniges hervor. Wolf steht in der Division zwischen der alten und der neuen Zeit, indem er sowohl die Division über sich als die unter sich lehrt[1]). Er beweist die Vertauschbarkeit der Factoren bei der Multiplication und zwar folgendermassen[2]). Zwischen der Einheit und dem Multiplicator findet das gleiche Verhältniss statt wie zwischen dem Multiplicandus und dem Producte, d. h. es ist $1 : A = B : AB$ und $1 : B = A : BA$. Ferner bleibt ein Verhältniss, etwa das von 1 zu A, ungeändert, wenn jedes seiner Glieder mit dem Gleichen, etwa mit B multiplicirt wird, folglich ist $1 : A = B : BA$. Die erste und dritte der hier angeschriebenen Proportionen stimmen in den drei ersten Gliedern überein, also müssen auch die vierten Glieder übereinstimmen, d. h. $AB = BA$ sein. Auch die Regel der Multiplication von Brüchen versieht Wolf mit einem Beweise[3]). Es sei $\frac{A}{B} = A : B = F$ und $\frac{C}{D} = C : D = G$, dann ist auch $B : A = 1 : F$ und $D : C = 1 : G$. Proportionen dürfen Glied für Glied mit einander vervielfacht werden, somit wird $BD : AC = 1 : FG$, beziehungsweise $\frac{AC}{BD} = \frac{FG}{1} = FG$ und damit das gesuchte Product gefunden sein. Wir wollen diese Beweisführungen keineswegs als tadelfrei bezeichnen, aber es waren immerhin Beweise und so der höhere Standpunkt der Rechenkunst gewonnen, auf welchen wir oben hingewiesen haben.

Am Anfange der Arithmetik ist eine mindestens auffallende

---

[1]) Wolf, *Elementa matheseos* I, 37–38, § 117. [2]) Ebenda I, 55–56, § 207. [3]) Ebenda I, 62, § 239.

Erklärung der Aehnlichkeit gegeben[1]: Dinge seien ähnlich, bei welchen das dasselbe ist, wodurch sie sich unterscheiden sollen. Wolf will seine Erklärung Leibniz nachgebildet haben. Dieser sage nämlich[2]: ähnlich sei, was nicht zu unterscheiden sei, wenn es nicht gleichzeitig vorhanden sei. Wir haben (S. 33) ungefähr diesen Wortlaut kennen gelernt.

In einem anderen Abschnitte des I. Bandes der Elemente, in den *Elementa Analyseos mathematicae* spricht sich Wolf über negative Zahlen aus[3]. Sie sind, sagt er, das Nichtvorhandensein der wahren Grössen, durch welche sie verstanden werden, sind also selbst keine wahren Grössen.

Es ist von Interesse, dieser Aeusserung die Meinung D'Alembert's gegenüber zu halten. Wir haben (S. 490) von seiner Mitwirkung an der Encyclopédie gesprochen. Unter dem Worte négatif sagt er, es sei nicht leicht den Begriff der negativen Grössen festzustellen, und einige geschickte Leute hätten sogar dazu beigetragen ihn durch die darüber gegebenen ungenauen Mittheilungen vollends zu verwirren. Von der negativen Grösse sagen, sie sei weniger als Nichts, heisse etwas Unbegreifliches aussprechen. Weiter unten fährt er fort, es sei ziemlich natürlich zu folgern, dass die negativen Grössen, denen man bei Rechnungsverfahren begegne, thatsächlich reelle Grössen seien, mit denen man einen anderen Begriff zu verknüpfen habe, als der war, den man vorausgesetzt hatte. In den *Opuscules mathématiques*, welche D'Alembert 8 Bände stark von 1761—1768 herausgab, über welche wir aber nicht mehr berichten dürfen, hat er sich dann noch viel bestimmter ausgesprochen.

Vielleicht hing es mit dem wissenschaftlich gesteigerten Ansehen der Rechenkunst und der Mathematik im Allgemeinen zusammen, vielleicht mit ihrer nachgerade dem Widerwilligsten sich aufdrängenden Unentbehrlichkeit, dass in Deutschland Bücher über die mathematischen Aufgaben anderer Wissenschaften, der Theologie und der Jurisprudenz, entstanden.

Johann Bernhard Wiedeburg[4] (1687—1766), seit 1718 ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Jena, an welcher er seit 1739 auch theologische Vorlesungen hielt, gab 1730 eine *Mathesis biblica septem speciminibus comprehensa* heraus, Johann Jacob Schmidt, Prediger zu Peest und Balow, 1736 einen *Biblischen*

[1] Wolf, *Elementa matheseos* I, 18, § 24: *Similia sunt, in quibus ea eadem sunt, per quae a se invicem discerni debebant.* [2] Ebenda I, 19, § 27: *Similia quae non possunt distingui nisi per compraesentiam.* [3] Ebenda I, 237, § 17. [4] Poggendorff II, 1316—1317. Allgemeine deutsche Biographie XLII, 379—380. Artikel von S. Günther.

Mathematicus oder Erläuterung der Heiligen Schrift aus den Mathematischen Wissenschaften, nachdem allerdings Samuel Reyher[1]) (1635—1714), Professor der Mathematik in Kiel, den wir im XVI. Abschnitte hätten erwähnen sollen, 1679 mit einer *Mathesis mosaica sive Loca Pentateuchi mathematica mathematice explicata, cum appendice aliorum S. Script. Locorum Mathematicorum* vorausgegangen war. Wiedeburg folgt in der Anordnung der erklärungsbedürftigen Bibelstellen der Reihenfolge der biblischen Schriften, Schmidt dem mathematischen Inhalte, so dass er zuerst von der biblischen Arithmetik, dann von der biblischen Geometrie, von der biblischen Statik, Architektur, Astronomie, Horographie, Optik handelt. Einen anderen Unterschied konnten wir zwischen beiden Werken, welche wir von Augenschein kennen, nicht entdecken, auch nichts Erwähnenswerthes in ihnen finden, es sei denn, dass wir bei Spitzfindigkeiten verweilen wollten, welche vielleicht dem Theologen, aber keinenfalls dem Mathematiker von Interesse sein können.

Johann Friedrich Polack[2]) (1700—1772), Professor an der Universität zu Frankfurt an der Oder, wo er abwechselnd Jurisprudenz, Mathematik, dann wieder Jurisprudenz, zuletzt Oekonomie, Polizei und Cameralwissenschaften lehrte, gab 1734 eine *Mathesis forensis* heraus, von welcher 1739, 1756, 1770 neue Auflagen nöthig wurden[3]). Auch Johann Friedrich Unger gab 1743 und 1744 Beiträge zur Mathesis forensis heraus, wodurch sich gleichfalls bestätigt, dass die Juristen das Bedürfniss nach derartigen Schriften besassen, was andrerseits wieder ihre Anspruchslosigkeit beweist. Polack hatte aber seine mathematischen Kenntnisse in den Vorlesungen Jacob Hermann's in Frankfurt erworben, und man gewinnt einen traurigen Einblick in das, was damals der Mathematiker an einer deutschen Hochschule lehrte und lehren durfte, wenn man erfährt, dass Hermann durch abstracte Darstellung der Regeln seine Zuhörer entmuthigte, die sich bis auf zwei, unter welchen Polack war, in den ersten sechs Wochen verliefen, ehe Hermann noch die Hälfte der Geometrie abgehandelt hatte. Die Mathesis forensis lässt vollends nicht erkennen, dass Polack aus seiner Ausdauer grossen Nutzen gezogen hätte. Mathematisch interessant ist nur der Abschnitt von der Berechnung des Interusuriums, in welchem sich Polack in der ersten Auflage von 1734 vollständig

[1]) Allgemeine deutsche Biographie XXVIII, 354—358. Artikel von K. [2]) Ebenda XXVI, 381, wo in Folge eines Druckfehlers das Erscheinungsjahr der *Mathesis forensis* 1743 statt 1734 heisst. [3]) Wir bedienten uns der 3. Auflage von 1756, deren Vorrede wir entnahmen, was im Text über Unger gesagt ist. In der Vorrede zur 2. Auflage von 1739 steht das, was wir über Jacob Hermann's Vorlesungen mittheilen.

auf die Seite von Gottfried August Hoffmann gegen Carpzow sowohl als gegen Leibniz stellte (S. 499). Es bedurfte des Eingriffes einer einflussreichen Persönlichkeit, um Polack wenigstens einigermassen anders zu stimmen. Georg Bernhard Bilfinger war, wie wir wissen (S. 485), 1725—1731 in Petersburg, von wo er als Professor der Theologie nach Tübingen zurückkehrte. Seit 1735 war er in Regierungsgeschäften in Stuttgart thätig. Bilfinger also schickte Polack eine Abhandlung zu, in welcher er Leibnizens Rechnung vertheidigte und aufdeckte, wie sehr man sie missverstanden hatte. Polack nahm die Abhandlung wörtlich in seine 2. Auflage auf und gestand zu, mathematisch sei gegen Leibniz nichts einzuwenden, als Jurist dagegen müsse man sich für Hoffmann entscheiden. Dieser hatte nämlich auch eine Abhandlung eingesandt, welche gleichfalls zum Abdrucke kam: *Gottfried August Hoffmanns*[1]) *J. V. L. Demonstrationen von richtiger Berechnung des Interusurii, worinnen zugleich das, was von dieser Materie in dem Anhange ermeldten Autoris seiner Prudentiae Oeconomicae befindlich ist, wider die von Herrn C. von Clausberg in dessen demonstrativer Rechenkunst gemachte Einwürfe vertheidigt wird.* Hoffmann setzt sich auf das hohe Pferd, indem er erklärt, es sei ziemlich gleichgiltig, ob Leibniz wirklich empfohlen habe oder nicht, $\frac{nK}{21}$ als Interusurium von einem in n Jahren fälligen zu 5 Procent verzinslichen Kapitale K in Abzug zu bringen. Bei den Juristen heisse dieses Verfahren nun einmal Leibnizische Rechnung, und somit sei er berechtigt gewesen, es unter diesem Namen anzugreifen. Aber auch Leibnizens wirkliches Verfahren, die herabgeminderte Forderung in der Höhe von $K \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^n$ anzusetzen sei falsch, weil ungesetzlich. Er verlange Zins von den Zinsen, und dieses sei verboten, man möge sich winden, wie man wolle. Die 3. Auflage der Mathesis forensis unterscheidet sich in diesem Abschnitte in nichts von der ihr vorhergehenden.

103. Kapitel.

Lehrbücher der Elementargeometrie. Parallelenlehre. Saccheri.

Wenden wir uns den elementargeometrischen Leistungen zu, so wollen wir den Stoff in der Reihenfolge anordnen, dass wir zuerst einige Werke besprechen, welche den ganzen Umfang der niederen Geometrie betreffen, sodann solche Werke, welche nur einzelnen

[1]) sic!

Theilen der Geometrie gewidmet sind, endlich Abhandlungen ganz besonderen Inhaltes.

Pierre Varignon war 1722 gestorben (S. 214). In seinem Nachlasse fanden sich *Élémens de mathématique* vor, welche 1731 im Druck herausgegeben wurden. Sie beginnen mit *Élémens d'algèbre et d'arithmétique* auf 66 Seiten, die wir keine Veranlassung gehabt haben im vorigen Kapitel zu erwähnen. Sie enthalten nichts von besonders bemerkenswerther Natur. Dann aber folgen *Élémens de géométrie* auf 156 Seiten in neuer Seitenzählung, eine Geometrie von überall durchblickender Eigenart, die philosophische Geistesrichtung ihres Verfassers dadurch zu erkennen gebend, dass sie den Definitionen und Axiomen ein grosses Gewicht beilegt und grade in dieser Beziehung sich manche Neuerung gestattet. Ein Axiom ist es z. B. für Varignon, dass es zwischen den Umrandungen zweier Gebilde nur eine kürzeste Entfernung gebe[1]), und an dieses Axiom schliesst sich im I. Buche von den Linien die Definition der Geraden als kürzeste Entfernung zweier Punkte. Die Ebene wird alsdann als diejenige Fläche bezeichnet, welche eine Gerade mit allen ihren Punkten berühren kann[2]). Varignon kommt dann bald zum Begriffe des rechten Winkels und der Senkrechten[3]). Den wichtigen Satz, dass jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke gleichweit von deren Endpunkten entfernt sei, beweist er durch Umklappen der Figur um jene Senkrechte[4]). Parallel heissen zwei derselben Ebene angehörende Gerade, welche gegen eine dritte Gerade gleich geneigt sind[5]). Bekanntlich ist diese bei Varignon erstmalig auftretende Erklärung später häufig angewandt worden.

Auf die Definition der Ebene kommt das II. Buch von den Oberflächen zurück und spricht dabei als Zusatz aus[6]), wie die gerade Linie die kürzeste von allen sei, die man zwischen zwei Punkten ziehen könne, so sei die Ebene die kleinste aller Oberflächen von übereinstimmender Begrenzung. Schon im I. Buche war bewiesen worden[7]), dass der Peripheriewinkel durch die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln enthaltenen Kreisbogens gemessen werde. Im II. Buche dient dieser Satz zur Bestimmung der Winkelsumme des Dreiecks[8]). Beschreibt man um das Dreieck einen Kreis, wovon die Möglichkeit

---

[1]) Varignon, *Élémens de géométrie* pag. 4: *Entre les extrémités de deux grandeurs il n'y a qu'une mesure qui soit la plus courte.* [2]) Ebenda pag. 5: *On appelle plan une surface que tous les points d'une ligne droite peuvent toucher.* [3]) Ebenda pag. 6. [4]) Ebenda pag. 10. [5]) Ebenda pag. 17: *Deux lignes droites AC et BD dans le même plan également inclinées sur la ligne EH ... sont appellées parallèles.* [6]) Ebenda pag. 38. [7]) Ebenda pag. 35. [8]) Ebenda pag. 43

auch bereits im I. Buche nachgewiesen worden war[1], so haben die drei Dreieckswinkel als Peripheriewinkel auf Bögen, welche sich an einander anschliessen, zusammen den halben Umkreis oder zwei Rechte als Maass. Aus der nunmehr bekannten Winkelsumme des Dreiecks folgt der Satz vom Aussenwinkel des Dreiecks[2]. Ferner folgt aus der Betrachtung des umschriebenen Kreises die Gleichheit von Winkeln im gleichschenkligen Dreiecke als Peripheriewinkel auf Bögen mit gleichen Sehnen[3]). Die Betrachtung von Parallelogrammen führt zu dem Satze von der Gleichheit paralleler Strecken zwischen Parallelen und als Sonderfall zu der Gleichheit der Senkrechten zwischen zwei Parallelen. Aus ihr aber folgt als Zusatz, dass zwei Parallele ins Unendliche verlängert einander niemals treffen[4]).

Das III. Buch enthält eine Proportionenlehre, das IV. Buch Anwendungen auf Verhältnisse von Strecken und durch sie gebildete Figuren. Hier erscheint erst der pythagoräische Lehrsatz[5]) als eine der drei Möglichkeiten in den gegenseitigen Beziehungen von Dreiecksseiten $BC^2 \lesseqgtr AB^2 + AC^2$. Mit dem V. Buche von den Körpern schliesst die *speculative Geometrie* ab.

Eine *praktische Geometrie* bildet mit drei Kapiteln von der Grösse und Lage gerader Linien, von Flächenmessungen, von Körpermessungen eine besondere Abtheilung des Werkes. Wir erwähnen aus dem 1. Kapitel eine auf Bewegung gestützte Dreitheilung des Winkels[6]). Man sucht (Fig. 75) den dritten Theil des Winkels AZD. An einen Zirkel GEH wird ein zweiter FZB derart befestigt, dass $EBZF$ ein in allen Eckpunkten bewegliches gleichseitiges Viereck ist. Auf den Schenkeln ZD, ZA des zu theilenden Winkels werden die Stücke ZX, ZR von der Länge EB abgeschnitten, und dann wird der Doppelzirkel so an den Punkt Z angelegt, dass EBH durch X, EFG durch R geht. Nun ist sowohl $\triangle EBZ$ als $\triangle BZX$ gleichschenklig. Als Aussenwinkel von $\triangle EBZ$ ist $\angle ZBX = ZXB = 2ZEX$, und als Aussenwinkel von $\triangle EZX$ ist

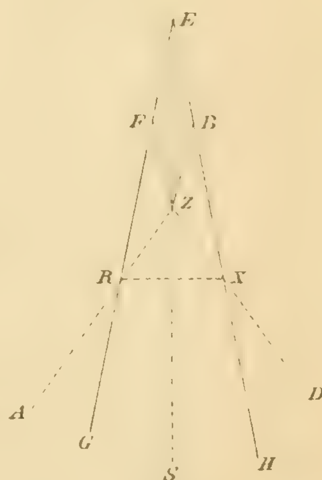


Fig. 75.

[1] Varignon, *Élémens de géométrie* pag. 22. [2]) Ebenda pag. 43. [3]) Ebenda pag. 44. [4]) Ebenda pag. 50. [5]) Ebenda pag. 65. [6]) Ebenda pag. 101.

$\angle XZS = ZEX + ZXE = 3 ZEX$. Genau ebenso erkennt man $\angle RZS = 3 ZER$, mithin $\angle AZD = 3 GEH$ oder $\angle GEH = \frac{1}{3} AZD$. Bei Vermessungsarbeiten auf dem Felde soll man sich einer Vorrichtung bedienen, welche kurzweg das Instrument genannt ist[1]. Es besteht aus einem massiven in Grade eingetheilten Halbkreise mit einem festen Durchmesser und einem um dessen Mittelpunkt drehbaren Diopterlineale, welches die Winkel zu messen gestattet.

Mittels dieses Instrumentes werden im 2. Kapitel die verschiedensten topographischen Aufnahmen vorgenommen[2]; dann kehrt Varignon zu theoretisch Interessanterem zurück, zu Theilungen von geradlinig begrenzten Figuren mittels gerader Linien[3]).

Aus dem 3. Kapitel erwähnen wir nur die letzte Aufgabe der Ausmessung beliebig umgrenzter ganz unregelmässiger Körper[4]). Man bringt den Körper in ein parallelepipedisches Gefäss und schüttet Wasser dazu, bis der Körper vollständig überdeckt ist, worauf man sich die Höhe des Wassers durch einen Strich bemerkt. Bei der alsdann vorgenommenen Entfernung des Körpers sinkt das Wasser im Gefässe bis zu einer neuerdings durch einen Strich zu bemerkenden Höhe. Das Parallelepipedon zwischen den beiden am Gefässe angebrachten Strichen ist genau das Maass des Körpers.

Diese letztere Vorschrift dürfte eine althergebrachte Methode von Praktikern sein. Jedenfalls findet sie sich genau ebenso in einem fast gleichzeitig mit Varignon's nachgelassenem Bande erschienenen recht unbedeutenden deutschen Buche, in der *Praxis Geometriae* von Johann Friedrich Penther[5]) (1693—1749). Der Verfasser war seit 1720 in gräflich Stollbergischem Bergdienste und wurde 1736, vielleicht in Folge der beifälligen Aufnahme des genannten Buches von 1732, Professor der Mathematik und der Oekonomie an der Universität Göttingen. Die sehr genügsamen Praktiker waren eben durch den mehr als dürftigen Inhalt, der sich auf die theils zeichnende theils rechnende Auflösung der leichtesten geometrischen Aufgaben und auf Anweisungen zum Feldmessen beschränkt, so hoch befriedigt, dass das Buch es bis zu einer 8. Auflage brachte, welche 1776 in Augsburg erschien.

Etwas länger müssen wir bei dem geometrischen Theile der *Elementa matheseos* von Christian von Wolf verweilen. Ziehen doch seine Definitionen durch den Vergleich mit denen Varignon's unwillkürlich unsere Aufmerksamkeit auf sich. Wir nennen einige

---

[1]) Varignon, *Élémens de géométrie* pag. 121. [2]) Ebenda pag. 133—139. [3]) Ebenda pag. 139—148. [4]) Ebenda pag. 155. [5]) Poggendorff II, 399—400.

derselben. Diejenige Linie ist gerade, bei welcher jeder Theil dem Ganzen ähnlich ist[1]. Wir dürfen in Erinnerung bringen, dass Wolf den Begriff der Aehnlichkeit schon in der Arithmetik (S. 503) erörtert hatte. Eine Oberfläche ist eine Ebene, wenn von jedem Punkte des Umfanges nach jedem anderen Punkte ebendesselben eine Gerade ganz in der Oberfläche gezogen werden kann[2]). Linien sind parallel, wenn sie überall die gleiche Entfernung von einander bewahren, und demgemäss können auch ins Unendliche verlängerte Parallele nicht zusammentreffen[3]. Eine Figur ist regelmässig, wenn ihre Seiten und ihre Winkel alle unter einander gleich sind[4]).

Der angedeutete Vergleich zeigt einen wesentlichen Gegensatz: Varignon bemüht sich erst zu zeigen, dass gewisse geometrische Eigenschaften an sich möglich sind, und erst dann giebt er mit jenen Eigenschaften behafteten Gebilden diesen oder jenen Namen. Wolf kümmert sich nicht um die Möglichkeit dessen, was er in seinen Definitionen von dem erklärten Raumgebilde verlangt.

Alle erwähnten Definitionen gehören noch dem I. Kapitel der Principien der Geometrie an. Das II. Kapitel ist einigen grundlegenden Sätzen gewidmet. Wolf versteht darunter Vorschriften über das Zeichnen von Figuren auf dem Papiere, über das Abmessen von Geraden und von Winkeln auf dem Papiere und auf dem Felde, über das Uebertragen einer Figur von dem Felde auf das Papier. Dabei wird erwähnt, welcher Messschnüre und Messketten, welcher Lineale, welcherlei Federn beim Zeichnen, welcher Winkelmesswerkzeuge man sich bedienen solle. Ein kleinerer Halbkreis zum Auftragen von Winkeln auf dem Papiere heisst allgemein *Instrumentum transportatorium*[5]).

Im III. Kapitel von den Eigenschaften der geraden Linien und der Dreiecke beginnen die eigentlichen Sätze der Geometrie. Einige im engsten Zusammenhange stehende sind folgende. Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse grösser als jede Kathete[6]), folglich ist die Senkrechte die kürzeste Gerade, welche von einem Punkte nach einer Geraden gezogen werden kann[7]), und die Entfernung eines Punktes von einer Geraden wird durch die Senkrechte gemessen[8]).

---

[1]) Wolf, *Elementa matheseos* I, 98, § 17: *Linea recta est cujus pars quaecumque est toti similis.* [2]) Ebenda I, 100, § 36: *Planum est, si e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.* [3]) Ebenda I, 103, § 81—82: *Linea parallela est alteri, si ubique eandem ab ea distantiam servat. Lineae ergo parallelae in infinitum continuatae non concurrunt.* [4]) Ebenda I, 104, § 106: *Figura regularis est figura aequilatera et aequiangula.* [5]) Ebenda I, 111, § 153. [6]) Ebenda I, 123, § 220. [7]) Ebenda I, 123, § 224. [8]) Ebenda I, 124, § 225.

Da Parallele überall gleiche Entfernungen haben, müssen demnächst alle Senkrechten aus Punkten einer Geraden auf die parallele Gerade von gleicher Länge sein[1]. Hieraus folgert aber Wolf den Satz, dass die Senkrechte auf eine Gerade auch auf der parallelen Geraden senkrecht stehen muss[2]). Sei (Fig. 76) $HI \parallel KL$ und $AB \perp KL$, so muss auch $AB \perp HI$ sein. Man mache $BD = BE$ und errichte in D und E die beiden Senkrechten DC, EG bis zum Durchschnitte mit der HI, so muss $DC = EG$ sein. Ueberdies ist $\angle D = E$, also sind die Dreiecke BCD, BGE congruent und $BC = BG$ sowie $\angle u = y$. Weil $x + u = o + y =$ einem Rechten, muss $x = o$ sein. Aber AB ist sich selbst gleich, also sind die Dreiecke BAC, BAG congruent und $\angle BAC = BAG =$ einem Rechten.

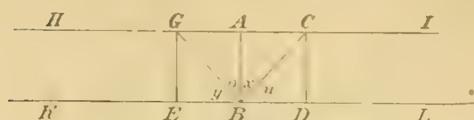


Fig. 76.

Wir übergehen die noch folgenden planimetrischen Kapitel. In der stereometrischen Abtheilung machen wir auf den in Gestalt eines Scholium auftretenden Ausspruch aufmerksam, eine Ebene heisse einer anderen parallel, wenn beide überall gleiche Entfernung von einander haben[3]).

Nach der Geometrie folgt eine Trigonometrie, aus welcher uns namentlich ein Satz[4]) hervorhebenswerth erscheint, weil er in die Klasse derjenigen Betrachtungen fällt, welche uns erst einmal bei Cotes (S. 397) vorgekommen sind, und welche sich auf beim Messen unterlaufene Irrthümer beziehen. Seien (Fig. 77) die beiden Strecken AB, AC genau gemessen, die Messung des Winkels bei A aber mit einem Fehler behaftet, so dass statt der richtigen Lage AC die AD in die Zeichnung eingetragen wurde, wodurch auch BC in die unrichtige Lage BD mit dem Fehler in der Längenausmessung $BD - BC = ED$ gelangte, indem CD ein Kreisbogen ist, welcher um A mit dem Halbmesser AC, CE ein eben solcher, welcher um B mit dem Halbmesser BC beschrieben ist. Bei der Kleinheit beider Bögen

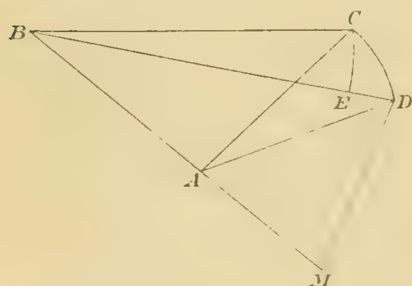


Fig. 77.

[1] Wolf, *Elementa matheseos* I, 124, § 226. [2] Ebenda I, 124, § 230. [3] Ebenda I, 184, § 498. [4] Ebenda I, 228, § 58—60

können sie als gerade Linien betrachtet werden, welche die rechten Winkel ACD, BCE, CED hervorbringen. Zieht man von $\angle BCE = ACD$ den $\angle ACE$ ab, so bleibt $\angle BCA = DCE$. Nun ist der $\sin DCE = \sin BCA = \frac{DE}{CD}$. Dabei ist CD das Maass des Fehlers von $\angle A$, und bleibt dieses unverändert, so wachsen gleichzeitig DE (der Fehler von BC) und $\sin BCA$, sowie $\angle BCA$ selbst. Jener Fehler DE wird daher um so geringer, je kleiner $\angle BCA$ ist. Daraus folgt, dass man den Standpunkt A so wählen soll, dass er erheblich näher bei einem der Punkte B, C, deren unzugängliche Entfernung durch Rechnung ermittelt werden soll, als bei dem anderen liege, damit $\angle BAC$ stumpf und $\angle BCA$ recht spitz ausfalle.

Ein in Frankreich sehr beliebtes Lehrbuch der Geometrie jener Zeit waren die *Institutions de géométrie* von 1746 des Abbé De la Chapelle[1] (etwa 1710—1792), welcher königlicher Censor in Paris und Mitglied gelehrter Gesellschaften in Lyon und Rouen war. Wir selbst kennen das Werk nicht, aber wenn wir nach des gleichen Verfassers *Traité des sections coniques et autres courbes anciennes* von 1750 urtheilen dürfen, welches nicht geringerer Beliebtheit sich erfreute und noch 1791 in deutscher Uebersetzung durch den bekannten Technologen Böckmann herausgegeben wurde, so muss es sich ebenso durch Vollständigkeit wie durch Fasslichkeit empfohlen haben und mehr durch zahlreiche geschichtliche Bemerkungen als durch irgend neue Beweisführungen oder Auffassungen sich auszeichnen. Einem Schriftsteller, welcher die *Institutions de géométrie* wiederholt anführt[2]), entnehmen wir, dass De la Chapelle unter den Neueren sich am Ausführlichsten mit den Bienenzellen beschäftigt habe[3]), denen bereits Pappus in der Einleitung zum V. Buche seiner Sammlung nachrühmte, dass sie in ihrer sechseckigen Gestalt keinerlei Raum verloren gehen lassen, und dass er geometrische Grundsätze bewies[4]) wie z. B. den, dass zwei Grössen, welche die Grenze einer und derselben dritten sind, einander gleich sein müssen, und den, dass die Grenze eines zusammengesetzten Verhältnisses aus den Grenzen der einzelnen Verhältnisse zusammengesetzt sei.

In England war, wie wir wissen (S. 489), die ausschliessliche Benutzung der Euklidischen Elemente die Regel. Um so lauter spricht es für die Bedeutung eines Schriftstellers, wenn er es wagte,

---

[1]) Poggendorff I, 1338. [2]) Van Swinden, Elemente der Geometrie (deutsch von C. F. A. Jacobi. Jena 1834) S. XI, 139, 202, 206, 208. [3]) De la Chapelle, *Institutions de géométrie* II, 217—233 (der 4. Ausgabe von 1765). [4]) Ebenda II, § 455 sqq.

dort als Neuerer aufzutreten. Thomas Simpson[1] (1710—1761) begann als Seidenweber, wozu sein Vater ihn bestimmte. Ein Astrolog benutzte ihn als Rechner, und bald überflügelte er seinen Lehrer und Meister. Von der Astrologie kam Simpson zur Astronomie und Mathematik. Er siedelte 1732 nach London über, wo er seine theils durch eigene, theils durch angeheirathete Kinder schon zahlreiche Familie wieder durch Seidenweberei ernährte. Nebenbei arbeitete er an *A new treatise of fluxions*, welches Werk 1737 erschien und durch Klarheit und Fasslichkeit grossen Anklang fand. Jetzt drängten sich Schüler in Menge zu Simpson. Die Royal Society nahm ihn unter Erlassung des Eintrittsgeldes als Mitglied auf. Schon vorher wurde er 1743 bald nach Erscheinen von *The doctrine of annuities and reversions* (1742) und von *Mathematical dissertations* (1743) Professor an der Kriegsschule in Woolwich. Seinem dortigen Aufenthalte entstammen *Elements of plane Geometry* (1747), *Trigonometry plane and spherical* (1748), *Doctrine and applications of fluxions* (1750 in 2 Bänden). Simpson verwahrte sich ausdrücklich dagegen, dass man die reife Arbeit von 1750 als 2. Auflage seines 13 Jahre älteren Jugendversuches betrachte. Dann kamen noch *Select exercises in mathematics* (1752). Im Januar 1761 zog sich Simpson gemüthskrank nach seinem Geburtsort Market-Bosworth in Leicestershire zurück, im Mai 1761 starb er. Seine Geometrie, welche uns die Veranlassung bot, Simpson's Lebensgeschichte hier einzuschalten, ist ausdrücklich für den Gebrauch durch Anfänger geschrieben. Es komme ihm, sagt Simpson in der Vorrede, nicht in den Sinn, ein Werk wie das Euklidische tadeln zu wollen, aber doch könne neben jenem auch ein anderes bestehen, und der Leser werde bei ihm manches Eigenthümliche finden.

Wir erwähnen, dass Simpson den Congruenzsatz für zwei stückweise gleiche Seiten und gleichem von ihnen gebildetem Winkel als Axiom ausspricht, welches allenfalls durch Aufeinanderlegen der beiden Dreiecke gestützt werden könne[2]. Seine ersten Lehrsätze[3] zeigen, dass unter Annahme des Euklidischen Parallelenaxioms eine Gerade, welche auf einer anderen senkrecht steht, auch auf deren Parallelen senkrecht stehe, dass zwei derselben dritten Geraden parallele Linien unter einander parallel seien, dass von einem Punkte aus nur eine Senkrechte zu einer gegebenen Geraden gezogen werden könne. Der 26. Satz[4]) spricht aus, dass wenn (Fig. 78) auf den Seiten eines

[1]) *Connaissance des temps pour* 1767 von De la Lande pag. 197—204.
[2]) Simpson, *Elements of plane geometry* pag. 8. [3]) Ebenda pag. 10—11.
[4]) Ebenda pag. 27.

Quadrates $ABCD$ von den Eckpunkten aus gleiche Stücke $AE = DF = CG = BH$ abgeschnitten werden, das Viereck $EFGH$ ein Quadrat sei, und der 7. Satz des II. Buches[1]) beweist darauf gestützt den pythagoräischen Lehrsatz. Das III. Buch beschäftigt sich mit dem Kreise. Dort ist der Satz über die Producte der Abschnitte einander schneidender Sehnen ganz wie bei Euklid bewiesen, aber daran knüpft Simpson Sätze über winkelgleiche Dreiecke[2]), welche (Fig. 79) so aneinander gelegt werden, dass die Schenkel einander gleicher Winkel einander als Fortsetzung dienen. Simpson beweist, dass die durch B, C, F gelegte Kreisperipherie auch durch E gehen müsse, als leichte Folgerung aus den Sätzen über Peripheriewinkel, und nun sind BF, CE einander schneidende Sehnen, mithin $AB : AE = AC : AF$. Mit dem ptolemäischen Lehrsatze[3]) schliesst das III. Buch. Das IV. Buch handelt von den Proportionen, das V. und VI. ist Aufgaben gewidmet, und zwar das V. solchen über Zeichnung und Theilung von Seiten und Winkeln, das VI. solchen über Verwandlung von Figuren bei gleichbleibendem Flächeninhalte. Ein besonderer Abschnitt[4]) lehrt Aufgaben über grösste und kleinste Werthe elementargeometrisch lösen. Simpson zeigt 1) dass das Quadrat das dem Inhalte nach grösste Rechteck von gleichem Umfange sei, 2) dass das grösste einem beliebigen Dreiecke unter Benutzung von dessen Grundlinie als Seite einbeschriebene Rechteck dasjenige sei, welches die halbe Dreieckshöhe als Höhe besitze. Als 17. Satz erscheint endlich, dass das regelmässige Vieleck das flächengrösste aller isoperimetrischen Vielecke von gleicher Seitenzahl sei. Die noch folgenden Abschnitte begnügen wir uns einfach zu nennen: Von regelmässigen Körpern[5]), Ausmessung von Flächeninhalten[6]), Körperinhalte[7]), Vermischte Aufgaben[8]).

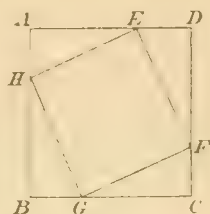


Fig. 78.

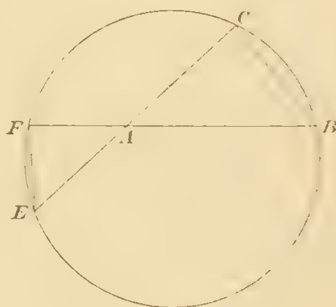


Fig. 79.

Die Trigonometrie Simpson's von 1748 ist ungemein kurz gehalten. Auf nur 77 Seiten lehrt sie die ebene Trigonometrie, die

[1]) Simpson, *Elements of plane geometry* pag. 36. [2]) Ebenda pag. 57. [3]) Ebenda pag. 59. [4]) Ebenda pag. 106—118. [5]) Ebenda pag. 119—133. [6]) Ebenda pag. 134—142. [7]) Ebenda pag. 143—145. [8]) Ebenda pag. 146—193.

Herstellung einer Tafel von Sinussen, Tangenten und Secanten, die sphärische Trigonometrie, die Herstellung von Logarithmentafeln, deren Anwendung, Eigenschaften der Sinusse, Tangenten u. s. w., Eigenschaften ebener und sphärischer Dreiecke. Aber auch bei dieser Kürze fand Simpson Gelegenheit, Eigenes von Wichtigkeit mitzutheilen. Der 5. Satz[1]) ist der vom Verhältnisse der Summe und der Differenz zweier Seiten eines ebenen Dreiecks. Simpson beweist ihn wie folgt. Seien (Fig. 80) im Dreiecke ABC die Seiten AB, AC gegeben, deren kleinere AB ist. Mit ihr als Halbmesser wird um den Mittelpunkt A ein Kreis beschrieben, welcher die verlängerte AC in D und in F schneidet. Man verbindet B mit D und F und zieht $DE \parallel BF$; ausserdem zieht man $Ab \perp CF$ und verbindet b mit C und F. Wegen $AB = AD = AF$ ist die Summe $AC + AB = CF$, die Differenz $AC - AB = CD$. Anwendung der Sätze vom Centriwinkel und Peripheriewinkel auf gleichem Bogen und vom Aussenwinkel eines Dreiecks führt ferner dazu $\angle FDB = \frac{1}{2}(ABC + BCA)$, $\angle DBE = \frac{1}{2}(ABC - BCA)$ erkennen zu lassen. Weil $\triangle CFB \sim CDE$ hat man

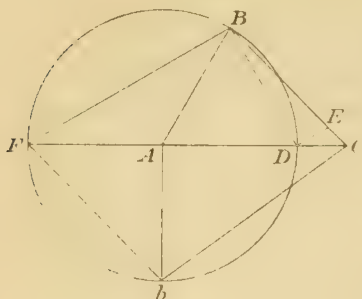


Fig. 80

$$\frac{CF}{CD} = \frac{FB}{DE} = \frac{FB}{BD} : \frac{DE}{BD} = \operatorname{tang} FDB : \operatorname{tang} DBE$$

oder

$$(AC + AB) : (AC - AB) = \operatorname{tang} \frac{ABC + BCA}{2} : \operatorname{tang} \frac{ABC - BCA}{2}.$$

An diesem Beweise eines schon bekannten Satzes lässt es aber Simpson nicht genügen. Er entwickelt vom $\triangle AbC$ ausgehend die den vorhergehenden ganz ähnlich gebaute Proportion

$$(AC + Ab) : (AC - Ab) = \operatorname{tang} \frac{AbC + bCA}{2} : \operatorname{tang} \frac{AbC - bCA}{2}$$

und weil $Ab = AB$, die Vorderglieder beider Proportionen also die gleichen sind, verbinden sich beide zu einer einzigen, in welcher nur trigonometrische Tangenten von Winkeln vorkommen. Simpson bezeichnet die Tangente durch Tang und schreibt demnach

$$\operatorname{Tang} \frac{AbC + bCA}{2} : \operatorname{Tang} \frac{AbC - bCA}{2} = \operatorname{Tang} \frac{ABC + ACB}{2} : \operatorname{Tang} \frac{ABC - ACB}{2}.$$

[1]) Simpson, *Trigonometry* pag. 6—7.

Aber $AbC + ACb = 90^0$, $AbC - ACb = 2AbC - (AbC + ACb) = 2AbC - 90^0$ und folglich

$$\text{Tang } 45^0 : \text{Tang } (AbC - 45^0) = \text{Tang } \frac{ABC + ACB}{2} : \text{Tang } \frac{ABC - ACB}{2}.$$

Man hat, sagt Simpson, hier zwei Proportionen statt einer, aber man findet doch mitunter in der Astronomie einen Vortheil in deren Anwendung wegen ihrer bequemen logarithmischen Anwendung. Bedienen wir uns, um Simpson's Meinung besser zu verstehen, einfacher Buchstaben. Sei $BC = a$, $AB = Ab = c$, $AC = b$, $\angle BAC = A$, $\angle ABC = B$, $\angle ACB = C$, $\angle AbC = \varphi$. Zunächst ist tang $\varphi = \frac{b}{c}$ und φ dadurch gegeben. Dann aber ist weiter $1 : \text{tang}(\varphi - 45^0) = \text{cotang} \frac{A}{2} : \text{tang} \frac{B-C}{2}$ und dadurch auch $B - C$ gefunden. Simpson hat sich also hier eines Hilfswinkels bedient und den gleichen Kunstgriff im weiteren Verlaufe der Trigonometrie[1]) wiederholt angewandt. Ganz neu war derselbe ja nicht, Ibn Jûnus scheint ihn im Oriente gekannt zu haben[2]), aber dessen Tafeln waren 1748 in Europa noch unbekannt, so dass die Unabhängigkeit von Simpson's Erfindung, die für den Occident eine solche war, gegen jeden Zweifel gesichert ist.

Welcherlei Lehrbücher der elementaren Geometrie damals in Italien benutzt wurden, wissen wir persönlich nicht genau anzugeben und wären für eine Ergänzung von kundiger Seite dankbar. Wir vermuthen jedoch, dass namentlich in den von Geistlichen geleiteten Anstalten die Euklidausgabe des Clavius, der *Euclides restitutus* des Borelli, der italienisch geschriebene *Euclide restituto* des Giordano, von welchem wir sehr bald zu reden haben werden, den Unterricht beherrschten.

Unter den Schriften weniger allgemeinen Inhaltes, zu denen wir uns wenden, ist gerade die älteste und hervorragendste in Italien erschienen. Girolamo Saccheri[3]) (1667—1733) war Jesuit und lehrte zuerst Grammatik an dem von seinem Orden geleiteten Collegium der Brera in Mailand. Gleichzeitig mit ihm wirkte Tommaso Ceva (1648—1737), der Bruder des ungleich bekannteren Giovanni Ceva (S. 17—18) als Lehrer der Mathematik an jener Anstalt, und Saccheri trat mit beiden Ceva in wissenschaftlichen Verkehr. In der Brera in Mailand pflegte Saccheri seine Herbstferien zuzubringen, auch nachdem er von Mailand nach Turin, von Turin nach Pavia

---

[1]) Simpson, *Trigonometry* pag. 64—68. [2]) Delambre, *Histoire de l'astronomie au moyen age* pag. 165. [3]) Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig 1895. S. 31—135.

geschickt worden war, in der Brera starb er. In Pavia war er ausser in dem Jesuitencollegium auch an der Universität thätig und hielt dort Vorlesungen über Arithmetik, Algebra, Geometrie u. s. w. Bereits 1701 (nach Anderen sogar schon 1692) gab Saccheri in Turin eine *Logica demonstrativa* heraus. An mathematischen Schriften sind drei bekannt. *Quaesita geometrica* von 1693 und 1694 und *Neostatica* von 1708 sind unter dem deutlichen Einfluss von Giovanni Ceva verfasst, dessen Methoden Anwendung finden. Durchaus selbständig ist dagegen das Hauptwerk von 1733, welchem Saccheri seine allerdings erst anderthalb Jahrhunderte später durchgedrungene Berühmtheit verdankt, der *Euclides ab omni naevo vindicatus*, gedruckt während der langandauernden letzten Krankheit seines Verfassers. Es ist zweifelhaft, ob er noch ein fertig gestelltes Exemplar zu Gesicht bekommen hat.

Henry Savile (Bd. II S. 609), wenn wir von älteren Schriftstellern absehen wollen, hatte 1621 von zwei hässlichen Flecken am schönen Körper der Geometrie gesprochen. Er meinte damit die Lehre von den Parallellinien und die von den Proportionen. In letzterer war durch falsche Uebersetzung der fünften Definition des V. Buches von Euklid's Elementen Verkehrtes geschaffen, welches schon Campanus (Bd. II S. 94) aufgefallen war, und welches beseitigt werden konnte und musste, sobald der richtige Text hergestellt war[1]. Saccheri hat das 2. Buch seines Buches von 1733 der Proportionenlehre in diesem Sinne gewidmet. Die Lehre von den Parallellinien zu bereinigen, bedurfte es mehr als einer sprachlichen Verbesserung, und wir haben an verschiedenen Stellen darauf aufmerksam gemacht, wir hätten an anderen darauf aufmerksam machen sollen, dass in den verschiedensten Zeiträumen Versuche einer Sicherstellung auch dieser Lehre unternommen worden waren. So hätten wir (Bd. II S. 512) erwähnen sollen[2], dass Clavius die Parallelentheorie auf folgende beide Sätze zu stützen suchte: 1) Eine Linie, deren einzelne Punkte gleichweit von einer, derselben Ebene mit ihr angehörenden Geraden abstehen, ist gerade. 2) Wenn eine Gerade von unveränderlicher Länge längs einer zweiten Geraden so hingeschoben wird, dass beide fortwährend einen rechten Winkel mit einander bilden, so beschreibt der freie Endpunkt der verschobenen Strecke eine Gerade. Wir hätten (Bd. II S. 608) erwähnen sollen[3], dass Borelli den zweiten Satz des Clavius als Grundlage der

---

[1] Ausführlich ist der Gegenstand behandelt bei Joh. Wilh. Camerer, *Euclidis Elementorum libri sex priores graece et latine* (Berlin 1824—25) II, 320 bis 366. [2] Stäckel und Engel l. c. S. 17—18. [3] Ebenda S. 33.

Parallelenlehre wählte. Wir hätten in diesem Bande (S. 26) einschalten sollen[1], dass, erheblich später als Wallis seinen vermeintlichen Beweis des Parallelensatzes in Oxford vortrug, aber bevor dessen Druck erfolgte, im Jahre 1680 ein italienischer Mathematiker Giordano, den wir oben (S. 515) genannt haben, in seinem *Euclide restituto* den Versuch machte zu erweisen, dass der Ort der Endpunkte der Senkrechten von gleicher Länge auf dieselbe Gerade selbst eine Gerade sein müsse. Vitale Giordano[2] (1633—1711) aus Bitonto hatte sich nach wildbewegter Jugend der Mathematik zugewandt und trat als Mathematiker in die Dienste der damals in Rom lebenden Königin Christine von Schweden. Ebendort wurde er 1666 Lehrer an der von Ludwig XIV., König von Frankreich, gestifteten Schule für Maler und Bildhauer, dann 1685 Professor an der sogenannten Sapienza. Auch einen Franzosen, Nicolas de Malézieu[3], hätten wir erwähnen müssen, der 1696—1700 einen Sohn Ludwig's XIV., den Duc de Bourgogne, unterrichtete und für seinen Zögling *Élémens de géométrie* verfasste, welche 1715 im Drucke erschienen sind. Die dem Werke beigegebene Bemerkung, die Ergänzungen, welche es bringe, rührten von dem jungen Herzoge selbst her, dürfte Höflingsgerede sein. Jedenfalls ist in dieser Geometrie von 1715 ein Versuch vorhanden das Parallelenaxiom zu erweisen und zwar so, dass Widersprüche hervortreten, wenn zwischen zwei Parallelen, vorausgesetzt dass sie keine ihnen gemeinsame Senkrechte besässen, abwechselnd von dem Endpunkte der Senkrechten auf die eine Parallele eine solche auf die andere gefällt würde.

Das Buch von Malézieu kann Saccheri, zu welchem wir zurückkehren, kaum gekannt haben, anders aber mag es sich mit dem Euclide restituto des Giordano verhalten. Es war italienisch geschrieben, was seiner Verbreitung nur förderlich sein konnte, und die Anstellung des Verfassers an der Sapienza musste ihn dem Jesuiten ohnehin empfehlen. Sichergestellt ist indessen die Bekanntschaft Saccheri's mit dem Euclide restituto nicht, während er in den Anmerkungen zum 21. Lehrsatze des I. Buches des *Euclides ab omni naevo vindicatus* ausdrücklich auf Clavius, Borelli, Wallis als seine Vorgänger, mit deren Ansichten er sich auseinandersetzt, hinweist.

Wir beabsichtigen keineswegs Saccheri's Untersuchungen vollständig zu erörtern, aber das wesentlich Unterscheidende zwischen

---

[1] Stäckel und Engel l. c. S. 33—34. Viel ausführlicher bei Camerer, *Euclidis Elementorum libri sex priores* I. 411—415. [2] Poggendorff I, 901. [3] *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1727 (*Histoire* pag. 145—151).

ihm und seinen Vorgängern müssen wir hervortreten lassen und schicken eine Bemerkung voraus. In Euklid's Elementen kommen Parallellinien erstmalig im 27. Satze des I. Buches in Anwendung. Alles, was vor diesem Satze liegt, war niemals angezweifelt worden und durfte von Saccheri unbedenklich benutzt werden. Dazu gehört auch der Satz I, 16, dass der Aussenwinkel eines Dreiecks grösser sei als jeder der beiden inneren gegenüberliegenden Winkel, und wenn in unseren Tagen dieser Satz bemängelt worden ist[1], weil sein Beweis stillschweigend voraussetze, dass jede Gerade von unendlicher Verlängerbarkeit sei, so war für Saccheri dieser Einwurf noch nicht vorhanden, und man wird nicht zu hart mit ihm ins Gericht gehen dürfen, dass seine Kritik sich nicht auch darauf bezog.

Sei (Fig. 81) AB, so beginnt Saccheri seine Untersuchung[2], eine Gerade, auf welcher zwei gleiche Strecken AC, BD unter gleichen Winkeln A, B aufstehen; verbindet man C mit D geradlinig, so müssen auch die Winkel C, D einander gleich sein. Die Diagonalen AD, BC werden gezogen, dann sind die Dreiecke CAB, DBA wegen gleicher von gleichen Schenkeln gebildeter Winkel A und B congruent und $CB = DA$. Da überdies $DB = CA$, $CD = DC$, so müssen auch die Dreiecke BDC, ACD congruent und $\angle D = C$ sein. Wird sodann (Fig. 82) in einem derartigen Vierecke $ABDC$, welches $AC = BD$, $\angle A = B$, $\angle C = D$ enthält, die Verbindungsgerade MH der Mitten der beiden Seiten AB, CD gezogen, so sind die vier von MH mit AB und CD gebildeten Winkel sämmtlich rechte Winkel[3]). Zieht man nämlich AH, BH, CM, DM, so ist ebensowohl $\triangle ACM \simeq BDM$ als $\triangle ACH \simeq BDH$ wegen gleicher von gleichen Schenkeln gebildeter Winkel. Dann folgt aber $CM = DM$ und $AH = BH$. Weiter ist jetzt wegen stückweiser Gleichheit der drei Seiten $\triangle CHM \simeq DHM$ und $\triangle AHM \simeq BHM$, folglich $\angle CHM = DHM$ und $\angle AMH = BMH$; einander gleiche Nebenwinkel heissen rechte Winkel, mithin ist die Behauptung bewiesen. Sind die im ersten Satze als gleich angenommenen Winkel A und B überdies rechte Winkel, so unterscheidet Saccheri im 3. Satze die von vornherein vorhandenen drei Möglichkeiten für die als gleich bewiesenen Winkel

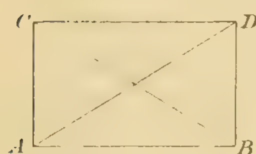


Fig. 81.

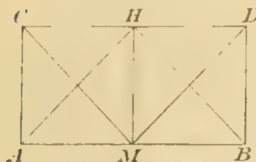


Fig. 82.

---

[1] Stäckel und Engel l. c. S. 11 Note *, S. 52 Note ** und häufiger.
[2] Ebenda S. 50. [3] Ebenda S. 50—51.

C und D. Sie können beide rechte oder stumpfe oder spitze Winkel sein, und diese drei Annahmen heissen nun bald[1] die Hypothese des rechten, des stumpfen, des spitzen Winkels. Der 3. Satz[2] selbst behauptet, die Verbindungsgerade CD der Endpunkte von AC und BD sei unter den drei nach einander genannten Annahmen gleich AB oder kleiner oder grösser. Wäre (Fig. 83) im ersten Falle DC nicht $= BA$, also eine der beiden Strecken grösser als die andere, so schneide man von der grösseren, welche etwa DC sein möge, $DK = BA$ ab, wo K von D aus gesehen diesseits C liegen muss. Jedenfalls ist nach der Annahme $\angle B = D$ als rechte Winkel und $BA = DK$, also nach dem ersten Satze $\angle BAK = DKA$. Das ist aber unmöglich, denn nach der Annahme ist $\angle BAC = DCA$ ein rechter Winkel und nach dem Satze vom Aussenwinkel des Dreiecks $\angle DKA > DCA$, während gleichzeitig $\angle BAK < BAC$. In der Hypothese des stumpfen Winkels halbirt man AB in M, CD in H und zieht die MH, welche nach dem 2. Satze auf BA wie auf DC senkrecht steht. Man kann statt dessen auch sagen MA und HC stehen auf MH senkrecht, bilden aber mit der AC bei A einen rechten, bei C einen stumpfen Winkel, dann kann nicht $CH = AM$ sein, weil sonst die Winkel bei C und A einander gleich sein müssten. Ebensowenig kann $CH > AM$ sein. In diesem Falle wäre es ausführbar HK (mit K zwischen H und C) $= MA$ abzuschneiden, und man hätte $\angle HKA = MAK$, während $\angle MAK < MAC$, $\angle MAC < ACK$, $\angle ACK < HKA$ dieser Voraussetzung widerspricht. So bleibt nur $CH < AM$ übrig, und die gleiche Beziehung gilt für die doppelten Strecken, d. h. $CD < AB$. Nun ist noch die Hypothese des spitzen Winkels zu erledigen. Man zieht wieder HM durch die Mitten von CD und AB und senkrecht zu beiden. Wie in der Hypothese des stumpfen Winkels kann wegen der Ungleichheit der Winkel bei C und A keine Gleichheit der Strecken HC und MA stattfinden. Wäre $HC < MA$, so müsste es einen Punkt L jenseits C geben, so dass $HL = MA$. Dann wäre aber $\angle HLA = MAL$, während nach den Voraussetzungen $\angle HLA < HCA < MAC < MAL$ sein muss. Also bleibt nur $HC > MA$ und $2HC > 2MA$ oder $DC > BA$. Nachdem aus den drei Hypothesen Folgerungen gezogen worden waren, welche zu weiteren Untersuchungen aufforderten, zeigte Saccheri[3], dass ein Nebeneinander

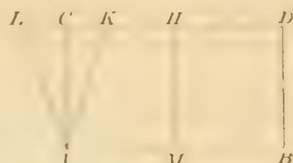


Fig. 83.

[1] Stäckel und Engel l. c. S. 54. [2] Ebenda S. 51–53. [3] Ebenda S. 54–58.

bestehen der drei Hypothesen ausgeschlossen ist. Findet die Hypothese des rechten, des stumpfen, des spitzen Winkels nur in einem einzigen Falle statt, so ist sie die in allen Fällen allein zutreffende.

Einer späteren Zeit war es überlassen, von diesem Punkte aus eine Gabelung der Geometrie eintreten zu lassen und neben der euklidischen Geometrie, welche die Hypothese des rechten Winkels verwirklicht, eine nichteuklidische Geometrie durchzuführen, welche jene Hypothese leugnet. Saccheri glaubte fest an die ausschliessliche Möglichkeit der euklidischen Geometrie, und sein Bestreben konnte mithin nur dahin gerichtet sein, weil ein directer Beweis der Hypothese des rechten Winkels für ihn nicht auffindbar war, diesen Beweis indirect zu führen, d. h. zu zeigen, dass die beiden anderen Hypothesen, die des stumpfen wie die des spitzen Winkels, zu Widersprüchen führen.

Für die Hypothese des stumpfen Winkels gelingt dieses verhältnissmässig leicht. Im 13. Lehrsatze[1]) beweist Saccheri, dass zwei Gerade, welche von einer Transversalen so geschnitten werden, dass sie mit ihr auf derselben Seite innere Winkel bilden, welche zusammen kleiner als zwei Rechte sind, in einem in endlicher Entfernung befindlichen Punkte auf der Seite jener Winkel zusammentreffen, wenn nur eine der beiden Hypothesen des rechten oder des stumpfen Winkels stattfindet. Nun weist aber Euklid nach, dass jenes Zusammentreffen, als Axiom betrachtet, die Hypothese des rechten Winkels zur Folge hat, also ist allen Geometern klar, dass allein die Hypothese des rechten Winkels richtig ist, und dass für die Hypothese des stumpfen Winkels kein Platz übrig bleibt[2]). Wenn nur wenig später der 15. Lehrsatz[3]) nachweist, dass die drei Hypothesen des rechten, des stumpfen, des spitzen Winkels nur eine andere Ausspruchsweise dafür bieten, ob in irgend einem Dreiecke die Winkelsumme gleich zwei Rechten, oder grösser, oder kleiner ist, wenn im 16. Lehrsatze[4]) noch eine andere Umformung erscheint, indem von der Winkelsumme des Vierecks ausgesagt ist, sie sei gleich vier Rechten, oder grösser, oder kleiner, so fällt die mittlere Möglichkeit hier schon weg, und nur die beiden äusseren Fälle sind näher zu betrachten.

Wir würden allzuweitläufig werden müssen, wenn wir sämmtliche Folgerungen hier mittheilen wollten, welche Saccheri zieht, bis er zu seinem 33. Lehrsatze[5]) gelangt, der klipp und klar behauptet, dass die Hypothese des spitzen Winkels durch und durch falsch sei, weil sie der

---

[1]) Stäckel und Engel l. c. S. 63—64. [2]) Ebenda S. 67. [3]) Ebenda S. 67—69. [4]) Ebenda S. 69—70. [5]) Ebenda S. 109.

Natur der geraden Linie widerspreche. Freilich ist Saccheri mit der blossen Aeusserung des Satzes nicht zufrieden, und auf die im Vorhergegangenen bewiesenen Thatsachen allein kann er den Beweis auch nicht stützen. Er bedarf dazu noch einer ganzen Anzahl von Hilfssätzen[1], und nachdem ihm der Beweis seiner Meinung nach geglückt ist, lässt er noch einen zweiten Theil des ersten Buches folgen[2], in welchem er der Hypothese des spitzen Winkels abermals mit neuen Gründen zu Leibe geht. Ich will — sagt er mit einer Art von Selbstentschuldigung, die einer Selbstanklage täuschend ähnlich sieht — Nichts unversucht lassen, um die widerspenstige Hypothese des spitzen Winkels, die ich schon mit der Wurzel ausgerissen habe, als sich selbst widersprechend nachzuweisen.

Die zweite Betrachtungsreihe beschäftigt sich der Hauptsache nach mit dem geometrischen Orte der Endpunkte gleichlanger Senkrechten auf eine gegebene Gerade, welcher unter der Hypothese des spitzen Winkels eine Curve sein müsste, deren Hohlseite der gegebenen Geraden gegenüberläge, und zu deren Unmöglichkeit Saccheri gelangt. Er nennt bei dieser Gelegenheit die häufig benutzte Erklärung der Parallelen als überall gleichweit von einander abstehender Geraden einen groben Verstoss gegen die strenge Logik, denn was heisst zwei gleichweit entfernte gerade Linien als gegeben annehmen anders, als entweder verlangen, dass jede Linie, die in derselben Ebene von einer angenommenen Geraden gleichweit entfernt ist, wieder eine gerade Linie sei, oder wenigstens annehmen, dass eine gewisse gleichweit entfernte Linie eine gerade Linie sein kann, so dass man also eine solche entweder auf Grund einer Hypothese oder auf Grund einer Forderung in der betreffenden Entfernung von der anderen annehmen darf[3].

So die hervorragende Schrift von 1733, welche allzusehr von den bis dahin üblichen Untersuchungsweisen abwich, als dass sie sofort auf Anerkennung hätte stossen können. Sie mag wohl von einem oder dem anderen Gelehrten gelesen worden sein, aber eine Nachwirkung ist Jahrzehnte lang nicht nachzuweisen.

104. Kapitel.

Elementargeometrische Einzeluntersuchungen.

Eine geometrische Schrift von grossem Werthe, welche 1746 in Edinburgh erschien, führt den Titel *Some general theorems of con-*

[1] Stäckel und Engel l. c. S. 109—122. [2] Ebenda S. 123—135.
[3] Ebenda S. 134.

siderable use in the higher parts of mathematics. Ihr Verfasser Matthew Stewart[1]) (1717—1785), seinem Fache nach Theologe, beschäftigte sich an den Universitäten zu Glasgow und Edinburgh, wo er studirte, auch mit Mathematik. An der ersten Anstalt hatte er Robert Simson, an der zweiten Colin Maclaurin zum Lehrer. Auch nach Vollendung seiner Studien blieb er als Geistlicher zu Roseneath im westlichen Schottland seinen geometrischen Bestrebungen getreu, wie das von uns genannte Werk bezeugt. Es kam in Maclaurin's Todesjahr heraus und lenkte die Aufmerksamkeit alsbald auf Stewart, so dass er zu Maclaurin's Nachfolger in der Edinburgher mathematischen Professur ernannt wurde, in welcher Stellung er verblieb, bis er sich 1775 nach Ayrshire zurückzog. Die *General Theorems* füllen 163 Seiten und werden durch 24 auf einer Tafel gedruckte Figuren verdeutlicht. Die 38 ersten Seiten enthalten Lehrsätze mit ihren Beweisen, dann folgen 120 Seiten unbewiesener Lehrsätze, endlich sind auf den 5 letzten Seiten Sätze über den Kreis abermals unbewiesen ausgesprochen. In einer kurzen Vorrede entschuldigt Stewart diese Art der Veröffentlichung mit dem in seinen Verhältnissen unerschwinglichen Aufwand an Zeit und Arbeit, den es verursacht haben würde, wenn er überall den Sätzen ihre Beweise hätte beigeben wollen. Er hoffe, die Sätze, welche mit Ausnahme von höchstens zweien durchaus neu seien, würden auch so Beifall finden. Wer sie zu beweisen den Versuch mache, werde gewiss genügende Entschädigung für die anzuwendende Mühe in der Entdeckung neuer und merkwürdiger Eigenschaften finden, welche sonst der Aufmerksamkeit leicht entgangen sein möchten.

Die zwei von Stewart als nicht neu zugestandenen Sätze sind neuerdings[2]) als Bestandtheile der von Robert Simson ausgeführten Wiederherstellung der ebenen Oerter des Apollonius (S. 489) erkannt worden.

Unsere Leser erwarten vielleicht, dass wir bei dieser Gelegenheit auch eines anderen Satzes von Robert Simson gedenken, von welchem oft Anwendung gemacht wird. Werden (Fig. 84) von irgend einem Punkte M der Peripherie des einem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises die drei Senkrechten MA_1, MB_1, MC_1 auf die wenn nöthig verlängerten Seiten BC, CA, AB gefällt, so liegen die Fusspunkte A_1, B_1, C_1 dieser Senkrechten auf einer Geraden RS, welche den Namen der Simson'schen Geraden erhalten hat. Wir können allerdings

---

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 173—186 (deutsch 170—182); Poggendorff II, 1008—1009. [2]) John S. Mackay, *Matthew Stewart's Theorems* in den *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.* Vol. X (1891—1892).

nicht umhin, den Satz zu erwähnen, aber nur um den ihm beigelegten Namen als unrichtig zurückzuweisen. Simson hat nirgend von der betreffenden Geraden gesprochen. Sie kommt zuerst in einem Aufsatze von William Wallace (1768—1843) vor und mag den Jahren 1799 oder 1800 angehören[1]). Die Entstehung des falschen Namens war aber folgende. F. J. Servois erwähnte den Satz und fügte bei[2]), er glaube, derselbe rühre von Simson her. Poncelet bemerkte dann[3]), Servois habe den Ursprung des Satzes auf Simson zurückgeführt, und nun schrieb ein Geometer den anderen ruhig ab, bis Herr Mackay der Legende ein Ende bereitete.

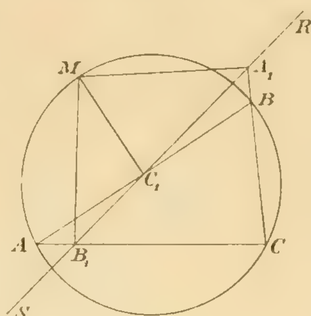


Fig. 84.

Der wirklich auf Simson zurückzuführende Satz ist dieser. Im II. Buche der Ebenen Oerter behauptete Simson pag. 156 als X. Lemma, dass (Fig. 85) in jedem Dreiecke ABC bei Annahme eines beliebigen Punktes D der Grundlinie BC die Gleichung stattfinde:

$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD = BD^2 \cdot CD + CD^2 \cdot BD + AD^2 \cdot BC.$$

Er setzte hinzu, dass im besonderen Falle $BD = DC$ der Satz schon von Pappus in dessen VII. Buch als Satz 122 bemerkt worden sei. In der That geht durch $BD = CD = \frac{BC}{2}$ Simson's Gleichung durch leichte Umwandlung in $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2)$ über, und so lautet der angeführte Satz des Pappus[4]). In dem Anhange zu den Ebenen Oertern pag. 221 kam Simson auf seinen Satz zurück, indem er ihn auch für den Fall bewies, dass A nach A' falle, d. h. dass es sich um Beziehungen zwischen den Entfernungen von vier derselben Geraden angehörenden Punkten von einander handelte. Hier sagt dann Simson weiter, er habe diesen besonderen Fall früher als das X. Lemma entdeckt und habe seine Schüler James Moor und Matthew Stewart veranlasst Beweise dazu zu suchen, was diesen auch ge-

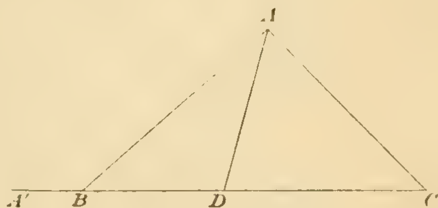


Fig. 85.

[1]) John S. Mackay, *The Wallace line and Wallace point* in den *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. Vol. IX (1890—1891). [2]) Gergonne, *Annales de Mathématiques* IV, 250. [3]) Poncelet, *Propriétés projectives* § 468 (1822). [4]) Pappus (ed. Hultsch) III, 856.

lungen sei; Stewart habe überdies einen anderen Beweis des X. Lemmas in den zwei ersten Sätzen seiner *General Theorems* veröffentlicht. So Simson in seinen Ebenen Oertern von 1748, deren Herausgabe aber bereits 1741 beschlossen gewesen zu sein scheint. An der Richtigkeit von Simson's Angabe ist nicht zu zweifeln, da sie mit dem Eingeständnisse Stewart's in dessen Vorrede von 1746, etwa zwei seiner Sätze seien nicht neu, sich deckt, und da sie überdies niemals von Stewart in Abrede gestellt worden ist, wiewohl dieser auch noch 1763 ein weiteres rein geometrisches Werk herausgab, von dem ausführlicher zu reden die gesteckte Zeitgrenze uns freilich nicht gestattet.

Sehen wir nun zu, wie Stewart in den ersten Sätzen seiner *General Theorems* das Simson'sche Lemma beweist. Sei (Fig. 86) um das Dreieck ABC ein Kreis beschrieben und durch irgend einen Punkt D der Seite BC die AD gezogen und bis zum Durchschnitte G mit dem Kreise verlängert. Sei G mit B und C verbunden, $DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$ gezogen, AB nach K verlängert, endlich von E aus die EH so gezogen, dass $\angle AEH = AGB$, beziehungsweise $\angle AHE = ABG$. Alsdann ist $\triangle AEH \sim AGB$ und folglich $BA \cdot AE = GA \cdot AH$ eine Gleichung, welche Stewart in die Worte kleidet, die Rechtecke BAE, GAH seien einander gleich[1]). Ferner ist $2R = EHD + EHA = EHD + ABG$ sowie $2R = GCA + ABG$, also $\angle EHD = GCA$. Da überdies $\angle EDH = GAC$ als Wechselwinkel an den Parallelen DE, AC, so ist $\triangle EDH \sim GAC$ und $AC \cdot DE (= AC \cdot AF) = AG \cdot DH$. Die beiden Productengleichungen addirt geben $BA \cdot AE + AC \cdot AF = AG \cdot AH + AG \cdot DH = AG \cdot AD = AD^2 + AD \cdot DG = AD^2 + BD \cdot DC$. In dem Wortlaute

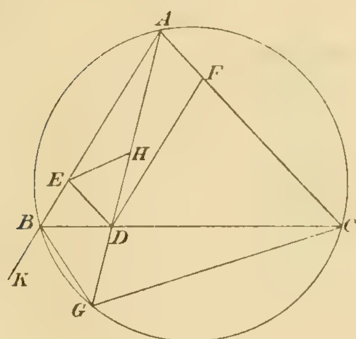


Fig. 86.

$$BA \cdot AE + CA \cdot AF = AD^2 + BD \cdot DC$$

des 1. Lehrsatzes kommen also nur noch der beliebige Punkt D der Grundlinie des beliebigen Dreiecks ABC und die Punkte E, F der Seiten AB, AC vor, in welche $DE \parallel AC$ und $DF \parallel AB$ eintreffen.

[1]) Stewart, *General theorems* pag. 1—2: *Therefore the rectangle BAE is equal to the rectangle GAH.*

Im 2. Satze sind die drei beliebig in gerader Linie liegenden Punkte A, B, C mit dem ausserhalb der Geraden liegenden Punkte D (Fig. 87) verbunden. Die Geraden $AE \parallel CD$ bis zum Durchschnitte mit der verlängerten BD und $DF \parallel AB$ vollenden die Figur. Leicht ersichtlich ist

$$BD^2 : BD \cdot DE = BD : DE = BC : CA,$$

$$AF^2 (= CD^2) : EA \cdot AF = AF : EA = BD : BE = BC : BA.$$

Aus Satz 1 folgt aber $AD^2 + BD \cdot DE = BA \cdot AC + EA \cdot AF$. Setzt man aus den beiden erhaltenen Proportionen $BD \cdot DE = BD^2 \cdot \frac{AC}{BC}$ und $EA \cdot AF = CD^2 \cdot \frac{AB}{BC}$, multiplicirt dann mit BC so entsteht

$$AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot AC = AB \cdot AC \cdot BC + CD^2 \cdot AB.$$

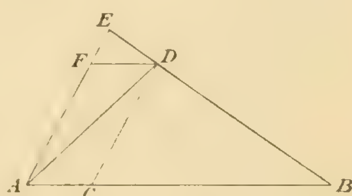


Fig. 87.

Um die Vergleichung mit Simson's Ergebniss vornehmen zu können, ist zu erwägen, dass Stewart's Punkte A, B, C, D bei Simson B, C, D, A heissen. Stewart's Gleichung übersetzt sich daher in $BA^2 \cdot CD + CA^2 \cdot BD = BC \cdot BD \cdot CD + DA^2 \cdot BC$, und da im ersten Gliede rechts vom Gleichheitszeichen $BC = BD + CD$ benutzt werden kann, so geht $BC \cdot BD \cdot CD$ in $BD^2 \cdot CD + CD^2 \cdot BD$ über, wie Simson geschrieben hatte.

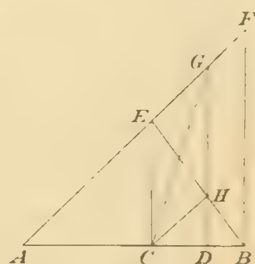


Fig. 88

Endlich wendet sich Stewart zu dem Falle, dass A, B, C, D derselben Geraden angehören (Fig. 88). Er errichtet in C, D, B senkrecht zu AB die CE, DG, BF, macht $CE = CA$ und zieht die Gerade $AEGF$, so dass auch $DG = DA$, $BF = BA$ wird. So ist CG, BE und durch letztere CH bestimmt. Im Folgenden möge nun ADG den Flächeninhalt des Dreiecks ADG bezeichnen, und ähnliche Bedeutung haben alle Vereinigungen von drei Buchstaben, bei welchen nie an einen Winkel zu denken ist. Offenbar ist

$$1. \quad AD^2 = 2ADG.$$

Ferner ist $BD^2 : BD \cdot DH = BD : DH = BC : CE = BC : AC$ und $BD \cdot DH = 2BDH$, also

$$2. \quad \frac{AC}{BC} \cdot BD^2 = 2BDH.$$

Weiter ist $ABE = \frac{1}{2} AB \cdot CE = \frac{1}{2} AB \cdot AC$ und

$$3. \quad AB \cdot AC = 2ABE.$$

Endlich ist $EG : EF = CD : CB$, aber auch $EG : EF = GH : FB = GH : AB$, also $CD : CB = GH : AB$, beziehungsweise $CD : GH = CB : AB = CD^2 : CD \cdot GH = CD^2 : 2CGH = CD^2 : 2EGH$, woraus

$$4. \quad \frac{AB}{BC} \cdot CD^2 = 2EGH.$$

Addition von 1. und 2. einerseits, von 3. und 4. andererseits liefert:

$$5. \quad AD^2 + \frac{AC}{BC} \cdot BD^2 = 2(ADG + BDH) = 2AGHB,$$

$$6. \quad AB \cdot AC + \frac{AB}{BC} \cdot CD^2 = 2(ABE + EGH) = 2AGHB.$$

Die linken Seiten der Gleichungen 5., 6. müssen wie ihre rechten Seiten identisch sein, und vervielfacht man sie mit BC, so erscheint genau dieselbe Beziehung

$$AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot AC = AB \cdot AC \cdot BC + CD^2 \cdot AB,$$

welche stattfand, als D ausserhalb der Geraden ACB lag.

Eine gleich ausführliche Berichterstattung auch nur über die von Stewart mit Beweisen versehenen Sätze würde unverhältnissmässiges Verweilen bei dem Buche bedingen, welches, wenn auch von der Erfindungskraft seines Verfassers zeugend, doch zunächst, wie nachher erörtert werden wird, einen nur sehr geringfügigen Einfluss auf die Entwicklung der Geometrie geübt hat. Wir müssen uns damit begnügen, in Anlehnung an denjenigen neueren Schriftsteller[1]), der Stewart so zu sagen entdeckt hat, vier Sätze anzuführen, in welchen die übrigen mehr oder weniger enthalten sind, den 40., 42., 44. und 49. beziehungsweise 53. Satz nach Stewart's Zählung. Sie lauten:

I. Man denke sich ein regelmässiges einem Kreise vom Halbmesser r umschriebenes m-eck, und es sei n irgend eine Zahl kleiner als m. Wenn man nun von irgend einem Punkte, der innerhalb des Vielecks liegt, wenn n ungerade ist, und beliebig angenommen werden darf, wenn n gerade ist, Senkrechte auf die m-ecks-Seiten fällt, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen dieser Senkrechten $= m(r^n + Av^2r^{n-2} + Bv^4r^{n-4} + Cv^6r^{n-6} + \cdots)$, wo v die Entfernung des gewählten Punktes vom Mittelpunkte des Kreises bedeutet und A den 2ten Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz multiplicirt mit $\frac{1}{2}$, B den 4ten mul-

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 177—178 (deutsch 173—175).

tiplicirt mit $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$, C den 6ten multiplicirt mit $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$ u. s. w., so dass[1])
$A = \frac{n(n-1)}{2^2}$, $B = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 4^2}$, $C = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}$
u. s. w.

II. Ist ein regelmässiges dem Kreise vom Halbmesser r eingeschriebenes m-eck gegeben, ist $n < m$, r die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Kreismittelpunkte, und bedeuten $a, b, c \cdots$ den 1., 2., 3. $\cdots$ Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz, so wird die Summe der $2n^{ten}$ Potenzen der Entfernungen des gewählten Punktes von den Eckpunkten des m-ecks[2]) $= m(r^{2n} + a^2 v^2 r^{2n-2} + b^2 v^4 r^{2n-4} + c^2 v^6 r^{2n-6} + \cdots)$.

III. Wenn m beliebige Punkte gegeben sind und ebensoviele Zahlengrössen $a, b, c \cdots$ und man hat $n < m$, so kann man $n + 1$ andere Punkte finden, so dass die Summe der $2n^{ten}$ Potenzen der Entfernungen eines beliebigen Punktes von den m gegebenen Punkten jeweils mit $\frac{a}{a}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a} \cdots$ vervielfacht zu der Summe der $2n^{ten}$ Potenzen der Entfernungen der $n + 1$ gefundenen Punkte von eben demselben beliebigen Punkte in dem Verhältnisse von $(a + b + c + \cdots)$ zu $(n + 1)a$ stehe[3]).

IV. Wenn m beliebige Gerade gegeben sind und ebensoviele Zahlengrössen $a, b, c \cdots$ und man hat $n < m$, so kann man $n + 1$ andere Gerade finden, so dass die Summe der n^{ten} Potenzen der Entfernungen eines beliebigen Punktes von den m gegebenen Geraden jeweils mit $\frac{a}{a}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a} \cdots$ vervielfacht zu der Summe der n^{ten} Potenzen der Entfernungen ebendesselben Punktes von den $n + 1$ gefundenen Geraden in dem Verhältnisse von $(a + b + c + \cdots)$ zu $(n + 1)a$ stehe[4]).

Man begreift, dass diese ohne Beweis ausgesprochenen Sätze, als sie in unserem Jahrhunderte die Aufmerksamkeit eines Geometers auf sich zogen, welcher dem kurz zuvor neu eingeführten Begriffe geometrischer Dualität einen Theil seiner Erfolge verdankte, und als er in ihnen denselben Gedanken wiedererkannte, dass es kaum eine Eigenschaft von Punkten gebe, der man nicht eine solche von Geraden an die Seite stellen könnte, einen aussergewöhnlichen, fast verblüffenden Eindruck machen mussten. Man begreift aber auch, und das ist oben von uns angedeutet worden, dass das 18. Jahrhundert jenen mit keinem Worte hervorgehobenen Dualitätsgedanken nicht sofort zu würdigen oder nur zu erkennen verstand.

---

[1]) Stewart, *General theorems* pag. 105—106. [2]) Ebenda pag. 110—111. [3]) Ebenda pag. 115. [4]) Ebenda pag. 128—129 und pag. 139—140.

Nur die bewiesenen Anfangssätze Stewart's gewannen Beachtung, und wie Robert Simson den einen derselben ausgesprochen hatte, so dass man ihm statt des Namens des Stewart'schen Satzes richtiger dem des Simson-Stewart'schen Satzes beilegen sollte, so hat noch ein zweiter Engländer zu eben diesem Satze $AD^2 \cdot BC + BD^2 \cdot AC = AB \cdot AC \cdot BC + CD^2 \cdot AB$ (S. 525) einen neuen Beweis gesucht und gefunden. Thomas Simpson (S. 512) war dieser Geometer, und er hat seinen Beweis in seinen *Select exercises in mathematics* mitgetheilt[1]).

Die von uns (S. 506) angekündigte Reihenfolge führt uns zu einzelnen Abhandlungen, unter welchen wir abermals zu trennen beabsichtigen, so dass wir zuerst die eigentlich geometrischen Aufsätze, dann wenige trigonometrische nennen.

Auf englischem Boden müssten wir hier, wenn eine Abhandlung darüber uns bekannt wäre, wahrscheinlich mit einer Art von geometrischer Spielerei den Anfang machen. Ein gewisser Philip Ronayne[2]) soll dort zwei einander gleiche Würfel, den einen massiv, den anderen als Drahtgestell verfertigt und gezeigt haben, wie jener durch diesen hindurchgesteckt werden kann. Eine Beschreibung in einem geschichtlichen Buche von 1750 dient zur Zeitbestimmung der kleinen Erfindung.

Genaue Zeitangabe gestattet eine französische Abhandlung. Charles François de Cisterney Dufay[3]) (1698—1739), gewöhnlich kurzweg Dufay genannt, verliess die Armee, welcher er mit dem Grade eines Hauptmannes angehörte, um als Chemiker in die Akademie der Wissenschaften einzutreten. Später war er auch Intendant des botanischen Gartens in Paris. Die Geschichte der Elektricitätslehre rühmt Dufay als denjenigen, der zuerst zwischen Glaselektricität und Harzelektricität unterschied, und dieser sowie ähnlicher hervorragender Leistungen wegen hat man auch einer vereinzelten geometrischen Abhandlung[4]) Dufay's Beachtung geschenkt, welche sich mit regelmässigen Sehnen- und Tangentenvielecken beschäftigte und neue Eigenschaften derselben enthüllte, die ganz hübsch, wenn auch von geringer Tragweite sind. Der erste Satz sagt aus, dass wenn (Fig. 89) zu einem und demselben Kreise ein regelmässiges Sehnenvieleck und ein ebensolches Tangentenvieleck von der gleichen Seitenzahl construirt werden, der Flächenunterschied beider Vielecke

---

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 175 (deutsch 172). [2]) H. Hennessy in dem *Philosophical Magazine* Ser. 5, Vol. 39, pag. 184 sqq. [3]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1739 (*Histoire* p. 73—83). — Heller, Geschichte der Physik II, 472. [4]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1727, pag. 297—304.

einem dritten regelmässigen Vielecke von abermals gleicher Seitenzahl gleich ist, dessen umschriebener (beziehungsweise eingeschriebener) Kreis die Seite des zuerst gegebenen Tangentenvielecks (Sehnenvielecks) zum Durchmesser hat. Man braucht die Figur nur etwas genauer anzusehen, um sich von der Wahrheit des Satzes zu überzeugen.

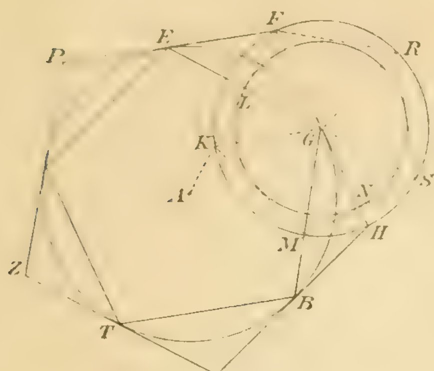


Fig. 89.

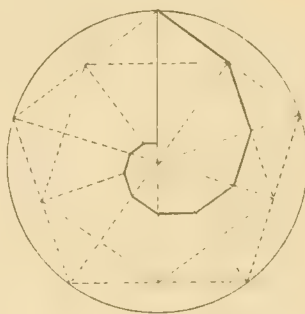


Fig. 90.

Der zweite nicht ganz so auf den ersten Anblick einleuchtende, aber auch nicht grade schwer zu beweisende Satz lässt (Fig. 90) aus einem regelmässigen Sehnenvieleck von n Seiten ein spiralförmiges Vieleck[1]) von $2n+1$ Seiten dadurch entstehen, dass alle Ecken und Seitenmitten des Sehnenvielecks mit dem Mittelpunkte gradlinig verbunden werden, dass man von einer Seitenmitte eine Senkrechte auf die nächste nach dem Mittelpunkt führende Hilfslinie fällt und stets von dem so gewonnenen Durchschnittspunkte aus das gleiche Verfahren fortsetzt. Dufay drückt alsdann den Inhalt des spiralförmigen Vielecks durch eine allgemeine Formel aus.

Philipp Naudé[2]) (1684—1747) ist gleich seinem Vater Philipp Naudé dem Aelteren (1654—1729) in Metz geboren. Als im October 1685 die protestantische Kirche in Metz geschlossen wurde, wanderte die Familie aus. Sie zog erst nach Saarbrücken, dann nach Hanau, zuletzt nach Berlin. Vater und Sohn waren nach einander Lehrer der Mathematik am Joachimsthaler Gymnasium in Berlin, Vater und Sohn gehörten der Berliner Academie an. Der Sohn veröffentlichte in den Denkschriften dieser Academie von 1737 und von 1743 zwei unter einander zusammenhängende Abhandlungen über *Trigonoscopie*[3]). Er verstand darunter die Herstellung eines Dreiecks auf geometrischem Wege aus drei Bestimmungsstücken, wenn zu

[1]) *polygone spiral.* [2]) *Histoire de l'Academie de Berlin.* Année 1746, pag. 465—468. [3]) *Miscellanea Berolinensia* V, 10—32 und VII, 243—270.

solchen Anderes gewählt wurde als Seiten und Winkel des Dreiecks. Wir führen als Muster einen der einfachsten Sätze an. Seien (Fig. 91) in dem Dreiecke DEF die Höhen DC, EB, FA gezogen und A, B, C geradlinig mit einander verbunden. Wegen der bei A, B, C gebildeten rechten Winkel liegen A und C auf dem Halbkreise über dem Durchmesser DF, A und B auf dem Halbkreise über dem Durchmesser EF. Mithin sind $ACFD$ und $ABFE$ Sehnenvierecke, d. h. $\angle DFC + DAC = 180^0$ und $BFE + BAE = 180^0$, beziehungsweise $\angle DAC = BAE$ und auch $\angle DAB = EAC$. Da ferner $\angle DAF = EAF$, so ist $\angle BAF = CAF$, d. h. AF halbirt den Winkel BAC. Genau ebenso folgt, dass BE (CD) Winkelhalbirende von $\angle ABC$ (ACB) sind. Sind also die Fusspunkte A, B, C der drei Höhen eines zu zeichnenden Dreiecks gegeben, so zeichnet man zunächst das Dreieck ABC und in demselben die drei Winkelhalbirenden AO, BO, CO. Senkrecht zu diesen in A, B, C erhält man die Seiten des gesuchten Dreiecks.

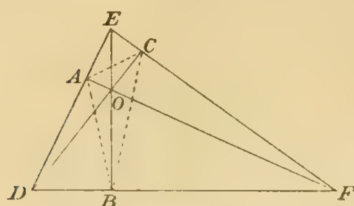


Fig. 91.

Der nächste Schriftsteller, von welchem wir zu reden haben, ist ein Mathematiker allerersten Ranges. Schon ab und zu (z. B. S. 346, 357) hatten wir seinen Namen zu nennen; im ganzen gegenwärtigen Abschnitte wird er die hervorragendste Rolle spielen, und das veranlasst uns, etwas ausführlicher bei seinen persönlichen Verhältnissen zu verweilen. Leonhard Euler[1]) (1707—1783) war der Sohn eines Geistlichen, Paul Euler, der selbst solche Neigung zu den mathematischen Wissenschaften besass, dass er im Stande war, dem Unterrichte des grossen Jacob Bernoulli zu folgen. Von dem Vater vorgebildet bezog Leonhard Euler in so jungen Jahren die Universität, dass er im Stande war, schon 1723 die Magisterwürde zu erwerben. Sein Lehrer war Johann Bernoulli, seine Studiengenossen waren dessen beide Söhne Niclaus II und Daniel, von denen jener 12, dieser 7 Jahre älter als Euler war, ein Altersunterschied, der Euler's Frühreife, mit solchen Gefährten annähernd gleichen Schritt halten zu können, in das glänzendste Licht setzt. Die Petersburger Akademie entstand 1724 nach einem Entwurfe Peter des Grossen durch Kaiserin Katharina I. ins Leben gerufen. Niclaus II und Daniel Bernoulli gehörten zu den dorthin berufenen Gelehrten, und sie folgten dem Rufe 1725. In Petersburg trafen sie den schon etwas früher be-

[1]) Allgemeine deutsche Biographie VI, 422—430.

rufenen Jacob Hermann. Niclaus II Bernoulli erlag bald den ungewohnten Witterungsverhältnissen. Nur um so mehr bemühten sich Daniel Bernoulli und Hermann, in Euler einen weiteren hervorragenden Basler heranzuziehen. Dessen Berufung als Adjunct für das mathematische Fach erfolgte. Aber Katharina I. starb an demselben Tage des 17. Mai 1727, an welchem Euler den russischen Boden betrat. Peter II. war wissenschaftlichen Bestrebungen ungünstig. Euler musste froh sein als Schiffslieutenant in der russischen Flotte Verwendung zu finden, bis ein abermaliger Regierungswechsel 1730 Kaiserin Anna auf den Thron brachte. Jetzt wurde der Wissenschaft neue Sorgfalt zugewandt, und während Hermann, Bilfinger, Daniel Bernoulli der Reihe nach Petersburg verlassen hatten, wurde Euler als Mitglied der Akademie erhalten. Eine Reihe erfolgreicher Arbeitsjahre wurde 1740 durch den Tod Anna I. unterbrochen, denn nun begannen in Petersburg wieder Palastrevolutionen, welchen erst nach Jahresfrist im December 1741 die Thronbesteigung von Kaiserin Elisabeth ein Ende machte, und inzwischen war Euler der Aufenthalt verleidet, hatte er im Juni 1741 einen Ruf an die Berliner Akademie angenommen, deren Erneuerung und Erhebung zu immer grösserer Höhe ein Lieblingsgedanke Friedrich des Grossen war. Euler wurde 1744 Director der neugestalteten mathematischen Classe der Berliner Akademie und blieb dort bis über jene Zeit hinaus, mit welcher wir unseren Band abschliessen. Wir vollenden deshalb in aller Kürze Euler's Lebensgeschichte. Euler hatte Petersburg im Unmuthe verlassen, aber nie vergessen. Als Katharina II. im Juni 1762 den russischen Kaiserthron bestieg und eine neue Blüthezeit der Wissenschaften eintrat, regte sich wohl zuerst in Euler die Sehnsucht nach einer Rückkehr, und im October 1763 sprach er sich brieflich gegen Goldbach darüber aus. Die Unterhandlungen zogen sich in die Länge, da König Friedrich II. der Entlassung Euler's immer neue Schwierigkeiten in den Weg legte. Endlich erfolgte Euler's Abreise von Berlin im Juni 1766. Kaum in Petersburg angekommen hatte Euler im Herbste 1766 das Unglück zu erblinden. Um das rechte Auge war er schon 1735 bei seinem ersten Petersburger Aufenthalte in Folge von Ueberanstrengung gekommen. Jetzt verlor er auch das linke Auge. Trotzdem hörte die wissenschaftliche Thätigkeit Euler's erst mit seinem Tode auf. Ein unübertreffliches Gedächtniss und aufopfernde Schüler und Freunde, besonders Nicolaus Fuss (1755—1826) aus Basel, der 1773 eigens zu dem Zwecke, um Euler als Hilfsarbeiter zu dienen, nach Petersburg berufen worden war, ersetzten ihm das Augenlicht, soweit es einen Ersatz dafür geben konnte. Man wird kaum ein Gebiet der

reinen und angewandten Mathematik nennen können, in welchem Euler nicht thätig war, und Thätigkeit hiess bei ihm bahnbrechender Erfolg. Seine Schriften bestehen aus 32 Quartbänden und 13 Octavbänden selbständiger Werke nebst mehr als 700 zum Theil sehr umfangreichen Abhandlungen, deren letzterschienenen erst 1862 in Petersburg zum Drucke gelangten[1]. Eine Gesammtausgabe in Quart alles dessen, was Euler geschrieben, würde mindestens 2000 Druckbogen stark werden, und dieser Umstand erklärt, ohne das Versäumniss zu entschuldigen, warum bisher die beiden Akademien von Petersburg und Berlin die Ehrenpflicht noch nicht erfüllten, eine solche Gesammtausgabe zu veranstalten, welche man von ihnen gemeinschaftlich, wenn nicht von einer derselben, zu verlangen berechtigt ist. Der Gesammtcharakter der Euler'schen Schreibweise, um auch diesen gleich hier zu schildern, besitzt als wesentliches Merkmal die Neigung, auch noch nicht vollständig geglückte Versuche der Oeffentlichkeit nicht vorzuenthalten. Redseligkeit wird der Eine sie schelten, während der Andere von der liebenswürdigen Offenheit entzückt sein wird, welche den Einblick in die geistige Werkstätte ohne jede Heimlichthuerei gestattete. Wir persönlich gehören zu diesen Letzteren, und wir lieben Euler wegen seiner neidlosen, fremdes Eingreifen herausfordernden Enthüllungen fast eben so sehr, als wir seine allseitige Erfindungsgabe oder seine unübertroffen klare Darstellungsweise bewundern.

Euler's erster elementargeometrischer Aufsatz erschien 1741 im Drucke[2]. Er führt den Titel *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Seit Leibniz den Gedanken einer Geometrie der Lage (S. 34) geäussert hatte, war seine Anregung unfruchtbar geblieben, und Euler war der erste, welcher eine Aufgabe dieser Art stellte und löste. Königsberg ist von dem Pregel in mehreren Armen durchflossen, und zwei solche Arme schliessen eine grössere Insel, den Kneiphof, ein, so dass mit Einschluss des Kneiphofs vier Stadttheile unterschieden werden können. Ueber den Pregel führten zu Euler's Zeiten sieben Brücken, welche den Verkehr zwischen jenen vier Stadttheilen vermittelten. Kann man die sieben Brücken nach einander überschreiten, ohne eine derselben wiederholt zu benutzen? Diese Frage war in Königsberg als Scherzaufgabe entstanden und hatte Anlass zu zahlreichen erfahrungsmässigen Lösungsversuchen gegeben. Euler erkannte die wissenschaftliche Bedeutung der Scherzfrage. Auf seine

[1]) Unter den verschiedenen Verzeichnissen von Euler's Schriften, welche veröffentlicht sind, ist das letzte und vollständigste: *Index operum Leonardi Euleri confectus a Joh. G. Hagen*. Berlin 1896. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 128—140.

Beantwortung derselben können wir erst im 108. Kapitel eingehen, wenn wir von der Combinationslehre reden.

Ebendahin verweisen wir vorläufig unsere Leser für eine andere elementargeometrische Aufgabe, über welche Euler sich in einem an Goldbach gerichteten Briefe aus Berlin vom 4. September 1751 folgendermassen äusserte[1]: Ich bin neulich auf eine Betrachtung gefallen, welche mir nicht wenig merkwürdig vorkam. Dieselbe betrifft auf wie vielerlei Arten ein gegebenes polygonum durch Diagonallinien in triangula zerschnitten werden könne.

In England gab es ausser den P. T., als den Veröffentlichungen der Royal Society, noch Zeitschriften sehr gemischten Inhaltes, in welchen zwischen Reimfragen, Räthseln, Bilderräthseln auch Wissenschaftliches vorkam[2]. Da war *Ladies' Diary*, welches von 1704—1840, *Gentleman's Diary*, welches von 1741—1840 erschien; da waren *Miscellanea Curiosa Mathematica* seit 1745, *Mathematician* 1745—1754, *Palladium* 1748—1779, *Mathematical Exercises* 1750—1753 u. s. w. In ihnen mögen manche elementargeometrische Wahrheiten erstmalig ausgesprochen sein, welche dem Erfinder verloren gingen, weil es dem Organe, dessen er sich bediente, an Verbreitung fehlte. Weniges ist nachträglich wiedererkannt worden. In den *Miscellanea Curiosa Mathematica* erschien (vermuthlich im Jahre 1746) ein Aufsatz von William Chapple, *An essay on the properties of triangles inscribed in and circumscribed about two given circles*[3]; muthmasslich der erste Versuch die Eigenschaften eines Dreiecks zu entdecken, welches zugleich Sehnendreieck eines und Tangentendreieck eines anderen Kreises ist. Ist (Fig. 92) R der Halbmesser des dem $\triangle ABC$ umschriebenen, r der des ihm eingeschriebenen Kreises, sind a, b, c die Seiten des Dreiecks, und ist $\triangle$ dessen Inhalt, so ist $\triangle = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$ und

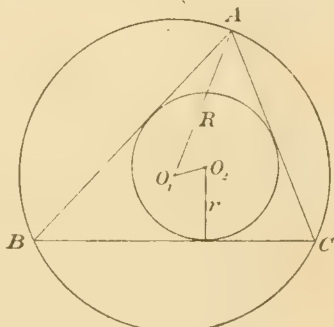


Fig. 92.

$\triangle = \frac{abc}{4R}$, folglich $2rR = \frac{2abc}{a+b+c}$. Chapple bewies ferner, dass, damit die beiden Mittelpunkte O_1 (des umschriebenen) und O_2 (des eingeschriebenen Kreises) zusammenfallen, nothwendig $R = 2r$ sein

[1] *Corresp. math.* (Fuss) I, 551—552. [2] John S. Mackay, *Notice sur le journalisme mathématique en Angleterre* in den Berichten der *Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Besançon.* 1893. [3] John S. Mackay, *Historical notes on a geometrical theorem and its developments* in den *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Vol. V (1886—1887).

müsse. Bei excentrischen Kreisen muss $R > 2r$ sein. Die Entfernung $O_1 O_2$ fand Chapple $= \sqrt{R(R-2r)}$, was wieder mit der Bedingung $R = 2r$ für die Concentricität der beiden Kreise übereinstimmt. Der Satz wird zuverlässig nicht über die Grenzen Englands hinaus bekannt geworden sein, wenn er innerhalb jener Grenzen auch einige Beachtung fand, und so ward Euler unabhängiger Nacherfinder in einem Aufsatze[1]), den wir hier kaum nennen dürfen, weil er die Jahreszahl 1765 trägt.

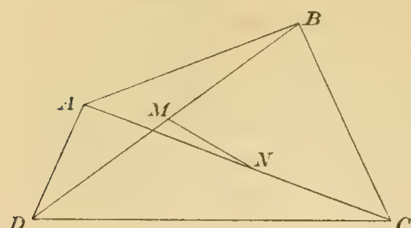


Fig. 93.

Schon vorher, am 23. Februar 1748, hatte Euler[2]) einen anderen elementargeometrischen Satz Goldbach mitgetheilt. Man vereinige (Fig. 93) in einem Vierecke $ABCD$ die Mitten M und N der beiden Diagonalen BD und AC geradlinig, so wird sein:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

Er bewies den Satz alsdann in einem mehrfach bemerkenswerthen Aufsatze: *Variae demonstrationes geometricae*[3]). Euler beginnt mit dem geometrisch geführten Beweise eines einst von Fermat ausgesprochenen Satzes. Analytisch könne derselbe ohne jede Schwierigkeit als wahr erkannt werden, aber er habe gerade den analytischen Beischmack vermeiden wollen. Der Satz selbst ist folgender. Sei

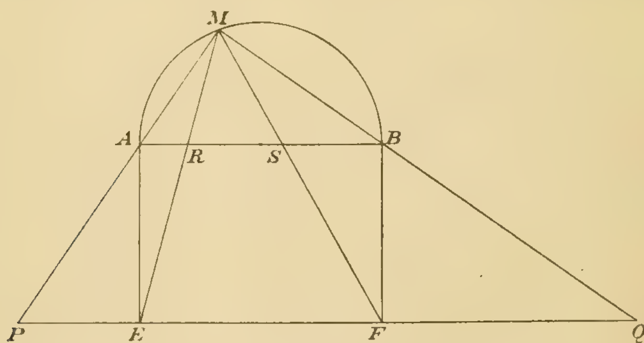


Fig. 94.

(Fig. 94) über AB als Durchmesser ein Halbkreis und nach der anderen Seite über demselben AB ein Rechteck $ABFE$ gezeichnet,

---

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1765. T. XI, 103—123. Vergl. dazu *Proceedings Edinb. Mag.* Vol. IV [2]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 446. [3]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1747 *et* 1748. T. I, 49—66.

dessen Seite $AE = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Sei ein beliebiger Punkt M des Halbkreises mit E und F durch Gerade verbunden, welche die AB in R und S schneiden, so ist $AS^2 + BR^2 = AB^2$. Euler zieht von M aus durch A und B auch noch MP und MQ. Die Aehnlichkeit der drei rechtwinkligen Dreiecke PEA, AMP, BFQ lässt erkennen, dass $PE \cdot FQ = EA \cdot BF = \frac{1}{2} EF^2$. Aehnliche Beziehungen müssen zwischen den entsprechenden Abschnitten von AB stattfinden, d. h. es muss sein: $2AR \cdot BS = RS^2$. Nun ist $AS + BR = AB + RS$ und durch Quadrirung $AS^2 + BR^2 + 2AS \cdot BR = AB^2 + RS^2 + 2AB \cdot RS = AB^2 + 2AR \cdot BS + 2AB \cdot RS$. Durch Zerlegung zusammengesetzter Stücke in ihre Theile ist aber leicht ersichtlich, dass $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR$, wo auch R und S auf der AB liegen. Mithin kann oben $2AS \cdot BR$ gegen $2AR \cdot BS + 2AB \cdot RS$ gestrichen werden, und es bleibt $AS^2 + BR^2 = AB^2$. Auf diesen Satz, dessen Beweis wir wegen seiner ungemeinen Einfachheit wiedergegeben haben, lässt Euler einige andere folgen: den elementargeometrischen Beweis der Heronischen Dreiecksformel, einen eben solchen der Brahmagupta'schen Formel für den Flächeninhalt des Sehnenvierecks, endlich den seines eigenen Viereckssatzes. Wir haben kaum nothwendig besonders zu betonen, dass Euler's Beweis der Heronischen Formel keine weitere Verwandtschaft mit dem von Heron selbst herrührenden zeigt, als dass bei beiden der dem auf seinen Flächeninhalt zu bestimmenden Dreiecke einbeschriebene Kreis vorkommt, dessen Halbmesser Euler sodann ermittelt, was Heron unterliess.

In dem gleichen Bande der Petersburger neuen Abhandlungen ist ein trigonometrischer Beweis des Euler'schen Viereckssatzes von Georg Wolfgang Krafft enthalten[1]. Erinnern wir uns, dass Krafft seit mehreren Jahren in Tübingen, wie Euler in Berlin war, so sehen wir, dass die Mitglieder der Petersburger Akademie ihr in der Ferne treu blieben und Manuscripte zum Druck einschickten. Krafft's Beweis, von dem wir hier reden, besteht in wiederholter Anwendung des Satzes, dass das Quadrat einer Dreiecksseite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten weniger dem doppelten Producte jener Seiten in den Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels ist. Im Anschluss an den Euler'schen Viereckssatz bewies Krafft auch den Lehrsatz von Cotes (S. 394) für die Sonderfälle $2\lambda = 4$, $2\lambda = 6$, $2\lambda = 8$, eigentlich ein recht überflüssiges Be-

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1747 *et* 1748. T. I, 131—136.

mühen, nachdem (wie Krafft selbst erklärt) Johann Bernoulli in dem vierten Bande[1]) seiner Werke einen Beweis des allgemeinen Satzes gegeben hatte, der sich allerdings auf Reihenentwicklungen stützte.

Im Jahre 1754 kam im II. Bande der *Mémoires présentés par des Savants étrangers* der Pariser Akademie der Wissenschaften eine Abhandlung von Estève aus Montpellier heraus, in welcher die Aufgabe behandelt und für einen besonderen Fall auch gelöst war, eine dreieckige Pyramide aus ihrer Grundfläche und den drei ebenen Winkeln, die an der Spitze zusammentreffen, zu bestimmen. Ist ABC die Grundfläche, D die Spitze, sind also ADB, BDC, CDA die gegebenen Winkel, so wählte Estève die Winkel DAB, DAC, DBC als Unbekannte und brachte eine Gleichung zwischen ihnen zu Stande, welche für den Fall, dass $\angle DAC = DBC$ ist, zu einer Gleichung vierten Grades nach $\sin DAC$ wird[2]).

Das Jahr 1757 förderte einige Untersuchungen über Theilung von Figuren zu Tage[3]). Es scheint, als ob Johann Tobias Mayer[4]) (1723—1762) den Anstoss dazu gegeben hätte. Aus einem gewöhnlichen Handwerker entwickelte sich Mayer ohne fremde Unterweisung durch Selbstthätigkeit und eine seine Heimath bestätigende echt württembergische Zähigkeit zu einem hervorragenden Astronomen und Physiker und tüchtigen Mathematiker. Er wurde 1751 als ordentlicher Professor der Mathematik und Oekonomie nach Göttingen berufen, und seine Vorlesungen über praktische Geometrie waren berühmt. War doch Mayer der Erfinder des Multiplikationsverfahrens bei Winkelmessungen[5]), welches in der praktischen Geometrie nicht minder hervorragende Dienste als in der Astronomie leistet, und hat er sich doch auch mit der Frage nach der Benutzung überbestimmter Gleichungssysteme beschäftigt. Aus dem Inhalte der Vorlesungen über praktische Geometrie ging ein Aufsatz *De transmutatione figurarum rectilinearum in triangula* hervor, welcher seit dem 1. März 1755 zur Veröffentlichung durch die Göttinger Akademie bestimmt war[6]), aber aus nicht bekannten Gründen ungedruckt blieb. Mayer lehrte darin eine geradlinige Figur von beliebiger Seitenzahl ohne Anwendung eines Zirkels, sondern unter alleiniger Benutzung eines Parallellineals in ein Dreieck zu verwandeln und sie durch gerade

---

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* IV, 67—76. [2]) *Mathesis*. Série 2, VI, 18. [3]) Klügel II, 231—233. [4]) Allgemeine deutsche Biographie XXI, 109—116. Artikel von S. Günther. [5]) *Haec vera methodus in multiplicatione anguli consistit*, sagt Mayer in einer Abhandlung, welche 1752 im II. Bande der Veröffentlichungen der Göttinger Akademie gedruckt ist. [6]) Göttinger Gelehrte Nachrichten 1755, S. 266.

Linien, welche sämmtlich auf der Grundlinie aufstehen, in gegebenem Verhältnisse zu theilen. Nun erschien 1757 von Christian Heinrich Wilke[1] (1722—1776), damals Docent der praktischen Geometrie in Halle, später in Leipzig privatisirend, wo er auch Secretär der ökonomischen Gesellschaft war, ein Buch unter dem Titel: *Neue und erleichterte Methode, den Inhalt geradliniger Flächen zu finden und dieselben ohne Rechnung einzutheilen.* Die Göttinger Gelehrten Nachrichten[2] brachten eine sehr anerkennende Besprechung, aber noch in demselben Bande verwahrte sich Tobias Mayer[3]) gegen jenes Lob, welches an die unrichtige Adresse gehe, da Alles, was in Wilke's Buch gut sei, von ihm entnommen sei, ohne dass Wilke der Verpflichtung nachgekommen wäre, seine Quelle in ehrlicher Weise zu nennen. Wilke vertheidigte sich dann wieder, so gut er konnte, in einem 1758 gedruckten Anhange zu einer anderen Schrift: *Neue Grundsätze der praktischen Geometrie.*

Im Jahre 1758 wurden ferner zwei Aufsätze Euler's gedruckt, welche sechs Jahre früher[4]) der Petersburger Akademie vorgelegt worden waren: *Elementa doctrinae solidorum*[5]) und *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hederis planis inclusa sunt praedita*[6]). Der erste dieser beiden Aufsätze enthält neben zahlreichen anderen meistens leicht zu beweisenden Sätzen über die Anzahl der Elemente von einer gewissen räumlichen Natur bei Vielflächnern hauptsächlich den Satz, welcher den Namen des Euler'schen Polyedersatzes sich bewahrt hat. Bekanntlich hat Descartes bereits den Satz entdeckt, und hat Leibniz eine Abschrift von Descartes bezüglichen Aufzeichnungen nehmen können (Bd. II, S. 625 bis 626). Aber dass Euler davon irgend Kenntniss erhalten haben sollte, ist an sich kaum anzunehmen und bei der über jeden Zweifel erhabenen Wahrheitsliebe Euler's durch seine Erklärung, es handle sich um einen durchaus neuen Satz, vollständig ausgeschlossen. Euler spricht den Satz in der Form

$$S + H = A + 2$$

aus[7]). Dabei ist S = *numerus angulorum solidorum* (die Zahl der Ecken), A = *numerus acierum* (die Zahl der Kanten), H = *numerus hedrarum* (die Zahl der Flächen). Einen zuverlässigen Beweis des Satzes, gesteht Euler zu, besitze er nicht; er könne nur dessen Wahr-

[1]) Poggendorff II, 1328. [2]) Göttinger Gelehrte Nachrichten 1757, S. 1252 flg. [3]) Ebenda 1757, S. 1329 flg. [4]) Brieflich äusserte Euler ihren Inhalt schon 1750 an Goldbach. *Corresp. math.* (Fuss) I, 536—539. [5]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1752 *et* 1753. T. IV, 109—140. [6]) Ebenda T. IV, 140—160. [7]) Ebenda T. IV, 119.

heit für alle Gattungen von Vielflächnern, an welchen er ihn der Prüfung unterziehen werde, erkennen lassen, so dass diese Induction an Stelle eines Beweises dienen möge. Im zweiten Aufsatze holte Euler nach, was er im ersten vermissen lassen musste. Die Winkelsumme eines ebenen Vielecks, sagt er, wird gefunden, indem man durch Ziehung einer Hilfslinie ein Dreieck abschneidet, beziehungsweise ein neues Vieleck sich verschafft, dessen Winkelzahl um die Einheit, dessen Winkelsumme um zwei rechte Winkel abgenommen hat. Heisst im n-eck die Anzahl der Winkel A, ihre Summe in rechten Winkeln ausgedrückt R, so sind im $(n-1)$-eck die entsprechenden Zahlen $A-1$ und $R-1\cdot 2$; im $(n-2)$-eck sind sie $A-2$ und $R-2\cdot 2$; im Dreieck sind sie $A-(n-3)$ und $R-(n-3)\cdot 2$, zugleich aber auch 3 und 2. Folglich ist $A-(n-3)=3$ und $R-(n-3)\cdot 2=2$ d. h. $A=n$, $R=2n-4$. Nun wird Aehnliches im Raume versucht. Durch Einlegung einer Hilfsebene wird eine Ecke des Vielflächners abgespaltet und zu ermitteln gesucht, wie sich dabei die Zahlen ändern, welche im ersten Aufsatze S, H, A hiessen. Sie gehen in $S-1$, $H-2-\mu+\nu$, $A-3-\mu+\nu$ über, und nennt man diese Zahlen S_1, H_1, A_1, so ist $S_1+H_1-A_1=S+H-A$, d. h. die algebraische Summe $S+H-A$ muss trotz aller Abspaltung von Ecken constant bleiben. Beim Tetraeder mit $S=4$ Ecken, $H=4$ Flächen, $A=6$ Kanten ist aber $4+4-6=2$, also allgemein $S+H-A=2$.

An diese Entwicklung schliesst sich die Lösung einer Aufgabe[1]) an, welche eigentlich ganz anderer Natur ist und nur dadurch in einem sehr lockeren Zusammenhange mit dem Vorhergehenden steht, dass es sich um ein Tetraeder handelt. Euler fragt nämlich nach dem Körperinhalte des Tetraeders dargestellt durch dessen sechs Kanten. Stossen a, b, d in der Ecke A, a, c, e in der Ecke B, b, c, f in der Ecke C zusammen, so dass die drei Kanten a, b, c das Dreieck ABC bilden, so findet Euler für das 144-fache Quadrat jenes Körperinhaltes die Formel

$$\begin{aligned}&a^2f^2(b^2+c^2+d^2+e^2)-a^2f^2(a^2+f^2)-a^2b^2c^2\\&+b^2e^2(a^2+c^2+d^2+f^2)-b^2e^2(b^2+e^2)-a^2d^2e^2-c^2e^2f^2\\&+c^2d^2(a^2+b^2+e^2+f^2)-c^2d^2(c^2+d^2)-b^2d^2f^2,\end{aligned}$$

welche er aber unter Beiziehung von Winkelfunctionen in eine viel geschmeidigere Gestalt zu bringen weiss. Sind die drei in der Ecke

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1752 *et* 1753. T. IV, 158—160.

A zusammenstossenden ebenen Winkel $BAC = p$, $BAD = q$, $CAD = r$, so ist der Körperinhalt des Tetraeders =

$$\frac{1}{3}abd\sqrt{\sin\frac{p+q+r}{2}\cdot\sin\frac{p+q-r}{2}\cdot\sin\frac{p+r-q}{2}\cdot\sin\frac{q+r-p}{2}}.$$

Diese letztere Formel ebenso wie das oben über Aufsätze von Krafft und von Estève Bemerkte greift allerdings in das trigonometrische Gebiet über, dem vollends zwei Abhandlungen angehören, welche wir noch nennen. Die erste derselben, schon 1727 der Petersburger Akademie vorgelegt[1], führt die Ueberschrift *Trigonometrica* und rührt von F. C. Maier her. Er erklärt in den einleitenden Worten, er wolle eine Zusammenstellung von Sätzen geben, welche er zu verschiedenen Zeiten in der Petersburger Akademie, der er angehörte, mitgetheilt habe. Allerdings flösst gleich der erste Satz der Zusammenstellung nicht allzugrosses Vertrauen ein, denn derselbe behauptet, bei spitzen Winkeln seien Sinus und Cosinus, Tangente und Cotangente positiv, beim stumpfen Winkel blieben Tangente und Sinus positiv, Cotangente und Cosinus dagegen würden negativ![2]) Auf die Ergebnisse der ganzen Abhandlung übt dieser grobe Fehler, den man als kennzeichnend dafür beachten möge, wie wenig bekannt der eigentliche Verlauf von Winkelfunctionen damals noch war, keinerlei schädigenden Einfluss. Maier handhabt wesentlich spitze Winkel und Summen oder Differenzen von spitzen Winkeln. Er bedient sich der Formeln für die Functionen solcher Winkelsummen, indem er regelmässig die Functionen der einzelnen Winkel durch besondere Buchstaben bezeichnet. Heisst S der Sinus, C der Cosinus des grösseren spitzen Winkels, s und c dasselbe für den kleineren spitzen Winkel, so behauptet Maier, der Sinus der Summe beider Winkel sei $\frac{Sc + Cs}{r}$, der Sinus ihrer Differenz $\frac{Sc - Cs}{r}$, wo r den Kreishalbmesser bezeichnet. In ähnlicher Abkürzung sind T und t, M und m die Tangenten und Secanten der beiden spitzen Winkel. Maier legte Werth auf die logarithmische Benutzbarkeit der Formeln und bediente sich deshalb, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben waren, gern der Gleichung, welche heutigen Tages $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tang\frac{A+B}{2}}{\tang\frac{A-B}{2}}$ geschrieben zu werden pflegt, bei

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1727. T. II, 12—30.
[2] *obtusi anguli tangens et sinus positivi quidem manent, sed cotangens ipsius et cosinus privativi fiunt.*

Maier aber $\frac{r+c}{r-c} = \frac{t}{y}$ heisst, und von deren Benutzung durch Thomas Simpson etwa 20 Jahre später (1748) wir uns (S. 514) überzeugt haben.

Uebersichtlichkeit mögen die gewonnenen Formeln immerhin besessen haben, so lange sie in Uebung waren; man gewöhnt sich verhältnissmässig leicht an Bezeichnungen, so dass sie unersetzlich scheinen; aber Durchsichtigkeit fehlte den Formeln insofern, als der Zusammenhang der Winkel, deren Functionen in Rechnung traten, ihre Addition, ihre Subtraction nicht aus der Bezeichnung selbst sofort zu entnehmen war. Zudem ist nicht zu vergessen, dass Maier's Bezeichnungen keineswegs einen Fortschritt, sondern vielmehr einen nicht unbedeutenden Rückschritt gegen seit einem Jahrhunderte bekannte Schreibweisen bildeten. Wir wissen, dass Albert Girard (Bd. II, S. 648—649) schon 1626 die Silben tan und sec benutzte, um Tangente und Secante eines Winkels anzugeben, der selbst durch einen einfachen Buchstaben bezeichnet jenen Silben nachgesetzt wurde, dass er aber freilich folgewidrig genug den Sinus nicht durch sin andeutete, sondern durch den gleichen Buchstaben, der vorher für den Winkel selbst gebraucht worden war, so dass man unter A oder a bald einen Winkel, bald dessen Sinus zu verstehen hatte. William Oughtred ging in letzterer Beziehung über Girard hinaus[1]). In seiner *Trigonometry* von 1657 bediente er sich, wie es scheint, regelmässig der Abkürzungen *s, sco, t, tco, se, seco* für sinus, sinus complementi, tangens, tangens complementi, secans, secans complementi. Aber weder Girard noch Oughtred fanden die Nachahmung, deren sie würdig waren. Wohl hat bald dieser, bald jener Schriftsteller einmal von sin A, von tan B und dergleichen gesprochen, aber immer nur beiläufig.

Erst in Simpson's *Trigonometry* von 1748 ist fast durchweg mit den Wörtern *Sine, Co-sine*, mit den Silben *Tang, Co-tang* gerechnet. Das Einzige, allerdings ziemlich Unbedeutende, was man bei ihm vermissen kann, ist eine ausdrückliche Erklärung, er werde fortan diese Bezeichnungen anwenden.

Euler hat in verschiedenen Aufsätzen das Seine zur Einführung der kurzen Bezeichnung gethan. In den Petersburger Akademieschriften für 1737 findet sich zunächst ein Aufsatz[2]) von ihm über eine geometrische Aufgabe, die nicht ohne Interesse ist, aber doch nicht von solcher Wichtigkeit, dass wir bei ihr selbst zu verweilen

[1]) Briefliche Mittheilung von Herrn John S. Mackay, der sich dabei auf De Morgan, *Budget of Paradoxes* pag. 451 bezieht. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 207—221.

haben. Dort ist gelegentlich[1]) von $A \sin \frac{b}{c}$ die Rede mit dem Zusatze, er verstehe darunter den Arcus im Einheitskreise, dessen sinus $\frac{b}{c}$ sei. In einer Abhandlung des Jahrgangs 1744 der Nova Acta Eruditorum[2]), der Fortsetzung der früheren A. E., spricht Euler bei Gelegenheit der Integration einer Differentialgleichung von dem *arcus, cujus tangens* $= t$. *seu* $A\ tag\ t$,[3]) und zwei Seiten später heisst es: *Ponatur* $A\ tag\ t = 90^0 - \varphi$, *ut exprimat* φ *angulum* ADM, *erit* $t = cot\ \varphi = \frac{cos\ \varphi}{sin\ \varphi}$ *et* $1 + t^2 = \frac{1}{sin\ \varphi^2}$[4]) und damit war auch der Arcustangens wie früher der Arcussinus erklärt. Von durchschlagendem Erfolge war jedoch erst eine Abhandlung Euler's von 1753, welche wir deshalb als die zweite in diesem Kapitel zu nennende trigonometrische Abhandlung bezeichnen, die *Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits*[5]).

Euler's Grundgedanke ist folgender. Auf der Kugeloberfläche sind die Bögen grösster Kreise die kürzesten Linien, welche von einem Punkte nach einem anderen gezogen werden können, oder ein von einem Punkte der Kugeloberfläche nach einem anderen gespannter Faden nimmt die Gestalt eines Bogens eines grössten Kreises an. Ein sphärisches Dreieck besteht aber aus Bögen grösster Kreise, und es kann daher als die Figur mit drei Eckpunkten auf der Kugeloberfläche definirt werden, welche aus den kürzesten auf der gleichen Oberfläche möglichen Verbindungslinien jener Eckpunkte besteht. Gewinnt man aus dieser Definition, welche zur Anwendung der Methode grösster und kleinster Werthe herausfordert, Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des Dreiecks, so wird man damit die allgemeinste Trigonometrie schaffen, welche man überhaupt denken kann. Sie wird zur ebenen Trigonometrie, wenn die Kugeloberfläche mit einem unendlich grossen Halbmesser beschrieben zur Ebene entartet, zur sphäroidischen Trigonometrie, wenn statt der Kugeloberfläche die Oberfläche eines Sphäroids gewählt wird, und in der That hat Euler dem Aufsatze, von welchem hier die Rede ist, unmittelbar einen zweiten: *Élémens de la trigonométrie sphéroïdique*[6])

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 209: $A\ sin \frac{b}{c}$ *denotat arcum cujus sinus est* $\frac{b}{c}$ *in circulo radii* 1. [2]) *Nova A. E.* 1744 pag. 315—336. [3]) Ebenda pag. 325. [4]) Ebenda pag. 327. [5]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753 pag. 223—257. Eine deutsche Uebersetzung von E. Hammer erschien als Heft Nr. 73 von Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften. [6]) *Histoire de l'Académie de Berlin* Année 1753 pag. 258—293.

nachfolgen lassen. Euler setzt also die Lehre von den kürzesten Linien voraus, um trigonometrische Ergebnisse abzuleiten, eine zum mindesten eigenartige Reihenfolge der Entwicklungen, welche uns nöthigen wird, im 117. Kapitel des Aufsatzes von 1753 abermals zu gedenken.

Jetzt dürfen wir nur auf eine Zwischenbemerkung des Aufsatzes eingehen. Euler sagt nämlich[1]), er wolle die Winkel eines sphärischen Dreiecks durch A, B, C, die ihnen gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c bezeichnen. Das war eine an und für sich unbedeutende Neuerung, die jeder, auch der unbedeutendste Mathematiker hätte einführen können, aber thatsächlich ist es nicht geschehen. Deshalb erscheint es berechtigt, Euler's Aufsatz von 1753 als den Ursprung der Form der späteren Trigonometrie anzuerkennen, um so mehr, als in ihm fortwährend von den Abkürzungssilben *sin*, *cos* (oder *cs*), *tang* (oder *tag* oder *tg* oder *tng*) Gebrauch gemacht ist.

105. Kapitel.

Algebra bis 1745.

Wir haben (S. 390) angekündigt, dass die von Newton zuerst aufgeworfene Frage nach der Anzahl der complexen Gleichungswurzeln einer gegebenen Gleichung von anderen englischen Schriftstellern weiter gefördert worden sei. Wir haben unter ihnen in erster Linie Colin Maclaurin zu nennen. Dieser hat seine Untersuchungen in zwei Briefen an Martin Folkes[2]) (1690—1754), einen vermögenden Privatmann, der lange Zeit Vorsitzender der Royal Society in London war, niedergelegt. Der erste Brief[3]) geht von folgendem Lemma aus. Sind m positive Zahlen $a, b, c, d \cdots$ gegeben, so lassen sich aus ihnen $\frac{m(m-1)}{2}$ Paare bilden, deren jedes sich zu einem Producte sowie zu einer Differenz verbinden lässt. Die Summe aller zweifactorigen Producte heisse $B = ab + ac + \cdots + bc + \cdots$. Die Summe der Quadrate der m Zahlen heisse $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \cdots$. Die Summe der Quadrate der $\frac{m(m-1)}{2}$ Differenzen ist positiv oder $(a-b)^2 + (a-c)^2 + \cdots + (b-c)^2 + \cdots > 0$. Entwickelt nimmt sie die Gestalt $(m-1)A \quad 2B$ an, folglich ist $\frac{m-1}{2} A > B$. Sind einzelne der vorgelegten Zahlen negativ, so findet

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753 pag. 231. [2]) Poggendorff I, 766. [3]) P. T. XXXIV, 104—112.

das Lemma in gleicher Weise statt, da A unverändert bleibt, während B abnimmt, wenn einzelne der zu addirenden Producte negativ ausfallen. Sind alle $a, b, c, d \cdots$ einander gleich, so werden sämmtliche gebildeten Differenzen, also auch die Summe ihrer Quadrate, zu Null, d. h. es ist alsdann $(m-1)A - 2B = 0$, und will man diese Möglichkeit mitberücksichtigen, so lautet das nun ganz allgemeine nur an das Reellsein von $a, b, c, d \cdots$ geknüpfte Lemma $\frac{m-1}{2}A \geqq B$. Man kann ihm umgekehrte Giltigkeit beilegen, d. h. $B > \frac{m-1}{2}A$ kann nur stattfinden, wenn nicht alle Zahlen $a, b, c, d \cdots$ reell, sondern einzelne derselben complex sind. Es bedarf kaum der Bemerkung, dass wir nur neuerem Sprachgebrauche zu Liebe *complex* sagen, die Schriftsteller dieses Kapitels gebrauchten ausschliesslich das Wort *imaginär*. Das Complexsein von a oder b u. s. w. können wir auch so aussprechen, dass die Gleichung

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots = 0$$

auch complexe Wurzeln besitzen muss, damit $B > \frac{m-1}{2}A$ stattfinden kann, wobei man weiter zu beachten hat, dass solche complexe Wurzeln stets paarweise auftreten, sofern die Gleichungscoefficienten reell sind. Maclaurin führte das nun im Einzelnen aus.

Damit $x^2-(a+b)x+ab=0$ zwei complexe Wurzeln besitze, muss $ab > \frac{a^2+b^2}{2}$ oder $abx^2 > \frac{1}{4}((a+b)x)^2$ sein. Die New-ton'sche Bruchreihe (S. 388) ist $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\cdot$ Ihr Quotient $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{4}$ ist über $-(a+b)x$ zu setzen. Man hat also zu vergleichen $\frac{1}{4}(-(a+b)x)^2$ mit $ab\cdot x^2$. Letztere Zahl ist voraussetzungsmässig die grössere, und das fordert ein Minuszeichen. Das erste und letzte Glied haben immer $+$, folglich erscheint $+-+$ mit zwei Zeichenwechseln den zwei complexen Wurzeln entsprechend.

In der cubischen Gleichung $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$ besteht das Kennzeichen complexer Wurzeln in $ab+ac+bc > a^2+b^2+c^2$ oder in $3(ab+ac+bc) > (a+b+c)^2$. Die Newton'sche Bruchreihe $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$ liefert die Quotienten $\frac{\frac{2}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{3}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{3}$, welche über $-(a+b+c)x^2$ und über $(ab+ac+bc)$ zu setzen sind. Nun ist zu vergleichen $\frac{1}{3}(-(a+b+c)x^2)^2$

mit $x^3 \cdot (ab + ac + bc)x$ und $\frac{1}{3}((ab + ac + bc)x)^2$ mit $- abc \cdot (a + b + c)x^2$. Der erste Vergleich zeigt, dass die zweite Zahl grösser ist als die erste, also — erfordert, den zweiten Vergleich schenken wir uns und schreiben $+ - ? +$. Mag nun das ? durch $+$ oder durch $-$ ersetzt werden, jedenfalls erscheinen zwei Zeichenwechsel und zwei complexe Wurzeln.

In der biquadratischen Gleichung $x^4 - (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 - (abc + abd + acd + bcd)x + abcd = 0$ ist als Kriterium complexer Wurzeln erkannt $(ab + ac + ad + bc + bd + cd) > \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ oder $(ab + ac + ad + bc + bd + cd) > \frac{3}{8}(a + b + c + d)^2$, welches, wenn die Gleichung kürzer $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ geschrieben wird, die Form $q > \frac{3}{8}p^2$ annimmt. Man kann aber auch q, r, s zu dem Kriterium verwenden. Sind nämlich nicht alle Grössen a, b, c, d reell, so gilt das Gleiche für die vier Grössen abc, abd, acd, bcd, auf welche man alsdann das Lemma $B > \frac{m-1}{2}A$ anwenden kann, d. h. man hat $abc \cdot abd + abc \cdot acd + abc \cdot bcd + abd \cdot acd + abd \cdot bcd + acd \cdot bcd > \frac{3}{2}(a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2)$. Die sechs Glieder links sind nichts anderes als $abcd(ab + ac + bc + ad + bd + cd) = sq$, und die Klammergrösse rechts ist $(abc + abd + acd + bcd)^2 - 2(abc \cdot abd + abc \cdot acd + abc \cdot bcd + abd \cdot acd + abd \cdot bcd + acd \cdot bcd) = r^2 - 2sq$. Die Ungleichung wird demnach zu $sq > \frac{3}{2}(r^2 - 2sq)$ oder $sq > \frac{3}{8}r^2$.

Ein letzter Satz, dessen Beweis genau nach dem Muster der mehrfach gezogenen Folgerungen geführt wird, heisst endlich: Wenn $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \cdots \pm Cx^2 \mp Dx \pm E = 0$ eine Gleichung mit ausschliesslich reellen Wurzeln ist, so muss $(m-1)A^2 > 2mB$ und $(m-1)D^2 > 2mCE$ sein. Wir bemerken zum Ueberflusse, dass die in der ersten Ungleichung vorkommenden Gleichungscoefficienten A, B nicht mit den Wurzelfunctionen A, B des anfänglichen Lemma verwechselt werden dürfen.

Nun erschien nach einiger Frist im Jahre 1728 ein inhaltlich verwandter Aufsatz[1]. Der Verfasser hiess George Campbell, aber über seine Persönlichkeit Näheres festzustellen ist nicht gelungen, wenn er auch im 114. Kapitel uns abermals begegnen wird. Die englische *National Biography* z. B. kennt zwar einen Theologen

[1] P. T. XXXV, 515—531.

George Campbell, aber derselbe lebte 1719—1796, kann also unmöglich 1728 einen mathematischen Aufsatz von Bedeutung veröffentlicht haben. Campbell schickt einige Lemmata voraus. Damit die Wurzeln von $ax^2 - Bx + A = 0$ reell seien, müsse $\frac{B^2}{4} > aA$ sein. Aus der Gleichung $x^n - Bx^{n-1} + \cdots + bx \mp A = 0$ folge mittels $x = \frac{1}{y}$ die neue Gleichung $Ay^n - by^{n-1} + \cdots \pm By \mp 1 = 0$, und jeder Wurzel $x = a$ der ersten entspreche eine Wurzel $y = \frac{1}{a}$ der zweiten Gleichung[1]. Die beiden Grössen a und $\frac{1}{a}$ seien gleichzeitig reell und gleichzeitig complex, demnach haben beide genannte Gleichungen genau gleich viele complexe Wurzeln. Bilde man aus $x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - - \cdots \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$, wofür wir abweichend von Campbell kürzer $\Phi(x) = 0$ schreiben wollen, eine neue Gleichung, deren Entstehung auf die Differentiation von $\Phi(x)$ hinausläuft, die also $\Phi'(x) = 0$ wird geschrieben werden dürfen, und habe $\Phi(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln, so sei das Gleiche für $\Phi'(x) = 0$ der Fall, wenn auch nicht umgekehrt, vielmehr könne $\Phi'(x) = 0$ ausschliesslich reelle Wurzeln besitzen, während $\Phi(x) = 0$ complexe Wurzeln habe. Dagegen lasse der Satz die Erweiterung zu, dass $\Phi(x) = 0$ mindestens ebensoviele complexe Wurzeln besitze als $\Phi'(x) = 0$. Alle diese Lemmata, sagt Campbell, seien bekannt und aus der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen leicht herzuleiten, Reyneau z. B. habe sie in seiner *Analyse démontrée* bewiesen.

Wir müssen hier einige Worte über diesen letzteren Schriftsteller einschalten. Charles Reyneau[2] (1656—1728) war in Brissac unweit Angers geboren. Er trat 1676 dem Orden des Oratoriums in Paris bei, und vielleicht schon aus jener Zeit stammte eine enge Freundschaft mit Malebranche. Reyneau fand als Professor der Philosophie nach einander in Toulon und in Pezenas, dann 1683 als Professor der Mathematik in Angers Verwendung. Seit 1716 war er *Associé libre* der Pariser Akademie. Seiner *Analyse démontrée* von 1708 wird nachgerühmt, sie habe die wesentlichen Entdeckungen der Descartes, Leibniz, Newton und Anderer in ein Werk vereinigt. Zu den Anderen dürfte auch Rolle gezählt werden müssen, an dessen bahnbrechende algebraische Arbeiten (S. 115—119) die Abhandlung Campbell's ebenso erinnert, wie unser Bericht über Newton's *Arithmetica universalis* (S. 390) ihrer gedenken musste. Es ist viel-

[1] Campbell nimmt an der zweimaligen Verwendung von a als Gleichungscoefficient und als Gleichungswurzel keinerlei Anstoss. Ferner schreibt er auch in der zweiten Gleichung nicht y, sondern x für die Unbekannte. [2] *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1728 (*Histoire* pag. 112—116).

leicht nicht ganz überflüssig, darauf aufmerksam zu machen, dass die Arithmetica universalis von 1707 der Analyse démontrée von 1708 vorausging. Newton wird also Rolle's Arbeiten im Originalwerke kennen gelernt haben, während Campbell eingestandenermassen aus Reyneau's zweiter Quelle schöpfte.

Wir kehren zu Campbell zurück. Er geht, wie von $\Phi(x)$ zu $\Phi'(x)$, auch zu den höheren Ableitungen über, indem er deren Gestalt erörtert, und kommt schliesslich zur quadratischen Gleichung $\Phi^{(n-2)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 3x^2 - (n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2Bx + (n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1C = 0$ oder zu $\frac{n(n-1)}{2}x^2 - (n-1)Bx + C = 0$, von welcher aus behauptet wird, $\Phi(x) = 0$ habe mindestens ebensoviele complexe Wurzeln als sie. Das Kennzeichen des Reellseins der Wurzeln von $\frac{n(n-1)}{2}x^2 - (n-1)Bx + C = 0$ ist aber $\frac{n-1}{2n}B^2 > C$, und diese Ungleichung muss stattfinden, wenn $\Phi(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln besitzt. In diesem Falle sind ferner nach Campbell's zweitem Lemma auch die Wurzeln von $Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - \cdots = 0$, beziehungsweise von $x^n - \frac{b}{A}x^{n-1} + \frac{c}{A}x^{n-2} - \cdots = 0$ und von $\frac{n(n-1)}{2}x^2 - \frac{(n-1)b}{A}x + \frac{c}{A} = 0$ reell, und es muss sein $\frac{n-1}{2n}\frac{b^2}{A^2} > \frac{c}{A}$ oder $\frac{n-1}{2n}b^2 > cA$. Campbell zieht aus letzterer Ungleichung die Folgerung $\frac{n-1}{2}b^2 > cA$, die an sich ganz richtig ist, die er aber nicht weiter verwerthet. Das Reellsein der Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades $\Phi(x) = x^n - Bx^{n-1} + \cdots \pm (cx^2 - bx + A) = 0$ mit den drei letzten Coefficienten $\pm c$, $\mp b$, $\pm A$ zieht also, da $(\mp b)^2 = b^2$ und $(\pm c)\cdot(\pm A) = cA$ ist, nothwendig die Folge nach sich, dass $\frac{n-1}{2n}$ mal dem ins Quadrat erhobenen Coefficienten von x grösser sein muss, als das Product des Coefficienten von x^2 in die absolute Zahl[1]), d. h. in die Gleichungsconstante.

Wie durch aufeinanderfolgende Ableitungen aus $\Phi(x) = 0$ eine quadratische Gleichung hervorgebracht werden kann, kann die Reihe der Ableitungen auch früher unterbrochen werden, so dass etwa N die Gleichungsconstante derjenigen Gleichung wird, bei welcher man stehen blieb, während die Coefficienten von x und von x^2 aus M und aus L hervorgehen. Campbell nimmt m als *Exponenten des Coefficienten* M an, d. h. er lässt in $\Phi(x)$ den Coefficienten M als Bestandtheil des Gliedes $\pm Mx^{n-m}$ erscheinen. Die benachbarten Glieder

[1]) *numerus absolutus.*

daselbst sind $-Lx^{n-m+1}$ und $\mp Nx^{n-m-1}$. Nach $n-m-1$ maliger Differentiation entsteht $\Phi^{(n-m-1)}(x)$ vom Grade $n-(n-m-1) = m+1$ und die Schlussglieder sind $\mp\left(\frac{(n-m+1)(n-m)}{2}Lx^2 - (n-m)Mx + N\right)$. Sie lassen die Ungleichung $\frac{(m+1)-1}{2(m+1)}(n-m)^2M^2 > \frac{(n-m+1)(n-m)}{2}LN$ oder $\frac{m}{m+1}\cdot\frac{n-m}{n-m+1}M^2 > LN$ stattfinden, sofern $\Phi(x)=0$ lauter reelle Wurzeln besitzt. Dabei ist $\frac{m}{m+1}\cdot\frac{n-m}{n-m+1} = \frac{\frac{n-m}{m+1}}{\frac{n-m+1}{m}}$, d. h. der Quotient, welcher entsteht, wenn in der Bruchreihe $\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \cdots \frac{n-m+1}{m}, \frac{n-m}{m+1}, \cdots \frac{1}{n}$ der $(m+1)^{\text{te}}$ Bruch durch den m^{ten} dividirt wird, und das ist ja das Bildungsgesetz der von Newton aufgestellten Zahlenfactoren. So oft die als nothwendig erkannte Ungleichung nicht stattfindet, kann man auf das Vorhandensein eines Paares complexer Wurzeln schliessen, und daraus, behauptet Campbell, könne man unmittelbar Newton's Regel für die Auffindung der Anzahl complexer Wurzeln herleiten[1]. Campbell berechnet nunmehr die bei Gleichungen mit ausschliesslich reellen Wurzeln positive Differenz $\frac{m}{m+1}\cdot\frac{n-m}{n-m+1}M^2 - LN$ und findet sie $=\frac{(n+1)Z}{(m+1)(n-m+1)} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} - \frac{\gamma}{4} - \cdots$ unter Annahme folgender Abkürzungen. Als Coefficient von $\pm x^{n-m}$ in $\Phi(x)$ ist M die Summe der als Producte aufgefassten Combinationen zu je m aus den n Gleichungswurzeln $a, b, c, d \cdots$; bildet man aus diesen $\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}$ Gliedern von M alle Differenzen von je 2, deren es also $\frac{1}{2}\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m}\left(\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdots m} - 1\right)$ giebt, und nimmt die Summe ihrer Quadrate, so soll dieselbe Z heissen. Unter den gebildeten Differenzen kann man solche unterscheiden, deren Glieder bis auf einen Factor erster Dimension übereinstimmen, solche bei denen die Glieder der Uebereinstimmung in Bezug auf Factoren 2ter, 3ter Dimension entbehren u. s. w. Die Summen der Quadrate der so in Gruppen geordneten Differenzen heissen $\alpha, \beta, \gamma \cdots$. Das Negativsein von $\frac{(n+1)Z}{(m+1)(n-m+1)} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} - \frac{\gamma}{4} - \cdots$ bildet alsdann eine andere Form der Bedingung für das Vorhandensein complexer Gleichungswurzeln.

[1] *Ex dictis immediate deducitur demonstratio Regulae quam dedit illustrissimus Newtonus, qua determinatur Numerus Radicum impossibilium in quavis data Aequatione.*

Wollten wir rein chronologisch in unserer Erzählung von der Entwicklung der Algebra fortschreiten, so wäre an dieser Stelle über eine Abhandlung Daniel Bernoulli's von 1728 zu berichten. Wir freuen uns diesen Bericht aus bestimmten Gründen bis zum 109. Kapitel hinausschieben zu können und dadurch in der Lage zu sein, ohne von dem begonnenen Gegenstande abzulenken, weiter fortzufahren.

Maclaurin's zweiter Brief an Folkes fordert nämlich unsere Aufmerksamkeit, den er 1729 dem ersten Briefe folgen liess[1]), offenbar in einiger Verstimmung darüber, dass Campbell ihm Manches von seinen seit Veröffentlichung des ersten Briefes neu gewonnenen Ergebnissen vorweg genommen hatte. So ist wohl Maclaurin's Einleitungssatz zu verstehen, er habe die Absicht gehegt eine Algebra herauszugeben und habe dieser seine weiteren Forschungen einverleiben wollen, er ziehe jedoch aus gewissen Gründen vor, nun doch eine neue Abhandlung zu veröffentlichen. Die Gleichung, von deren Wurzeln der Brief handelt, und die wir wieder mitunter durch $\Phi(x) = 0$ bezeichnen werden, hat die Gestalt

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - Gx^{n-7} + Hx^{n-8} - Ix^{n-9} + Kx^{n-10} - \cdots = 0.$$

Die Wurzeln sollen $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l \cdots$ sein, so dass $A = a + b + c + d + e + \cdots$. Maclaurin nennt $a, b, c \cdots$ Theile oder Glieder des Coefficienten A, ebenso $ab, ac, ad \cdots$ Theile oder Glieder des Coefficienten B u. s. w. Dimension eines Gliedes oder eines Coefficienten nennt er die Anzahl der in jedem Gliede als Factoren enthaltenen Wurzeln. Mithin ist A ein Coefficient von der Dimension 1, B, C sind solche von der Dimension 2, 3 u. s. w. Theile verschiedener Coefficienten sind unter einander ähnlich, wenn alle Factoren des Theiles des Coefficienten niedriger Dimension in dem Theile dessen von höherer Dimension vorkommen. Ist umgekehrt kein Factor des Teiles des niedrigeren Coefficienten in dem Theile des höheren vorhanden, so heissen die Theile unähnlich. So sind abc und $abcde$ ähnliche Theile von C und E, ab und $cdefgh$ unähnliche Theile von B und F. Mit Hilfe dieser Benennungen erläutert Maclaurin alsdann auch eine Bezeichnung: er schreibt $C'D'$ für die Summe der Producte, welche entstehen, wenn alle Theile von C mit den ihnen ähnlichen Theilen von D vervielfacht werden. $C'C'$ ist folglich die Summe der Quadrate aller Theile von C. Dagegen bedeutet ihm $C''C$ die Summe der Producte von je zwei ungleichen Theilen von C mit einander. Demnach ist $CC = C'C' + 2C''C$.

[1]) P. T. XXXVI, 59—96.

Bei Vervielfachung ähnlicher Theile von unter einander verschiedenen Coefficienten macht Maclaurin darauf aufmerksam, dass deren Productentheile bei der Vervielfachung ganzer Coefficienten bald nur einmal, bald wiederholt auftreten. Wenn z. B. in $C'G'$ das Glied $a^2b^2c^2defg$ vorkommt, so ist in CG ebendasselbe Glied einmal enthalten. Anders verhält es sich, wenn das Product DF gebildet wird. Da nämlich $a^2b^2c^2defg = abcd \cdot abcefg = abce \cdot abcdfg = abcf \cdot abcdeg = abcg \cdot abcdef$, so wird dieses Glied 4mal in DF vorkommen, d. h. ebenso oft als die Differenz der Dimensionszahlen von C und G, $7 - 3 = 4$, vorschreibt. Wird ferner E^2 gebildet, so erscheint $a^2b^2c^2defg = abcde \cdot abcfg = abcdf \cdot abceg = abcdg \cdot abcef$ oder 3mal, d. h. halb so oft als $7 - 3 = 4$ Elemente zu je zwei zusammengefasst werden können. Mit Hilfe dieser Betrachtung, beziehungsweise Bezeichnung, und gestützt auf die Ergebnisse des ersten Briefes stellt Maclaurin folgende Sätze auf. Sei in der oben kurz mit $\Phi(x) = 0$ bezeichneten Gleichung m der Unterschied der Dimensionen von C und G, so ist $CG = C'G' + (m + 2) B'H' + \frac{m+3}{1} \cdot \frac{m+4}{2} A'I' + \frac{m+4}{1} \cdot \frac{m+5}{2} \cdot \frac{m+6}{3} \cdot 1 \cdot K$ d. h. wegen $m = 7 - 3 = 4$ ist $CG = C'G' + 6B'H' + 28A'I' + 120K$. Aehnlicher Weise ist auch $DF = D'F' + 4C'G' + 15B'H' + 56A'I' + 210K$ und $E^2 = E'E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 256K$. Ist ferner $l = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdots$, wo die Anzahl der mit einander vervielfachten Brüche der Dimension von E gleichkommt, wodurch l die Bedeutung der Anzahl der den Coefficienten E bildenden Glieder erhält, so ist unter Annahme lauter reeller Gleichungswurzeln $\frac{l-1}{2l} E^2 > DF - CG + BH - AI + K$. Hat $\Phi(x) = 0$ nicht bloss lauter reelle Wurzeln, sondern diese auch alle gleichen Vorzeichens, ist ferner C von der Dimension r, B von der Dimension $r - 1$, G und H von den Dimensionen $r + s$ und $r + s + 1$, so ist $(n - r - s)r C'G' > (s + 1)(s + 2) B'H'$. Wird $s = 0$, d. h. geht sowohl C als G in E über, so nimmt der Satz die Gestalt an $(n - r)r E'E' > 2D'F'$ oder $mE'E' > 2D'F'$, wenn von jetzt an m eine Abkürzung für $(n - r)r$ ist, während s dem früheren m entspricht. Dieselbe Abkürzung gestattet $(n - r - q)(r \quad q) = m - qn + q^2$ zu schreiben und mit Anwendung dieser Zeichen heisst $(q - r - 1)(r - 1) D'F' > 3 \cdot 4 C'G'$ auch $(m - n + 1) D'F' > 12 C'G'$. Ebenso ist $(m - 2n + 4) C'G' > 30 B'H'$, $(m - 3n + 9) B'H' > 56 A'I'$, $(m - 4n + 16) A'I' > 90 K$. Die unter der erwähnten Voraussetzung, dass alle Gleichungswurzeln reell und gleichen Vorzeichens sind, stets positiven Differenzen zwischen je zwei mit einander

verglichenen Grössen hat nun Maclaurin durch bestrichelte kleine lateinische Buchstaben bezeichnet, d. h. er setzt:

$$\begin{aligned} mE'E' - 2D'F' &= a' \\ (m - n + 1)\, D'F' - 12C'G' &= b' \\ (m - 2n + 4)\, C'G' - 30B'H' &= c' \\ (m - 3n + 9)\, B'H' - 56A'I' &= d' \\ (m - 4n + 16)\, A'I' - 90K \quad &= e' \end{aligned}$$

und macht darauf aufmerksam, dass die Zahlen 2, 12, 30, 56, 90 in stets um 8 zunehmenden Differenzen anwachsen. Maclaurin vervielfacht nunmehr die oben angeführten Werthe von E^2 und DF mit m, beziehungsweise mit $m + n + 1$, so dass er erhält:

$$\begin{aligned} mE^2 &= mE'E' + 2mD'F' + 6mC'G' + 20mB'H' \\ &\quad + 70mA'I' + 256mK, \\ (m + n + 1)\, DF &= (m + n + 1)\, D'F' + 4(m + n + 1)\, C'G' \\ &\quad + 15(m + n + 1)\, B'H' + 56(m + n + 1)\, A'I' \\ &\quad + 210\,(m + n + 1)\, K \end{aligned}$$

und zieht beide Werthe von einander ab. Er erhält:

$$mE^2 - (m + n + 1)\, DF = mE'E' + (m - n - 1)\, D'F' + (2m - 4n - 4)\, C'G' + (5m - 15n - 15) B'H' + (14m - 56n - 56) A'I' + (46m - 210n - 210) K = a' + (m - n + 1) D'F' + (2m - 4n - 4) C'G' + (5m - 15n - 15) B'H' + (14m - 56n - 56) A'I' + (46m - 210n - 210) K.$$

Man sieht, wie weitere Einführungen kleiner bestrichelter Buchstaben rechts vom Gleichheitszeichen erfolgen. Man setzt $(m - n + 1)\, D'F' = b' + 12C'G'$, dann $(2m - 4n + 8)\, C'G' = 2c' + 60B'H'$ u. s. w. Man erhält endlich: $mE^2 - (m + n + 1)\, DF = a' + b' + 2c' + 5d' + 14e'$ und die Zahlen 1, 1, 2, 5, 14, welche dabei auftreten, sind nichts anderes als $1 - 0$, $2 - 1$, $6 - 4$, $20 - 15$, $70 - 56$, d. h. die Differenzen der Zahlen, welche vorher bei der Entwicklung von E^2 und DF nach Summen von Producten grosser bestrichelter Buchstaben auftraten. Die gefundene Gleichung gestattet aber auch die Umformung in $\frac{m}{m + n + 1} E^2 = DF + \frac{a' + b' + c' + 5d' + 14e'}{m + n + 1}$. Nun war $m = (n - r) r$ positiv, ebenso muss $m + n + 1 = nr - r^2 + n + 1 = (n - r + 1)(r + 1)$ positiv sein. Ferner ist $\frac{m}{m + n + 1} = \frac{(n - r)\, r}{(n - r + 1)(r + 1)} = \frac{\frac{n - r}{r + 1}}{\frac{n - r + 1}{r}}$. Die genannte Gleichung hat also auch eine Ungleichung $\frac{\frac{n - r}{r + 1}}{\frac{n - r + 1}{r}} E^2 > DF$ zur Folge, sobald alle

Wurzeln von $\Phi(x) = 0$ reell sind; die Bedingung gleichen Vorzeichens für die Wurzeln lässt Maclaurin hier plötzlich fallen, ohne eine Begründung dafür zu geben. Dagegen macht er darauf aufmerksam, dass $\frac{\frac{n-r}{r+1}}{\frac{n-r+1}{r}}$ der Quotient zweier Brüche sei, welchen Newton dem Coefficienten E zuordnete. Maclaurin fügt dann noch einige andere Ungleichungen zwischen Producten von Coefficienten hinzu, welche theils stattfinden, wenn alle Wurzeln von $\Phi(x) = 0$ reell, theils wenn sie reell und gleichen Vorzeichens sind. Das Nichtstattfinden der betreffenden Ungleichungen zieht die Folgerung auf das Vorhandensein complexer Wurzeln nach sich, und der Verfasser fügt hinzu, er sei auch im Stande die Anzahl der complexen Wurzeln zu bestimmen, nur sei der Beweis sehr umständlich. Er verzichtet darauf und giebt ein anderes, von ganz anderen Gesichtspunkten aus gefundenes Merkmal dafür, dass $\Phi(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln gleichen Vorzeichens besitze.

Wird, sagt er, eine Summe in beliebig viele Theile zerlegt, so ist das Product dieser Theile am grössten, wenn alle Theile gleich sind, und unter derselben Annahme gleicher Theile wird auch die Summe von Producten solcher Theile unter einander am grössten, die Summe gleicher Potenzen der einzelnen Theile dagegen am kleinsten. In Zeichen geschrieben wird, sofern $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$ ist, $\sum x_{h_1} x_{h_2} \cdots x_{h_k}$ bei $h_1 < h_2 < \cdots < h_k$ ein Maximum und $\sum x_{h}^{\lambda}$ ein Minimum bei $x_1 = x_2 = \cdots x_n = \frac{a}{n}$.

Da wir Reyneau's *Analyse démontrée* nie zu Gesicht bekommen haben, so wissen wir nicht, ob nicht dort Aehnliches sich findet, was uns nach Campbell's Benutzung dieses Werkes (S. 545) nicht ausgeschlossen erscheint. Täuschen wir uns darin, so erkennen wir hier bei Maclaurin das erste Beispiel eines Maximum und eines Minimum einer Function von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen.

Die Aufgabe würde einen ungemeinen theoretischen Fortschritt darstellen, wenn Maclaurin sie in dieser Bedeutung aufgefasst und ihr mittels der Infinitesimalrechnung zu Leibe gegangen wäre. Daran dachte er freilich nicht. Er nahm als bekannt an, dass das Quadrat das grösste Rechteck gleichen Umfanges sei und schloss von da aus weiter. Man zerlege (Fig. 95) die AB in beliebig viele Stücke AC, CD, DE, EB und bilde ein Product $AC \cdot CD \cdot DE \cdot EB$,

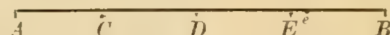


Fig. 95.

welches ein Maximum sein soll. Jedenfalls wird E in der Mitte zwischen D und B liegen müssen, weil dann $DE \cdot EB > De \cdot eB$, wo auch e ausserhalb dieser Mitte zwischen D und B liegen mag. Aehnlicherweise muss D in der Mitte von CE, C in der Mitte von AD angenommen werden, d. h. es muss $AC = CD = DE = EB$ sein.

Der von den so begründeten Sätzen gemachte Gebrauch ist folgender. Sei wieder $\Phi(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \cdots = 0$ und D der Coefficient von der Dimension r, sei überdies $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-r+1}{r} = l$. Gesetzt $\Phi(x) = 0$ hätte lauter gleiche Wurzeln, so müsste, weil A die Summe der n Gleichungswurzeln ist, jede derselbe $\frac{A}{n}$ sein, und die Gleichung hiesse alsdann $\left(x - \frac{A}{n}\right)^n = 0$ oder $x^n - Ax^{n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \frac{A^2}{n^2} x^{n-2} + \cdots + l \frac{A^r}{n^r} x^{n-r} + \cdots = 0$. Die Coefficienten von x^{n-2}, von x^{n-r} sind zugleich die Summen der Producte zu je zwei, zu je r der unter einander gleichen Gleichungswurzeln, während in dem wirklichen $\Phi(x)$ der Coefficient B und der Coefficient von der Dimension r die gleichen Beziehungen zu den im Allgemeinen wenigstens theilweise von einander verschiedenen Gleichungswurzeln besitzen, deren Gesammtsumme jedoch wieder A ist. Jene hypothetischen Wurzeln machen die aus ihnen gebildeten Coefficienten unter einer bestimmten Voraussetzung, welche der Figur sich entnehmen lässt, zu einem Maximum, nämlich dann und nur dann, wenn sämmtliche Veränderliche, d. h. sämmtliche Gleichungswurzeln reell sind. Unter dieser Voraussetzung muss z. B. $l \frac{A^r}{n^r} > D$ sein, wenn D der Coefficient von der Dimension r ist. Aehnlich gebaute Ungleichungen lassen sich auch mittels $B, C \cdots$ herstellen, die nothwendig stattfinden müssen, wenn alle Gleichungswurzeln von $\Phi(x) = 0$ reell und gleichen Vorzeichens sind. Das Nichtstatthaben einer solchen Ungleichung schliesst also die ausgesprochene Bedingung für die Gleichungswurzeln aus.

Maclaurin schlägt noch einen dritten Weg zum Nachweise complexer Gleichungswurzeln ein, indem er von der Herstellung von Grenzen für die Wurzelwerthe ausgeht. Die Gleichung $\Phi(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \cdots = 0$ wird durch die Substitution $x = y + e$, wo e irgend eine reelle Zahl bedeutet, in eine Gleichung $\Psi(y) = 0$ umgewandelt, deren Wurzeln um e kleiner sind als die Wurzeln von $\Phi(x) = 0$. Ordnet man $\Psi(y)$ nach steigenden Potenzen von y und betrachtet die e enthaltenden Ausdrücke, mit welchen $y^0, y^1, y^2 \cdots$ vervielfacht erscheinen, so ist, sagt Maclaurin, deren Bildungsweise offenbar, *patet*. Er beschreibt diese Bildungsweise,

ohne sich der Differentialquotienten zu bedienen. Ahmen wir ihm darin nicht nach, sondern schreiben wir so, wie es gegenwärtig gebräuchlich ist, und wie es Maclaurin mit Fluxionspünktchen auch hätte thun können, so ist:

$$\Psi(y) = \Phi(e) + \Phi'(e) \cdot y + \frac{\Phi''(e)}{1 \cdot 2} \cdot y^2 + \cdots + \frac{\Phi^{(r)}(e)}{1 \cdot 2 \cdots r} \cdot y^r + \cdots.$$

Nun sei $\Phi(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\cdots$ und werde, während $K < L$ und beide reell sind, negativ durch $x = K$, positiv durch $x = L$. Das kann nur so erfolgt sein, dass von den Factoren $K - a$, $L - a$ oder $K - b$, $L - b$ oder $K - c$, $L - c$ u. s. w. mindestens einer das entgegengesetzte Zeichen besitzt als der ihm entsprechende, dass also z. B. $K - b$ negativ, $L - b$ positiv ausfällt, d. h. $K < b < L$ ist. Man besitzt also K und L als Wurzelgrenzen, zwischen welchen mindestens eine Wurzel $x = b$ liegt, und dieses b muss, fährt Maclaurin fort, reell sein. Complexe Wurzeln kommen, sagt er, paarweise vor; neben $x - m - \sqrt{-n^2}$ muss auch $x - m + \sqrt{-n^2}$ ein Factor von $\Phi(x)$ sein, also auch deren Product $(x - m)^2 + n^2$, und dieses ändert sein Zeichen nicht, mag $x = K$ oder $x = L$ gesetzt werden.

Maclaurin kehrt jetzt zu $\Phi(x) = \Psi(y) = \Phi(e) + \Phi'(e) \cdot y + \frac{\Phi''(e)}{1 \cdot 2} \cdot y^2 + \cdots = 0$ zurück unter Berücksichtigung einer Grössenordnung unter den Wurzeln von $\Phi(x) = 0$, sodass etwa $a < b < c < d < \cdots$. Setzt man das an sich beliebige $e = a$, so wird $\Phi(a) = 0$, und $\Psi(y) = 0$, deren Wurzeln $a - e$, $b - e$, $c - e$, $d - e \cdots$ jetzt $a - a = 0$, $b - a$, $c - a$, $d - a \cdots$ sein werden, geht nach Weglassung des gemeinsamen Factors y in $\Phi'(a) + \frac{1}{2}\Phi''(a)y \cdots = 0$ über, welche nach y nur noch vom Grade $n - 1$ ist und erfüllt werden muss, wenn $y = b - a$, $y = c - a$, $y = d - a \cdots$. Dabei ist (wenn etwa als bestimmtes Beispiel $n = 4$ gewählt wird) in der nach y noch kubischen Gleichung $\Phi'(a) + \frac{1}{2}\Phi''(a)y + \frac{1}{6}\Phi'''(a)y^2 + y^3 = 0$ der y nicht mehr enthaltende Gleichungsteil $\Phi'(a)$ das negative Product der noch übrigen Wurzelwerthe $b - a$, $c - a$, $d - a$. Man hat also $\Phi'(a) = -(b - a)(c - a)(d - a)$ negativ wegen $a < b < c < d$.

Wird in $\Psi(y) = 0$ ferner $e = b$, $e = c$, $e = d$ eingesetzt, so entstehen noch drei weitere nach y kubische Gleichungen mit von y freien Gliedern, deren Vorzeichen bekannt sind:

$$\Phi'(b) + \frac{1}{2}\Phi''(b)y + \frac{1}{6}\Phi'''(b)y^2 + y^3 = 0$$

$$\Phi'(c) + \frac{1}{2}\Phi''(c)y + \frac{1}{6}\Phi'''(c)y^2 + y^3 = 0$$

$$\Phi'(d) + \frac{1}{2}\Phi''(d)y + \frac{1}{6}\Phi'''(d)y^2 + y^3 = 0$$

mit

$$\Phi'(b) = -(a-b)(c-b)(d-b) > 0$$
$$\Phi'(c) = -(a-c)(b-c)(d-c) < 0$$
$$\Phi'(d) = -(a-d)(b-d)(c-d) > 0.$$

Der Reihe nach ist $\Phi'(a)$, $\Phi'(b)$, $\Phi'(c)$, $\Phi'(d)$ negativ, positiv, negativ, positiv oder a und b, b und c, c und d sind die Grenzwerthe der drei reellen Wurzeln von $\Phi'(e) = 0$. Man kann daraus rückwärts schliessen, dass, wenn a', b', c' reelle Wurzeln von $\Phi'(e) = 0$ sind, ebenso reelle a, b, c, d vorhanden sein müssen, zwischen denen die a', b', c' liegen, und dass diese a, b, c, d reelle Wurzeln der um einen Grad höheren Gleichung $\Phi(x) = 0$ sind. Hat dagegen $\Phi'(e) = 0$ eine complexe Wurzel, so kann diese, wie oben gezeigt wurde, nicht zwischen zwei reellen Wurzelgrenzen liegen, d. h. auch $\Phi(x) = 0$ hat dann complexe Wurzeln. Man kann diese Schlüsse wiederholen und erhält das Ergebniss, dass wenn $\Phi^{(n-2)}(x) = 0$, welches eine quadratische leicht aufzulösende Gleichung ist, complexe Wurzeln besitzt, das Gleiche auch für $\Phi(x) = 0$ der Fall sein muss.

Fassen wir den Eindruck der beiden Abhandlungen Maclaurin's, der zwischen beide fallenden Abhandlung Campbell's, welche, wenn man auch an der Unabhängigkeit des Entstehens der Ergebnisse in Maclaurin's zweiter Veröffentlichung nicht den geringsten Zweifel hegen kann, sicherlich ihr rasches Erscheinen hervorrief (S. 548), so muss man sagen: diese Abhandlungen brachten Erläuterungen zu Newton's Regel für die Auffindung der Anzahl complexer Wurzeln einer gegebenen Gleichung, behaupteten auch seine Regel beweisen zu können, blieben aber thatsächlich den Beweis schuldig und berührten nicht einmal die Schwierigkeit der Ausnahmsfälle (S. 389). Ein grosser Fortschritt lag aber immerhin darin, dass ein Blick in die Entstehung der Newton'schen Regel eröffnet war.

Euler hat sich 1732 erstmalig mit algebraischen Fragen beschäftigt und die Abhandlung *De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio*[1]) dem Druck übergeben. Er zeigt darin, wie die allgemeine Gleichung 2ten, 3ten, 4ten Grades jeweil auf eine Gleichung 1ten, 2ten, 3ten Grades zurückgeführt werden kann, deren Wurzeln zur Bestimmung der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung Verwendung finden. Auflösende Gleichung, *aequatio resolvens*[2]), heisst bei Euler die Gleichung niedrigeren Grades, welche bei der Auflösung der Gleichung höheren Grades Unterstützung bringt, und der

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1732 *et* 1733. T. VI, 216—231. [2]) Ebenda pag. 220.

Name Resolvente ist allseitig angenommen worden. Für die Gleichungen 2ten, 3ten, 4ten Grades ist der Gedankengang folgender. Für $x^2 = a$ ist $z = a$ die Resolvente, und $x_1 = +\sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$ sind die Gleichungswurzeln. Ein Glied ersten Grades nach x kann als weggeschafft gedacht werden, da man jede Gleichung von ihrem zweithöchsten Gliede befreien kann.

Deshalb heisst auch die allgemeine kubische Gleichung $x^3 = ax + b$. Zum Zwecke ihrer Lösung nimmt Euler als Wurzel $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ an. Durch Erhebung auf die 3. Potenz entsteht $x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = 3\sqrt[3]{AB} \cdot x + (A + B)$. Uebereinstimmung mit $x^3 = ax + b$ findet statt, wenn $3\sqrt[3]{AB} = a$ und $A + B = b$, oder wenn A und B die beiden Wurzeln der quadratischen Resolvente $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$ sind. Euler giebt dann neben der Wurzel $x_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ die beiden anderen Wurzeln $x_2 = \mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}$ und $x_3 = \nu\sqrt[3]{A} + \mu\sqrt[3]{B}$ an, wo $\mu \cdot \nu = 1$ und μ, ν die von 1 verschiedenen dritten Einheits wurzeln sind.

Bei $x^4 = ax^2 + bx + c$ setzt Euler $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ mit der Annahme, A, B, C seien die Wurzeln der kubischen Resolvente $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$, wo also $\alpha = A + B + C$, $\beta = AB + AC + BC$, $\gamma = ABC$ sein muss. Quadrirung von $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ liefert $x^2 = A + B + C + 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC} = \alpha + 2(\sqrt{AB} + \sqrt{AC} + \sqrt{BC})$. Quadrirung von $x^2 - \alpha = 2(\sqrt{AB} + \sqrt{AC} + \sqrt{BC})$ liefert sodann $x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4(AB + AC + BC) + 8\sqrt{ABC}(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}) = 4\beta + 8x\sqrt{\gamma}$ oder $x^4 = 2\alpha \cdot x^2 + 8\sqrt{\gamma} \cdot x + (4\beta - \alpha^2)$. Das ist die vorgelegte Gleichung, wenn $2\alpha = a$, $8\sqrt{\gamma} = b$, $4\beta - \alpha^2 = c$ oder $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}$, $\gamma = \frac{b^2}{64}$ ist. Die Resolvente heisst also $z^3 = \frac{a}{2} z^2 - \frac{4c + a^2}{16} z + \frac{b^2}{64}$, und ihre drei Wurzeln A, B, C geben die vier Werthe: $x_1 = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$, $x_2 = \sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}$, $x_3 = -\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C}$, $x_4 = -\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C}$. Daneben zeigt Euler, dass man auch eine kubische Resolvente mit den Wurzeln E, F, G zu bilden im Stande sei, sodass $x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$ die vorgelegte Gleichung befriedige.

Das giebt ihm die Vermuthung, es müsse zu jeder vom zweithöchsten Gliede befreiten Gleichung $x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \cdots$ eine Resolvente $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4} - \cdots$ geben, zu welcher man mittels einer Substitution $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \cdots$ gelange, welche x als Summe von $n - 1$ Wurzelgrössen n^{ter} Ordnung

auffasst. Freilich sei die Schwierigkeit, die Resolvente wirklich zu ermitteln, schon bei $n = 5$ eine für ihn noch unüberwindliche, er glaube indessen die Aufgabe werde lösbar sein. Euler hat also hier nicht so richtig wie Leibniz (S. 112) in die Zukunft zu schauen gewusst, während sein Auflösungsversuch mit einem Tschirnhausschen Gedanken zusammentraf. Bei Versuchen solche Gleichungen aufzufinden, für welche es gelingt eine Resolvente niedrigeren Grades zu bilden, kommt Euler auf die reciproke Gleichung[1]) zu reden, d. h. auf eine solche, welche ihre Form nicht ändert, wenn ihre Unbekannte y mit $\frac{1}{y}$ vertauscht wird.

Die innerhalb jedes Kapitels im Allgemeinen von uns festgehaltene chronologische Anordnung nöthigt uns von Land zu Land hin und her und führt uns gegenwärtig nach Deutschland. Abraham Gotthelf Kästner[2]) (1719—1800) sollte nach dem Wunsche seines Vaters, der Professor der Jurisprudenz in Leipzig war, sich der gleichen Wissenschaft widmen, verliess sie aber, um sich der Mathematik zuzuwenden und wurde 1739 Privatdocent in Leipzig, wo er neben der Mathematik auch Logik und Naturrecht vortrug. Im Jahre 1753 folgte er einer Berufung nach Göttingen, wo er bis zu seinem Tode blieb. Kästner's grosse, nicht ganz unverdiente, aber doch im Verhältnisse zu seinen Entdeckungen in der Mathematik übertriebene Berühmtheit verdankt er wesentlich seinen Lehrerfolgen in Göttingen und denjenigen seiner Schriften, welche erst zu einer Zeit erschienen, die jenseits der Grenze unseres Bandes liegt. Seine vom 13. Mai 1739 datirte mathematische Dissertation, *Theoria radicum in aequationibus*, soll von Kästner's Lehrer Christian August Hausen[3]) (1693—1743) nicht sehr günstig beurtheilt worden sein, wohl aber sprach Euler, dem der junge Schriftsteller ein Exemplar zu übersenden wagte, seine Billigung der Arbeit aus. Wir möchten von der 31 Seiten starken Abhandlung nichts anderes sagen, als dass sie den Beweis liefert, dass Kästner die Engländer genau studirt hat, und dass er bestrebt war etwas einleuchtender darzustellen, was bei Maclaurin und Campbell über Grenzen der Gleichungswurzeln und über die Anzahl complexer Wurzeln ausgesprochen war. Auffallend erscheint gegenüber von Kästner's späterer peinlicher Gewissenhaftigkeit in der Angabe von Quellen, dass weder Maclaurin noch Campbell genannt ist.

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1732 *et* 1733. T. VI, 223. [2]) Allgemeine deutsche Biographie XV, 439—446. [3]) Poggendorff I, 1034.

In Frankreich gehörte Jean Paul de Gua de Malves[1] (etwa 1712—1785), den wir schon einigemal zu nennen hatten, einer alten, aber durch unglückliche Speculationen in der Zeit, während welcher der Finanzminister Law ganz Frankreich in eine Spielhölle verwandelt hatte, verarmten Adelsfamilie des Languedoc an. De Gua war Geistlicher dem Berufe nach und Mathematiker aus Neigung. Schon 1740 gab er ein Bändchen *Usages de l'Analyse de Descartes* heraus, über welches der Hauptsache nach im 114. Kapitel zu berichten sein wird. Auch für die Algebra ist etwas darin vorhanden, wovon wir im nächsten Kapitel bei Gelegenheit von Cramer's Arbeiten von 1750 reden wollen, die Ersetzung von Newton's Parallelogramm durch ein Dreieck, und ausserdem eine gleich hier zu erwähnende Eliminationsmethode. Sie gehört dem zweiten Abschnitte des kleinen Werkes an[2]. Man solle, schreibt er vor, um zwischen drei gegebenen Gleichungen eine Unbekannte fortzuschaffen, die beiden ersten Gleichungspolynome durch das dritte dividiren und sich die bei diesen Divisionen bleibenden Reste merken. Mit diesen Resten hat man wieder in das dritte Gleichungspolynom zu dividiren und die abermaligen Reste zu merken u. s. w., bis Gleichungen erscheinen, welche die wegzuschaffende Unbekannte nicht mehr enthalten. Dieses Verfahren, dem Aufsuchen des grössten Gemeintheilers zweier Zahlen nachgebildet, wendet De Gua gleich in der ersten Aufgabe seines dritten Abschnittes[3] an, um zu ermitteln, ob und unter welchen Bedingungen $x^2 - ax + b^2 = 0$ und $3x^2 - 2ax + b^2 = 0$ gemeinsame Wurzeln besitzen. Theilt man $3x^2 - 2ax + b^2$ durch $x^2 - ax + b^2$, so bleibt $ax - 2b^2$ als Rest. Theilt man dann $x^2 - ax + b^2$ durch $ax - 2b^2$, so bleibt $-b^2 + \frac{4b^4}{a^2}$, und dieser Rest $= 0$ gesetzt d. h. $b^2\left(\frac{2b}{a} + 1\right)\left(\frac{2b}{a} - 1\right) = 0$ ist die gesuchte Bedingung, welche mit $ax - 2b^2 = 0$ vereinigt die gestellte Frage beantwortet. Entweder ist $b = 0$ und $x = 0$, oder $b = \pm \frac{a}{2}$ und $x = \frac{a}{2}$.

Vermuthlich war es die Veröffentlichung des genannten in kleinstem Formate erschienenen, mehr inhaltsreichen als leicht oder angenehm lesbaren Buches, welches De Gua 1741 den Zutritt zur Pariser Akademie der Wissenschaften gewähren liess, und im gleichen Jahre 1741 legte er der Körperschaft, deren Mitglied er nunmehr war, zwei algebraische Abhandlungen vor. Sie bilden zugleich seine

---

[1] *Histoire de l'Académie des sciences de Paris pour* 1786 (*Histoire* pag. 63—76). [2]) De Gua, *Usage de l'Analyse de Descartes* pag. 60. [3]) Ebenda pag. 351—352.

letzte hervorragende mathematische Leistung. Was er in den 44 späteren Lebensjahren hervorbrachte, hat keinen Platz in der Geschichte der Wissenschaften gefunden.

Der erste Aufsatz von 1741 *Démonstration de la Règle de Descartes*[1]) stellt sich die Aufgabe, die von Descartes angegebene Beziehung zwischen Zeichenwechsel und Zeichenfolgen in einem Gleichungspolynome und der möglichen Zahl positiver und negativer Gleichungswurzeln zu beweisen. Descartes (Bd. II, S. 726) hatte sich damit begnügt den Satz auszusprechen. Wallis (S. 4), mit sich selbst in Widerspruch tretend, hatte den Satz an einer Stelle für Thomas Harriot in Anspruch genommen, hatte an einer anderen Stelle Descartes den nicht minder ungerechten Vorwurf gemacht, sein Satz sei falsch, weil er die complexen Wurzeln ausser Acht lasse. Aber ob der Satz in der Beschränkung, in welcher Descartes, in welcher später Newton (S. 387) ihn aussprach, wahr sei, darum hatte fast kein Mathematiker in der Oeffentlichkeit sich gekümmert. De Gua beginnt mit einer geschichtlichen Einleitung, in welcher er Descartes gegen Wallis, aber auch gegen Fermat, gegen Rolle, gegen Saunderson[2]) (1682—1739), den seit seinem ersten Lebensjahre blinden Professor der Mathematik in Cambridge, in Schutz nimmt, von denen die Einen die Unrichtigkeit des Satzes in dem angegebenen Sinne der Unvollständigkeit behauptet, die Anderen die Urheberschaft Harriot's, als von den Meisten anerkannt, vertreten hatten. Wir entnehmen De Gua[3]) auch, dass Prestet einen, wie er nachmals selbst zugestand, missglückten Versuch eines Inductionsbeweises des Descartesschen Satzes gemacht hatte. Einen Beweisversuch Segner's von 1725, dessen wir am Schlusse des nächsten Kapitels gedenken wollen, kannte De Gua offenbar nicht. Nach der Einleitung geht De Gua zum eigentlichen Gegenstande über. Sind, sagt er in einem vorausgeschickten Lemma, F, G, H die Coefficienten lückenlos aufeinanderfolgender Glieder eines Gleichungspolynoms, welches wir wieder durch $\Phi(x)$ bezeichnen wollen, so ist immer $G^2 > FH$. Einen ähnlichen Satz hätten Maclaurin und Campbell auch schon bewiesen, aber er benutze ihn anders und habe sich deshalb nicht damit begnügen wollen, sich auf jene beiden Schriftsteller zu berufen. Ein Zusatz lässt die Ungleichung mit irgend einer Zahl p vervielfachen, natürlich nur unter der Voraussetzung, dass stets die absoluten Werthe in Rechnung treten[4]). Man hat also $pG^2 > pFH$, $\frac{pG}{H} > \frac{pF}{G}$. Setzt

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1741. pag. 72—96. [2]) Poggendorff II, 754. [3]) *Histoire de l'Academie des sciences de Paris.* Année 1741. pag. 77. [4]) *n'ayant aucun égard aux signes + et —.*

man nun $pF > G$ voraus, so geht die letzte Ungleichung in $\frac{pG}{H} > 1$ oder $pG > H$ über. De Gua führt alsdann einige Kunstausdrücke ein. Zwei aufeinanderfolgende Zeichen, *Antécédant* und *Conséquent*, bilden eine Zeichencombination und zwar eine Permanenz oder eine Variation, d. h. eine Zeichenfolge oder einen Zeichenwechsel. Das Gleichungspolynom einer lauter reelle Wurzeln besitzenden Gleichung wird nun mit $x + p$ vervielfacht, wo $p > 0$. Das Product wird alsdann genau dieselbe Anzahl von Variationen besitzen wie $\Phi(x)$. Sei etwa in dem mit x^n links beginnenden $\Phi(x)$ beim Fortschreiten nach rechts $Fx^{n-m} - Gx^{n-m-1}$ die erste Variation, d. h. alle Glieder $x^n + \cdots + Fx^{n-m}$ sollen positiv sein. Nach Multiplication mit $x + p$ ist das x^{n-m+1} enthaltende Glied unbedingt positiv. Dann kommt $(pF - G)x^{n-m}$, auf welches $(-pG \pm H)x^{n-m-1}$ folgt, wenn in $\Phi(x)$ hinter $-Gx^{n-m-1}$ das Glied $\pm Hx^{n-m-2}$ stand. Erstens sei $pF - G < 0$, so findet gegen das Glied mit x^{n-m+1} eine Variation statt, der Zustand des ursprünglichen Gleichungspolynoms ist also hier unverändert. Zweitens sei $pF - G > 0$ und rufe eine vorher nicht vorhandene Permanenz hervor. War H in $\Phi(x)$ mit dem $-$Zeichen behaftet als $-Hx^{n-m-2}$, und war demnach zwischen $-Gx^{n-m-1}$ und $-Hx^{n-m-2}$ eine Permanenz, so ist $-pG - H < 0$, also zwischen $pF - G$ und $-pG - H$ eine Variation entstanden, welche die vorher verloren gegangene ersetzt. War aber H mit dem in $\Phi(x)$ eine zweite Variation hervorrufenden $+$Zeichen verbunden, so muss zwischen $pF - G$ und $-pG + H$ eine Variation stattfinden, weil nach dem oben erörterten Zusatze $pF > G$ nothwendig $pG > H$ zur Folge hat. Zwischen Gliedern in $\Phi(x)$ mit F, G, H als Coefficienten kann also höchstens eine Variation verloren gehen, nämlich die erste. Schreibt man $\Phi(x)$ und $(x + p)\Phi(x)$ in zwei Zeilen unter einander, so dass die höchsten Glieder x^n und x^{n+1} einander in ihrer Stellung entsprechen, so hat man:

$$\Phi(x) = x^n + \cdots + Fx^{n-m} - Gx^{n-m-1} + Hx^{n-m-2} \ldots,$$
$$(x + p)\Phi(x) = x^{n+1} + \cdots + F_1x^{n-m+1} + G_1x^{n-m} - H_1x^{n-m-1} \ldots,$$

als die Anfänge der beiden Zeilen. In der unteren Zeile steht hinter F_1 das entgegengesetzte Zeichen als in der oberen Zeile hinter F. So weit man die Glieder von $\Phi(x)$ verfolgt, werden, wenn fortlaufend Variationen vorhanden sind, ebensolche in $(x + p)\Phi(x)$ auftreten, bis einmal in $\Phi(x)$ eine Permanenz kommt. Diese verwandelt sich nach dem Bewiesenen in eine Variation, und die Gleichheit der Anzahl der Variationen in $\Phi(x)$ und $(x + p)\Phi(x)$ ist hergestellt. Hinter der Permanenz wird alsdann irgend eine neue Variation in $\Phi(x)$

gestatten, die gleichen Schlüsse neuerdings zu ziehen. Folgt überhaupt keine Permanenz mehr in $\Phi(x)$, wechseln die Glieder hinter Hx^{n-m-2} fortwährend mit dem Zeichen, so sieht der Schluss der beiden Zeilen so aus:

$$\Phi(x) = \cdots - Ix^{n-m-3} + Kx^{n-m-4} \cdots \pm Z,$$
$$(x+p)\Phi(x) = \cdots + I_1 x^{n-m-2} - K_1 x^{n-m-3} \cdots \mp Z_1 x \pm pZ,$$

d. h. am Ende der unteren Zeile tritt eine neue Variation ein, und die Gleichheit der Anzahlen von Variationen ist abermals hergestellt. Wird dagegen $\Phi(x)$ bei $p > 0$ mit $x - p$ vervielfacht, so bleibt die Anzahl der Permanenzen unverändert. Der Beweis wird mittelbar geführt. Aus $\Phi(x) = 0$ entsteht $\Phi(-y) = 0$ mit Wurzeln, welche den entgegengesetzten Werth wie die von $\Phi(x) = 0$ haben, indem x durch y ersetzt und jedem Gliede von ungrader Potenz das entgegengesetzte Vorzeichen beigelegt wird. Jede Permanenz wird dadurch in eine Variation, jede Variation in eine Permanenz übergeführt, und die neuen Variationen verändern ihre Anzahl nicht, wenn $\Phi(-y)$ mit $y + p$ vervielfacht wird. Rückeinsetzung von $y = -x$ verwandelt abermals jede Variation in eine Permanenz und umgekehrt, und somit besitzen $\Phi(x)$ und $(x-p)\Phi(x)$ gleichviele Permanenzen. Aus den beiden Sätzen folgt aber von selbst die Descartes'sche Zeichenregel mit ausschliesslich reellen Wurzeln.

Eine Lücke hat De Gua's Beweis, wie wir ihn wiedergaben, allerdings. Wir haben nur $pF \gtrless G$ und nicht $pF = G$ berücksichtigt. De Gua hat diese Möglichkeit keineswegs übersehen. Er sagt $pF = G$ lasse in $(x+p)\Phi(x)$ ein Glied zum Wegfall kommen, dessen Coefficient verschwinde. Ist nun die Anzahl der Variationen in $(x+p)\Phi(x)$ dieselbe wie in $\Phi(x)$, so lange der verschwundene Coefficient wegen $pF \gtrless G$ vorhanden war, beliebig wie klein positiv oder negativ er sein mochte, so kann kein Unterschied entstehen, mag das Verschwinden als $+0$ oder als -0 aufgefasst werden.

De Gua lässt dann seiner ersten Entwicklung sofort eine zweite folgen, welche einen geometrischen Gedankengang einschlägt, doch sind auch rein algebraische Sätze in diesem Anhange vorhanden wie der, dass eine Gleichung, deren Glieder sämmtlich gleiche Vorzeichen haben, unmöglich positive Wurzeln besitzen kann, dass das Fehlen von mehreren Gliedern nach einander das Vorhandensein complexer Wurzeln in sich schliesst u. s. w.

De Gua hat, wie wir (S. 557) sagten, 1741 noch einen zweiten Aufsatz in den Veröffentlichungen der Pariser Akademie zum Druck gegeben: *Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires*[1]).

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1741. pag. 435—494.

Auch in ihm steht ein umfangreicher geschichtlicher Ueberblick an der Spitze[1] und rechtfertigt in noch höherem Grade als die Einleitung zum ersten Aufsatze unsere Erwähnung De Gua's (S. 485) unter den Schriftstellern über Geschichte der Mathematik. Man darf getrost sagen, dass De Gua die meisten damals im Drucke vorhandenen Schriften über Algebra kannte, und dass er ungleich Wallis, gegen welchen er ziemlich scharf vorgeht, bemüht war, jedem Verfasser seinen ihm gebührenden Antheil an den Fortschritten der Algebra zuzuschreiben, ohne sich durch nationale Zuneigung oder Abneigung blenden zu lassen. Das Dogmatische des Aufsatzes[2] ist ähnlich wie der Anhang des ersten Aufsatzes von 1741, nämlich geometrisch behandelt. Ist die Gleichung $\Phi(x) = 0$ zu untersuchen, so betrachtet De Gua die parabolische Curve $y = \Phi(x)$, deren Durchschnitte mit der Abscissenaxe in allen den Punkten stattfinden, deren Entfernungen von dem Coordinatenanfangspunkte reelle positive oder negative Wurzeln von $\Phi(x) = 0$ sind. Zwischen je zwei Durchschnittspunkten giebt es mindestens ein reelles Maximum[3]), und De Gua versteht darunter offenbar einen Curvenpunkt, dessen Ordinate ihrer absoluten Länge nach grösser ist als die gleichfalls absoluten Längen der Ordinaten der Nachbarpunkte. De Gua sagt dieses zwar nicht ausdrücklich, aber dass er (Fig. 96) alle Punkte P als reelle

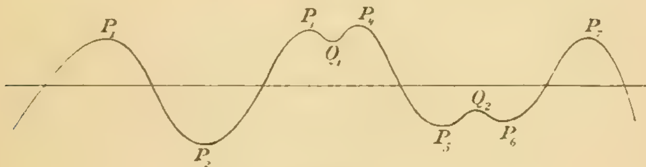


Fig. 96.

Maxima betrachtet, geht daraus hervor, dass er bemerkt, im Maximum wie im Minimum sei $dy = 0$, aber im Maximum sei y mit ddy von entgegengesetztem Zeichen, beziehungsweise sei das Product $y \cdot ddy$ negativ[4]). Im Minimum findet sich dann $y \cdot ddy$ positiv, und das ist in den Punkten Q der Fall. Unter allen Umständen giebt es mindestens ein Maximum zwischen je zwei Durchschnitten der Curve mit der Abscissenaxe, und die Anzahl der reellen Wurzeln, d. h. der

---

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1741. pag. 435—458. [2]) Ebenda pag. 458—494. [3]) *il est impossible qu'entre deux intersections il n'y ait au moins un maximum réel.* [4]) *dans le maximum y et ddy doivent être de signe différent, ou, ce qui est la même chose, le produit yddy doit y être negatif.*

Durchschnitte, ist höchstens um die Einheit grösser, als die der reellen Maxima, welche man folglich zu ermitteln hat. Man hat zu diesem Zwecke $y' = \Phi'(x)$ zu bilden und die Wurzeln von $\Phi'(x) = 0$ zu suchen, d. h. von einer Gleichung, deren Grad um die Einheit niedriger ist, als der von $\Phi(x) = 0$. Complexe Wurzeln von $\Phi'(x) = 0$ fallen weg; ebenso fallen diejenigen reellen Wurzeln weg, welche $\Phi(x) \cdot \Phi''(x)$ positiv werden lassen, und kommt dann eine Zahl von weniger als $n - 1$ Maximalstellen heraus, so hat $\Phi(x) = 0$ sicherlich complexe Wurzeln. Das ist der Grundgedanke von De Gua's weiteren Untersuchungen, welche dem entsprechend nicht zu algebraischen Entscheidungsgründen nach Art der Descartes'schen Regel führen, wie Newton, wie Maclaurin, wie Campbell sie aufzustellen bestrebt waren, sondern zu geometrischen.

Wir haben (S. 556) von einer ersten algebraischen Veröffentlichung Kästner's gesprochen. Eine zweite: *Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per series* folgte ihr 1743. Sie beschäftigte sich mit dem Newton'schen Parallelogramme. Kästner hat sie später in seine Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, deren erste Ausgabe 1759 erschien, aufgenommen, und wer besondere Neigung dazu fühlt, mag Kästner's fast unerträglich breite Darstellung in jenem Werke nachlesen[1], welches ungleich verbreiteter als der Urtext der Abhandlung ist. Wir ziehen vor, im nächsten Kapitel über einen 1748 in England durch Maclaurin in seiner Algebra gegebenen Beweis für das Newton'sche Parallelogramm zu berichten, welcher bei grösster Uebersichtlichkeit in seinem Grundgedanken mit dem Kästner's sehr nahe übereinstimmt. Dass daraus aber geschlossen werden wollte, Maclaurin habe vorher die Kästner'sche Abhandlung kennen gelernt, dagegen verwahren wir uns aufs Höchste. Wir sind im Gegentheil von Maclaurin's Unabhängigkeit durchaus überzeugt.

Eine dritte algebraische Abhandlung Kästner's von 1745, gleich den vorerwähnten als besondere Druckschrift erschienen, führt den Titel: *Demonstratio theorematis Harrioti.* Im Eingang bemerkt Kästner, es gebe schon zwei Beweise in Deutschland für den Satz von der möglichen Anzahl positiver und negativer Wurzeln einer Gleichung, sie rührten von Segner und Stübner her. Für Segner und seine Abhandlung von 1725 haben wir schon (S. 558) auf den Schluss des nächsten Kapitels verwiesen. Wir wiederholen diese Verweisung. Friedrich Wilhelm Stübner[2]) (1710—1736) aus Bayreuth wurde

---

[1]) Kästner, Analysis endlicher Grössen. 3. Ausgabe. 1794. S. 419—476.
[2]) Allgemeine deutsche Biographie XXXVI, 712—713. Artikel von S. Günther.

mit 20 Jahren auf Grund der von Kästner genannten Arbeit Privatdocent in Leipzig. Seine Thätigkeit war eine ungemein grosse trotz Kränklichkeit aller Art. Er betheiligte sich insbesondere lebhaft an dem Streite über die Schätzung des Kraftmaasses. Die Abhandlung von 1730 kennen wir nur dem Namen nach. Dieser aber zeigt, wie Segner's Schrift von 1725, wie die Kästner's von 1745, dass die deutschen Gelehrten damals unter dem Banne des durch Wallis verbreiteten Irrthums standen und Harriot ein Verdienst beimassen, welches er nie besessen hat. Kästner betrachtet neben der Curve $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \cdots + tx + u = y$ auch deren Differentialcurve, *curva differentialis*, $nx^{n-1} + (n-1)px^{n-2} + (n-2)qx^{n-3} + \cdots + t = z$ und bemerkt $z = 0$ finde statt, wenn y einen Grenzwerth, *limes*, erhalte, d. h. Maximum oder Minimum sei. Es könne y bei n reellen Werthen von x zu Null werden, z bei $n-1$ reellen Werthen von x, und seien $y = 0$ und $z = 0$ Gleichungen in x mit lauter reellen Wurzeln, so müssen die Werthe von x, welche $z = 0$ machen, einen abwechselnd positiven und negativen Werth von y hervorbringen. Man sieht, dass Kästner sich ganz ähnlicher Betrachtungen bedient, wie De Gua sie anstellte, als er die Anzahl reeller Gleichungswurzeln untersuchte. Kästner geht nun weiter, indem er annimmt, in $z = 0$ seien m Zeichenwechsel, *permutationes*, vorhanden und genau ebensoviele positive Wurzeln. Er behauptet, auch y müsse alsdann genau ebensoviele positive Wurzeln als Zeichenwechsel besitzen. Der Beweis beruht auf zwei Voraussetzungen. Erstens ist in jeder vollständigen Gleichung, deren höchstes Glied immer als positiv angenommen wird, die Zahl der Zeichenwechsel grad, wenn die Schlussconstante positiv, ungrad, wenn letztere negativ ist. Zweitens bedingt die positive, beziehungsweise negative Schlussconstante, dass die Curve bei $x = 0$ über, beziehungsweise unter der Abscissenaxe liegen muss. Hat nun $z = 0$, wie angenommen, m positive Wurzeln, so besitzt die Curve $y = x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \cdots$ auf der positiven Abscissenseite m Limesstellen, um mit Kästner zu reden, durch welche die Anzahl der Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe bestimmt wird. Bei $\begin{matrix}\text{gradem}\\ \text{ungradem}\end{matrix}$ m und positiver Constante hat $y = 0$ genau $\begin{matrix}m\\ m+1\end{matrix}$ positive Wurzeln, bei $\begin{matrix}\text{gradem}\\ \text{ungradem}\end{matrix}$ m und negativer Constante ist die Zahl der positiven Wurzeln $\begin{matrix}m+1\\ m\end{matrix}$. Nun schliesst das Gleichungspolynom z mit $\pm t$. Ist $+t$ vorhanden, so muss m grad, bei $-t$ dagegen m ungrad sein. Das Gleichungspolynom y schliesst mit $\pm tx \pm u$, so dass vier Fälle zu unterscheiden sind. Sie liefern Folgendes:

Bei $\begin{array}{l} +tx+u \\ +tx-u \\ -tx+u \\ -tx-u \end{array}$ ist m $\begin{array}{l} \text{grad} \\ \text{grad} \\ \text{ungrad} \\ \text{ungrad} \end{array}$ und die Anzahl der positiven Wurzeln von $y=0$ ist $\begin{array}{l} m \\ m+1 \\ m+1 \\ m \end{array}$, während die Anzahl der Zeichenwechsel $\begin{array}{l} m \\ m+1 \\ m+1 \\ m \end{array}$ ist. Die Gleichung ersten Grades $x-a=0$ hat aber einen Zeichenwechsel und eine positive Wurzel, und nun schliesst Kästner auf die Wahrheit des Satzes bei immer höherem Gleichungsgrade.

106. Kapitel.

Algebra seit 1746.

War nunmehr seit 1741 der Beweis der Descartes'schen Zeichenregel gegeben und damit die theoretische Algebra wesentlich gefördert, so war doch die eigentliche Grundlage der Lehre von den Gleichungen noch nicht gesichert. Albert Girard hatte zwar 1629 ausgesprochen, dass jede Gleichung so viele Wurzeln besitze als ihr Grad anzeige (Bd. II, S. 718). Descartes hatte 1737 den Satz einschränkend gesagt, jede Gleichung könne so viele unterschiedene Wurzeln oder Werthe besitzen, als ihr Grad zu erkennen gebe (Bd. II, S. 724). Newton hatte nicht minder vorsichtig in seiner *Arithmetica universalis* behauptet, eine Gleichung könne so viele Wurzeln haben, als der Exponent ihres Grades besage, jedenfalls nicht mehr (S. 387). Bewiesen hatte Niemand, wie es sich mit der Anzahl der Gleichungswurzeln verhalte, wenn man alle Wurzeln, positive, negative und complexe, als gleichberechtigt ansehe, und in welcher Beziehung jedes Gleichungspolynom zu einfacheren Factoren stehe.

Euler dürfte der Erste sein, von dem wir bestätigen können, dass er der Frage näher trat. Im December 1742 schrieb er[1]) von Berlin aus an den in Petersburg befindlichen Goldbach, er sei mit Niclaus I Bernoulli in einem Briefwechsel über die Integration von Ausdrücken von der Gestalt $\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots}\,dx$ begriffen. Es komme auf die Zerlegung des Ausdruckes in Partialbrüche an, und zu diesem Zwecke auf die Zerlegung des Nenners in Factoren. Er fährt dann fort: Weil aber öfters einige von diesen factoribus

¹) *Correspondance mathématique* (Fuss) I, 170—171.

imaginarii werden, so hatte ich angemerkt, dass, da alle factores imaginarii immer numero pares sein müssen, dieselben auch so beschaffen sind, dass je zween mit einander multiplicirt ein productum reale geben. An diesem Satze zweifelte nun letztens der H. Bernoulli und glaubte, dass es solche formulas gebe, deren factores imaginarii nicht diese Eigenschaft hätten. Euler verweilt dann noch bei einem einzelnen Beispiele und fasst dann seine Meinung in den Lehrsatz zusammen:

Omnem expressionem algebraicam $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \cdots$ *in factores reales simplices* $p + qx$, *vel saltem in factores reales quadratos* $p + qx + rx^2$ *resolvi posse.*

Er könne, meint er, ihn ungefähr beweisen, aber nicht mit aller Strenge. Ein Brief von Niclaus I Bernoulli an Euler[1]) vom Ende November 1743 geht etwas auf die betreffende Zerlegung ein. Im gleichen Jahre 1743 erschien Euler's Abhandlung *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum*[2]), in welcher wiederholt von den binomen Factoren ersten Grades und von den trinomen Factoren zweiten Grades eines Gleichungspolynoms mit reellen Coefficienten, während auch in den Factoren nur reelle Coefficienten vorkommen, die Rede ist. D'Alembert fasste das so auf, als kündige Euler damit an, seine Bemühungen die Zerlegbarkeit zu beweisen seien mit Erfolg gekrönt, und er wandte sich nun selbst dem zu, was man sich in späterer Zeit gewöhnt hat, das Fundamentaltheorem der Algebra zu nennen. Die Frucht davon war ein Abschnitt einer 1746 in den Berliner Veröffentlichungen gedruckten Abhandlung über die Integration rationaler Brüche[3]). Auch für D'Alembert war, wie für Euler, die Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche die wichtigere Aufgabe, um derenwillen der Nenner in einfachste reelle Factoren zerlegt werden sollte.

D'Alembert, ein Mathematiker, der an Tiefe des Geistes keinem der Zeitgenossen nachsteht, dessen Darstellungsgabe dagegen, insbesondere wenn man in der Lage ist, inhaltlich verwandte Arbeiten von D'Alembert und Euler zu vergleichen, das Lob grosser Klarheit und Verständlichkeit kaum erwerben dürfte, hat den Anfang seiner Untersuchung in ein geometrisches Gewand gekleidet und spricht infolge dessen von imaginären Ordinaten und imaginären Curvenpunkten mit einer Unbefangenheit, welche beim Erscheinen der Abhandlung und noch mehr als ein halbes Jahrhundert später Anstoss erregen musste, so dass beispielsweise Gauss in seiner berühmten

[1]) *Correspondance mathématique* (Fuss) II, 711–713. [2]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 193–242. [3]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746. pag. 182–191.

Doctordissertation von 1799, welche gleichfalls dem Beweise des erwähnten Fundamentaltheorems der Algebra gewidmet war und als Einleitung alle entsprechenden Versuche früherer Schriftsteller einer strengen Prüfung unterzog, D'Alembert's geometrische Sprache, wenn man so sagen darf, ins Analytische zu übersetzen für nothwendig hielt. D'Alembert nimmt ein rechtwinkliges Coordinatensystem der z und y an, welches in T seinen Anfangspunkt besitzt, und auf welches er eine Curve bezieht, welche durch T hindurchgeht, d. h. also, deren Gleichung durch $y = 0$, $z = 0$ erfüllt wird. D'Alembert erwähnt zwar[1]) auch die Möglichkeit eines Zusammentreffens von $z = 0$ mit $y = \infty$, welches TZ als Asymptote der Curve erkennen lasse, kommt aber im Verlaufe der Abhandlung nicht mehr darauf zurück. In jener Voraussetzung, dass die Curve durch T gehe, müsse es thunlich sein eine, so lange z sehr klein ist, sehr convergente Reihenentwicklung $y = az^{\frac{m}{n}} + bz^{\frac{r}{s}} + cz^{\frac{t}{u}} + \cdots$ anzusetzen, in welcher die Exponenten wachsen, $\frac{m}{n} < \frac{r}{s} < \frac{t}{u} < \cdots$ ist. Die andere nur einmal angedeutete Möglichkeit von $y = \infty$ bei $z = 0$ würde bedungen haben, dass m und vielleicht auch noch Zähler anderer Exponenten negativ gewählt worden wären. Mittels jener Reihe macht jedes z, wenn es nur positiv ist, y zu einer reellen Grösse. Ein negatives z entspricht entweder auch einem reellen y, wenn alle Nenner $n, s, u \cdots$ der gebrochenen Exponenten ungrad sind, oder einem imaginären y, wenn mindestens einer der Nenner $n, s, u \cdots$ grad und der zugehörige Zähler $m, r, t \cdots$ ungrad ist. Neben der reellen Curve in der positiven Ausdehnung der z-Axe giebt es also einen reellen oder imaginären Curvenarm bei negativer z-Axe. Da, wie schon bemerkt, die Reihe für y bei sehr kleinem z sehr rasch convergirt, so genügt es, statt der unendlichen Reihe nur ein Glied oder wenige Glieder derselben zu berücksichtigen. Bei negativem z wird dann $y = p + q\sqrt{-1}$, und zwar verändert sich y nur unendlich wenig, wenn das Gleiche für z statt hat. Unendlich geringe Veränderung von $p + q\sqrt{-1}$ heisst aber unendlich geringe Veränderung von p und von q. Bezüglich der für y angesetzten Form $p + q\sqrt{-1}$ erörtert D'Alembert in einem anderen Abschnitte der Abhandlung von 1746 den Satz, dass jede Function von beliebig vielen imaginären Grössen immer als $p + q\sqrt{-1}$ mit reellem p und q gedacht werden kann[2]). Nach Erledigung der vorher angegebenen Vorbemerkungen nimmt D'Alembert ein Polynomium

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746. pag. 183. [2]) Ebenda pag. 195.

$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + fx + g$ als gegeben an. Giebt es kein reelles x, welches $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + fx = -g$ also das Polynomium zu 0 macht, so wird doch die reelle Substitution $x = h$ den Werth $h^m + ah^{m-1} + bh^{m-2} + \cdots + fh = A$ hervorbringen und $h^m + ah^{m-1} + bh^{m-2} + \cdots + fh - A = 0$ erscheinen lassen. Ein imaginärer Werth für x eingesetzt wird $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + fx$ mit einem bald reellen, bald complexen, jedenfalls von A verschiedenen Werthe hervortreten lassen, und dieser muss bei allmählicher Aenderung irgend einmal $-g$ heissen. Dann wird aber bei Einsetzung dieses $p + q\sqrt{-1}$ statt x der Ausdruck $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + fx + g = 0$. Ist $p + q\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung, so muss auch $x = p - q\sqrt{-1}$ eine solche sein, d. h. das Gleichungspolynom muss sich sowohl durch $x - p - q\sqrt{-1}$ als durch $x - p + q\sqrt{-1}$ theilen lassen[1]).

Gauss hat dazu bemerkt, dass, wenn alle anderen Schlüsse D'Alembert's zugegeben werden könnten, was unter gewissen Voraussetzungen der Fall sei, die Behauptung doch nicht gerechtfertigt sei, dass wenn eine Function $\Phi(x)$ einen Werth S erhalte, einen Werth U nicht erhalte, es einen Werth T zwischen S und U geben müsse, den $\Phi(x)$ erreiche, aber nicht übersteige. Es sei vielmehr möglich, dass $\Phi(x)$ dem T zustrebe, ohne es zu erreichen.

Ein anderer französischer Mathematiker war Alexis Fontaine[2]) (gegen 1705—1771). Zu Clavaison in dem Dauphiné geboren und in der Provinz erzogen, kam Fontaine gegen 1729 nach Paris, wo erstmalig eine Geometrie in seine Hände fiel, die er unter nur geringer Beihilfe des Jesuitenpaters Louis Bertrand Castel[3]) (1688—1757) durchstudirte. So war Fontaine in der Hauptsache sein eigener Lehrer und ohne genauere Kenntnisse dessen, was die Wissenschaft schon geleistet hatte. Er ward verschiedentlich Nacherfinder, ohne es zu wissen, nannte etwaige Vorgänger nur ausnahmsweise und war in Streitigkeiten von rücksichtsloser Derbheit. Im Jahre 1765 verkaufte er seine Bibliothek, welche er vermöge seines geschilderten Bildungsganges und seiner Natur nur selten benutzte, und zog sich im gleichen Jahre nach Cuiseaux in Burgund zurück, nachdem 1764 seine wichtigsten, theilweise bis 1739 zurückgehenden Arbeiten über Differentialgleichungen u. s. w. in einem Sammelbande gedruckt worden waren. Er veröffentlichte 1747 eine Abhandlung über die Auflösung von Gleichungen[4]). Zuerst ist der ihren Zweck verfehlenden Regeln zur

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746. pag. 190. [2]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1771 (*Histoire* pag. 105—116 und pag. 125—129) [3]) Poggendorff I, 393—394. [4]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1747. pag. 665—677.

Auffindung der Anzahl reeller und complexer Gleichungswurzeln gedacht, welche Newton, Maclaurin, Campbell, De Gua aufgestellt hätten. Allen diesen Schriftstellern sei es misslungen den richtigen Weg einzuschlagen, der einzig in der Anfertigung einer Tabelle bestehe. Seien $m, n, p, q, r \cdots$ reelle positive Grössen und $a > b > c \cdots$ ebensolche. Jede quadratische Gleichung mit positivem, den Coefficienten 1 besitzenden quadratischen Gliede muss in einer der sechs Formen enthalten sein: $x^2 + mx + n = 0$, $x^2 + mx - n = 0$, $x^2 - mx + n = 0$, $x^2 - mx - n = 0$, $x^2 + n = 0$, $x^2 - n = 0$. Sie kann auf neun Arten aus Factoren ersten Grades entstanden sein: $(x + a)(x + b) = 0$, $(x + a)(x - b) = 0$, $(x - a)(x + b) = 0$, $(x - a)(x - b) = 0$, $(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1}) = 0$, $(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1}) = 0$, $(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1}) = 0$, $(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1}) = 0$, $(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1}) = 0$. Alle diese Multiplicationen werden ausgeführt, und das Product wird auf das Vorzeichen sowie auf die vergleichsweise Grösse der Coefficienten der Glieder ersten und nullten Grades geprüft. Dadurch ergeben sich Bedingungen für $\pm m$ und $\pm n$, aus deren Erfüllung die Form der Wurzeln jeder vorgelegten quadratischen Gleichung hervorgeht. Bei der cubischen Gleichung zählt Fontaine 36 mögliche Fälle von Factorenvereinigungen auf. Wie viele solcher Fälle es bei Gleichungen 4ten, 5ten u. s. w. Grades gebe, führt er nicht mehr aus. Nun sind aber auch die aufgezählten Fälle nicht erschöpfend, da sie von der Voraussetzung $a > b > c > \cdots$ ausgehen, während $a \geq b \geq c > \cdots$ erwogen werden müsste. Fontaine's Vorschlag setzt unter allen Umständen eine Summe von Vorarbeiten, welche erledigt sein müssen, bevor eine Gleichung n^{ten} Grades, bei $n > 3$, auf die Form ihrer Wurzeln geprüft werden kann, voraus, die so ungeheuerlich anwächst, dass man sich einen praktischen Vortheil kaum versprechen darf.

Maclaurin sprach 1729 von seiner Absicht eine Algebra herauszugeben (S. 548). Er starb 1746 ohne seine Absicht ausgeführt zu haben. Sein Nachlass wurde von einer durch ihn selbst eingesetzten Commission, in welcher auch Martin Folkes sich befand, gesichtet und daraus 1748 die Algebra[1]) zum Drucke befördert. Sie füllt 366 Seiten in 8^0, und ein mit neuer Seitenbezeichnung versehener

---

[1]) *A treatise of algebra in three parts containing I. the fundamental rules and operations, II. the composition and resolution of equations of all degrees and the different affections of their roots, III. the application of algebra and geometry to each other. To which is added an appendix concerning the general properties of geometrical lines.*

Anhang von 65 Seiten über algebraische Curven schliesst sich ihr an. Von diesem Anhange reden wir im 115. Kapitel. Die eigentliche Algebra wollte Maclaurin, wie die Herausgeber erklären, als einen Commentar zu Newton's Arithmetica universalis betrachtet wissen, und somit dürfte unseren Lesern empfohlen werden, unseren hier folgenden Bericht mit dem über das Newton'sche Werk (S. 378 bis 392) zu vergleichen.

Eine negative Grösse, sagt Maclaurin, wird kleiner als Nichts genannt (S. 379), weil sie der positiven Grösse entgegengesetzt ist und dieselbe bei der Vereinigung beider vermindert, während die Addition von 0 keinerlei Wirkung ausübt, aber ein Negatives ist deshalb nicht weniger eine wirkliche Grösse als ein Positives[1]).

Maclaurin beweist die Zeichenregel bei der Multiplication und die Multiplications- und Divisionsregeln bei Brüchen. In ersterer Beziehung[2]) geht er aus von $a - a = 0$. Weil $n \cdot 0 = 0 = na - na$ ist, muss auch $n(a - a) = na + n(-a) = 0$ sein, d. h. $n(-a) = -na$. Ebenso ist jedenfalls $(-n)a = -na$. Ferner muss $n(a - a) = -n \cdot 0 = 0 = -na + na$ sein, neben $-n(a - a) = -na + (-n)(-a)$, d. h. $(-n)(-a) = na$. Der Beweis für die Bruchrechnungsregeln ist folgender[3]): Sei $\frac{a}{b} = m$ (folglich $bm = a$) und $\frac{c}{d} = n$ (folglich $dn = c$). Multiplication der beiden gefolgerten Gleichungen giebt $ac = bm \cdot dn = bd \cdot mn$ und $\frac{ac}{bd} = mn = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$. Ferner $mbd = ad$, $nbd = bc$, $\frac{ad}{bc} = \frac{mbd}{nbd} = \frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Potenziren mit ganzzahlig positivem Exponenten heisst *Involution*[4]). Sie wird nach dem binomischen Lehrsatze gelehrt[5]). Wurzelausziehung heisst *Evolution*[6]), und über den Nachweis der Berechtigung, auch hier den binomischen Lehrsatz anzuwenden, setzt sich Maclaurin mit den kurzen Worten hinweg, der vorher für die Involution angegebene allgemeine Lehrsatz diene auch für die Evolution[7]).

Für die Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten werden Regeln und Beispiele gegeben. Die *Extermination* von Unbekannten vollzieht sich nach der Combinationsmethode (S. 383), neben welcher auch andere Kunstgriffe, z. B. Addition von Gleichungen in Anwendung treten. Maclaurin sieht sich aber auch in einem besonderen Kapitel[8]) die Form der

[1]) Maclaurin, Algebra pag. 7: *But a Negative is to be considered no less as a Real Quantity than the Positive.* [2]) Ebenda pag. 13. [3]) Ebenda pag. 29. [4]) Ebenda pag. 34. [5]) Ebenda pag. 38–41. [6]) Ebenda pag. 42. [7]) Ebenda pag. 51. [8]) Ebenda pag. 81–85.

Werthe solcher Unbekannten an, welche aus zwei, aus drei und aus vier Gleichungen ersten Grades ermittelt wurden, und erkennt, dass sie alle in Gestalt von Brüchen erscheinen, deren Nenner identisch sind[1]). Er ist sogar dem Bildungsgesetze der Zähler mit Einschluss des Vorzeichens der einzelnen Glieder in Zähler und Nenner fast mehr als nur auf der Spur, und wäre er nicht einer zweckmässigen Bezeichnung, wie Leibniz sie in einem Briefe an De L'Hospital (S. 106) einzuführen wusste, wie er sie aber auch im Jahre 1700 in einem grade in England unzweifelhaft bekannt gewordenen Aufsatze dringend empfahl (S. 321), man möchte fast sagen geflissentlich auf dem Wege gegangen, so hätte er die Erfindung der Determinantenlösung von Gleichungen zu seinen übrigen zahlreichen Verdiensten hinzufügen können.

Maclaurin geht zu den Wurzelgrössen über, bespricht die Eigenschaften, welche aus der Gemeinschaft oder Nichtgemeinschaft von Theilern für zwei Zahlen hervorgehen, und beweist den Satz[2]), dass die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl wieder eine ganze Zahl oder irrational sein muss. Dann kommt er zur Wurzelausziehung aus selbst mit Irrationalitäten behafteten Binomien[3]) (S. 383). Sei $A > B$ und die c^{te} Wurzel aus $A \pm B$ zu ziehen, welche in der Form $x \pm y$ angenommen wird. Dann ist $(x \pm y)^c = x^c \pm cx^{c-1}y + dx^{c-2}y^2 \pm ex^{c-3}y^3 + \cdots$. Eine zweite Annahme setzt $x^c + dx^{c-2}y^2 + \cdots = A$, $cx^{c-1}y + ex^{c-3}y^3 + \cdots = B$, wodurch in der That $(x+y)^c = A + B$, $(x-y)^c = A - B$ wird. Vervielfachung der beiden Gleichungen mit einander liefert $(x^2-y^2)^c = A^2 - B^2$, $x^2 - y^2 = \sqrt[c]{A^2 - B^2} = n$. Ein angenäherter Werth von $\sqrt[c]{A+B}$ (oder von $x+y$) sei r, so wird $\frac{n}{r} = \frac{x^2-y^2}{x+y} = x - y = 2x - (x+y) = 2x - r$ und $2x = r + \frac{n}{r}$, ein Werth den man zu berechnen im Stande ist und der $2t$ genannt wird, so dass $x = t = \frac{r+\frac{n}{r}}{2}$. Man entnimmt daraus $x^2 = t^2 = \left(\frac{r+\frac{n}{r}}{2}\right)^2$, $y^2 = x^2 - (x^2-y^2) = t^2 - n$, $y = \sqrt{t^2 - n}$, $x \pm y = \sqrt[c]{A \pm B} = t \pm \sqrt{t^2 - n}$. Voraussetzung dieser Entwicklung war freilich, dass sich $A^2 - B^2$ als eine c^{te} Potenz enthüllte, welche $\sqrt[c]{A^2 - B^2} = n$ zu finden gestattete. Ist dieses nicht der Fall, so sei Q eine ganze Zahl, welche $Q(A^2 - B^2)$ zu einer c^{ten} Potenz macht, z. B. $A^2 - B^2 = a^m b^p df$ und $Q = a^{c-m} b^{c-p} d^{c-1} f^{c-1}$.

---

[1]) Maclaurin, Algebra pag. 84. [2]) Ebenda pag. 103. [3]) Ebenda pag. 120—124.

Wäre $c < m$, so könnte man allerdings mittels dieser Annahme zu keinem ganzzahligen Q gelangen, wohl aber mittels der Annahme $Q(A^2 - B^2) = (a^u)^c b^c d^c f^c$, welche $Q = a^{uc-m} b^{c-r} d^{c-1} f^{c-1}$ liefert und eine derartige Wahl von u zulässt, dass $uc > m$ wird. Hat man Q gefunden, so setzt man $\sqrt{(A^2 - B^2)Q} = n$. Man würde dann weiter nach der vorigen Regel verfahren, um $\sqrt{(A \pm B)\sqrt{Q}} = t \pm \sqrt{t^2 - n}$ zu finden und endlich $\sqrt{A + B} = \frac{\frac{t \pm \sqrt{t^2 - n}}{2}}{\sqrt{Q}}$ erhalten. Ist A oder B imaginär, so verweist Maclaurin auf De Moivre. Wir kommen im 109. Kapitel auf den Gegenstand zurück.

Alle diese Dinge gehören noch dem I. Abschnitte der Algebra von den Grundregeln und Operationen an. Der II. Abschnitt handelt von der Zusammensetzung und Auflösung von Gleichungen jedes Grades und von Eigenschaften ihrer Wurzeln.

Jede Gleichung kann als das Product so vieler Gleichungen ersten Grades angesehen werden als ihr Grad anzeigt, oder als das Product irgend anderer Gleichungen, wenn nur die Summe ihrer Dimensionen mit der Dimension der vorgelegten Gleichung übereinstimmt[1]). Keine Gleichung kann eine ihren Grad übersteigende Anzahl von Wurzeln besitzen[2]) (S. 387). Sind in einer Gleichung n^{ten} Grades $-p$, q, $-r$, s, $-t$, $u \cdots$ die Coefficienten der auf x^n folgenden Glieder, so ist p die Summe der Wurzeln, q die Summe der aus ihnen zu je zweien gebildeten Producte[3]) u. s. w. Sind weiter B, C, D, E die Summen der 2ten, 3ten, 4ten, 5ten Potenzen der Wurzeln, so können diese mittels p, q, r, s, t berechnet werden[4]) (S. 390). Zunächst ist $p^2 = B + 2q$, also $B = p^2 - 2q$. Dann ist $(B - q)p = C - 3r$, also $C = Bp - pq + 3r = p^3 - 3pq + 3r$. Aehnlicher Weise können $D = pC - qB + pr - 4s$, $E = pD - qC + rB - ps + 5t$ und auf dieselbe Art die Summen irgend welcher Potenzen der Wurzeln gefunden werden, da das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke auf der Hand liegt[5]). Maclaurin kommt am Schlusse des II. Abschnittes in einem besonderen Kapitel auf den Gegenstand zurück[6]). Nennen wir das Gleichungspolynom immer wieder $\Phi(x)$ und sei $\Phi(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \cdots = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots - Lx + M$ und $r \geq n$. Multiplicirt man $\Phi(x) = 0$ mit x^{r-n}, so so entsteht $x^r - Ax^{r-1} + \cdots + Mx^{r-n} = 0$, welche Gleichung,

---

1) Maclaurin, Algebra pag. 132. 2) Ebenda pag 135. 3) Ebenda pag. 140—141. 4) Ebenda pag. 142—143. 5) *And after the same Manner the Sum of any Powers of the Roots may be found: the Progression of these Expressions of the Sum of the Powers being obvious.* 6) Ebenda pag. 286—296.

ebenso wie die $\Phi(x) = 0$, durch $x = a$, $x = b$, $x = c$, $x = d \cdots$ erfüllt werden muss, d. h. es muss sein:

$$\begin{array}{lcl} a^r - Aa^{r-1} + \cdots + Ma^{r-n} = 0 & & a^r = Aa^{r-1} - \cdots - Ma^{r-n} \\ b^r - Ab^{r-1} + \cdots + Mb^{r-n} = 0 & \text{und} & b^r = Ab^{r-1} - \cdots - Mb^{r-n} \\ c^r - Ac^{r-1} + \cdots + Mc^{r-n} = 0 & & c^r = Ac^{r-1} - \cdots - Mc^{r-n} \\ \cdots & & \cdots \end{array}$$

Werden die Gleichungen addirt und ersetzen wir, was Maclaurin nicht thut, jede Summe der k^{ten} Potenzen aller Gleichungswurzeln durch ein einfaches Zeichen, etwa durch S_k, so entsteht $S_r = AS_{r-1} - BS_{r-2} + \cdots - MS_{r-n}$. Dann bedarf es freilich noch eines längeren Beweises dafür, dass ein ähnlicher Satz auch gilt, wenn $r < n$ und Maclaurin führt ihn. Doch wir kehren zu der früheren Stelle des II. Abschnittes zurück.

Der Satz von den Zeichenfolgen und Zeichenwechseln ist zwar nicht bewiesen, aber doch erläutert[1]), und bei dieser Gelegenheit sind für die quadratische und kubische Gleichung Unterfälle erörtert, welche einigermassen mit der von Fontaine geforderten Tabelle sich decken. Aus irgend einer Gleichung n^{ten} Grades kann mittels einer Substitution, welche selbst auf einer Gleichung ersten Grades beruht, das Glied vom Grade $n - 1$ und mittels einer Gleichung μ^{ten} Grades das Glied vom Grade $n - \mu$ entfernt werden[2]). Das Fehlen des Gliedes vom Grade $n - 1$ lässt die Folgerung ziehen[3]), dass die Gleichung positive und negative Wurzeln besitze, welche bei der Addition einander gegenseitig aufheben.

Die Lehre von den vielfachen Wurzeln geht davon aus, dass eine Gleichung $F(x) = x^n + \cdots + bx^2 + ax + k = 0$ unter der Voraussetzung $k = 0$ eine Wurzel $x = 0$, unter der Voraussetzung $a = k = 0$ zwei Wurzeln $x = 0$ besitzen muss u. s. w. Nun setzt man $x = y + e$ in $F(x) = 0$ ein, so dass $F(y + e) = 0$ entsteht, deren Wurzeln $y = x - e$ sein müssen. Das neue Gleichungspolynom schliesst mit den beiden Gliedern $F'(e)y + F(e)$. Ist $x = e$ eine Wurzel von $F(x) = 0$, so muss $y = 0$ eine Wurzel von $F(y + e) = 0$ sein, und dazu ist wiederum $F(e) = 0$ erforderlich. Ist $x = e$ zweifache Wurzel von $F(x) = 0$, so muss $y = 0$ zweifache Wurzel von $F(y + e) = 0$ sein. Dieses bedingt neben $F(e) = 0$ auch $F'(e) = 0$ oder e ist alsdann gemeinsame Wurzel für $F(x) = 0$ und $F'(x) = 0$, und das ist die Hudde'sche Regel, deren Erfinder allerdings bei Maclaurin ebensowenig genannt ist als Rolle in dem Kapitel über

[1]) Maclaurin, Algebra pag. 143—147. [2]) Ebenda pag. 153 und 157. [3]) Ebenda pag. 155.

Wurzelgrenzen, während dieses eine unmittelbare oder mittelbare Abhängigkeit von Rolle (S. 390) vermuthen lässt.

Eine Regel[1]) scheint Maclaurin selbst anzugehören. Er setzt $x = y + e$ in $\Phi(x) = 0$ ein, so dass $\Phi(y + e) = f(y) = 0$ entsteht. Kann man e so wählen, dass $f(y)$ aus lauter positiven Gliedern besteht, so kann kein positives y die Gleichung $f(y) = 0$ erfüllen, d. h. es zeigt sich $x = y + e < e$, und e ist eine obere Grenze für x. Der Vortheil einer solchen oberen Grenze ist besonders offenkundig, wenn man Gleichungswurzeln mit Hilfe der Factoren der Gleichungsconstante zu ermitteln beabsichtigt[2]), weil so unter Umständen gewisse Factoren von vorn herein von der Prüfung ausgeschlossen sind.

Newton's Methode, einen Factor von $\Phi(x)$ zu ermitteln (S. 379 bis 383), ist ziemlich genau in der gleichen Art bewiesen, wie es von Niclaus I Bernoulli geschah[3]). Letzterer Beweis ist (S. 381) 1745 in dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli veröffentlicht worden, kann also sehr wohl zur Kenntniss Maclaurin's, welcher 1746 starb, gekommen sein.

In den II. Abschnitt seiner Algebra hat Maclaurin ferner einen Gegenstand mit hineingezogen[4]), von welchem in Newton's Arithmetica universalis keine Rede ist, die Entwicklung einer Grösse in eine nach Potenzen einer anderen Grösse fortschreitenden Reihe, ausgehend von einer zwischen beiden Grössen stattfindenden Gleichung, und als Mittel zum Zwecke das Newton'sche Parallelogramm (S. 102—103). Der Grundgedanke dieser (Fig. 97) Anordnung von Producten von Potenzen von x und y ist der, dass die Glieder einer Horizontalreihe, die einer Verticalcolumne, aber auch die irgend einer Schrägreihe eine geometrische Progression bilden. Eine solche Schrägreihe, dadurch gekennzeichnet, dass eine gerade Linie die linken unteren Eckpunkte der die Reihe bildenden Felder vereinigt, ist z. B. y^7, y^5x, y^3x^2, yx^3, in der jedes Folgeglied durch Vervielfachung des vorhergehenden Gliedes mit $\frac{x}{y^2}$ entsteht. Irgend ein späteres Glied einer solchen horizontalen oder verticalen oder schrägen Reihe entsteht aus

y^7	y^7x	y^7x^2	y^7x^3	y^7x^4	y^7x^5	y^7x^6	y^7x^7
y^6	y^6x	y^6x^2	y^6x^3	y^6x^4	y^6x^5	y^6x^6	y^6x^7
y^5	y^5x	y^5x^2	y^5x^3	y^5x^4	y^5x^5	y^5x^6	y^5x^7
y^4	y^4x	y^4x^2	y^4x^3	y^4x^4	y^4x^5	y^4x^6	y^4x^7
y^3	y^3x	y^3x^2	y^3x^3	y^3x^4	y^3x^5	y^3x^6	y^3x^7
y^2	y^2x	y^2x^2	y^2x^3	y^2x^4	y^2x^5	y^2x^6	y^2x^7
y	yx	yx^2	yx^3	yx^4	yx^5	yx^6	yx^7
0	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7

Fig 97.

[1]) Maclaurin, Algebra pag 170–171. [2]) Ebenda pag. 191—192. [3]) Ebenda pag. 198. [4]) Ebenda pag. 244—274.

einem anderen Gliede derselben Reihe durch Vervielfachung mit $\left(\frac{x^\alpha}{y^\beta}\right)^\nu$, wo α, β, ν ganze positive Zahlen sind, α oder β auch Null sein können. Ist der Werth irgend zweier Reihenglieder derselbe, so wird $\left(\frac{x^\alpha}{y^\beta}\right)^\nu = 1$ sein, also auch $\frac{x^\alpha}{y^\beta} = 1$, $x^\alpha = y^\beta$, d. h. durch die Annahme $x^\alpha = y^\beta$ werden alle Glieder der betreffenden Reihe einander gleich. Ihr Grad wird alsdann durch den Grad des Gliedes bestimmt, an dessen linken unterem Eckpunkte die erwähnte grade Linie beginnt. Ist beispielsweise $\frac{x}{y^2} = 1$, so nehmen alle Felder der in der Figur bezeichneten Schrägreihe den Werth y^7 an. Die gleiche Annahme bringt aber jedes Glied oberhalb der Schrägreihe auf höheren, jedes Glied unterhalb der Schrägreihe auf niedrigeren Grad als die Glieder der Reihe selbst. So macht $\frac{x}{y^2} = 1$ wieder beispielsweise y^3x^4 zu y^{11} und y^2x zu y^4 mit $11 > 7 > 4$. Dieses Gesetz, dessen Wahrheit aus der Bildungsweise der einzelnen Reihen hervorgeht, hat die Folge, dass, wenn das Lineal, dessen Benutzung Newton wünscht, in der von ihm vorgeschriebenen Art angelegt wird, eine solche Hilfsgleichung zwischen x und y entsteht, welche den niedrigsten Grad nach y hervorbringt, also als maassgebend für eine erste Annäherung der Entwicklung von x in eine nach steigenden Potenzen von y fortschreitenden Reihe unter der Voraussetzung, dass y sehr klein ist, gelten darf.

Wegen der Bestimmung der Anzahl der einer Gleichung genügenden complexen Wurzeln ist ausser auf Newton auch auf die Abhandlungen von Maclaurin und von Campbell in den P. T. verwiesen[1]). Von De Gua ist keine Rede.

Wir gelangen zu dem kürzesten III. Abschnitte von den gegenseitigen Anwendungen von Algebra und Geometrie auf einander, aus welchem wir uns begnügen zwei Dinge hervorzuheben. Die gewöhnliche Parabel $ay = x^2$ und die cubische Parabel $a^2y = x^3$ unterscheiden sich (Fig. 98) wesentlich in ihrer Gestalt[2]). Zwar haben beide je zwei unendliche Zweige, aber bei der ersteren Curve erstrecken sich dieselben auf der positiven, bei der zweiten auf der positiven und negativen Seite in die Unendlichkeit. Dieselbe Verschiedenheit findet zwischen $a^{2\nu-1}y = x^{2\nu}$ und $a^{2\nu}y = x^{2\nu+1}$ statt, und die grade Linie $y = x$ ist unter die Parabeln der zweiten Gattung zu rechnen, die sich auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe nach entgegengesetzter Richtung in die Unendlichkeit erstrecken.

---

[1]) Maclaurin, Algebra pag. 279. [2]) Ebenda pag. 317—318.

Alle Kegelschnitte haben Gleichungen zweiten Grades[1]) und lassen sich nach der Form der Glieder zweiten Grades unterscheiden. Diese heissen bei der Parabel $y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2}$, bei der Ellipse $y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{pc^2}{2ta^2}x^2$, bei der Hyperbel $y^2 - \frac{2bxy}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{pc^2}{2ta^2}x^2$, wovon es nur eine Abweichung giebt, welche eintritt, wenn die Hyperbel auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen bezogen ist, in welchem Falle in der Gleichung mindestens eine der beiden Grössen x^2, y^2 fehlt.

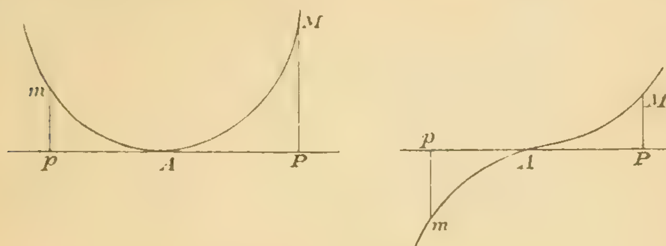


Fig. 98.

Wir haben (S. 488) des 1748 durch De Castillon überwachten Druckes von Euler's zweibändigem Meisterwerke der *Introductio in Analysin infinitorum* gedacht. Der I. Band der *Introductio* (mit diesem abgekürzten Titel pflegt man sich zu benügen) enthält eine algebraische Analysis, und wir verwenden das 111. Kapitel zum Berichte darüber mit Einschluss dessen, was eigentlich der Algebra angehören würde, was wir aber nicht aus seinem Zusammenhange reissen wollen. Der II. Band der Introductio ist eine analytische Geometrie und wird uns im 115. Kapitel beschäftigen. Aber auch im II. Band ist ein Kapitel, und zwar das 19. von den Durchschnittspunkten der Curven, der Hauptsache nach algebraischen Inhaltes, und wir wollen ihm gleich hier unsere Aufmerksamkeit schenken. Sind zwei Curven durch ihre auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Gleichungen gegeben, so verlangt die Auffindung der Durchschnittspunkte das gemeinsame Stattfinden beider Gleichungen, also das Auffinden von Wurzelpaaren x, y aus zwei diese Unbekannten enthaltenden Gleichungen höheren Grades. Euler benutzt dazu zwei Wege.

Der eine ist derjenige, von welchem wir (S. 109) die Vermuthung aussprachen, Tschirnhaus möge sich seiner bedient haben, weil wir auf ihm uns bewegend genau das Eliminationsergebniss erhielten, zu welchem Tschirnhaus gelangt war. Vielleicht darf man auch Newton

---

[1]) Maclaurin, Algebra pag. 329—336.

als einen Benutzer des gleichen Weges betrachten, denn Endergebnisse, zu welchen er gelangte, ohne zu sagen wie (S. 384), lassen sich wiederum auf diesem Wege erreichen. Unter allen Umständen begegnen wir der Schilderung der Methode erst bei Euler. Er schreibt ausdrücklich vor[1]), man solle die Elimination von y z. B. zwischen

$$\text{I. } P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + Ty^4 = 0$$

und

$$\text{II. } p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0$$

so vollziehen, dass man die erste Gleichung mit p, die zweite mit P vervielfache und deren Differenz durch y theile, dass man ferner die Differenz der mit t vervielfachten ersten und der mit T vervielfachten zweiten Gleichung bilde, wodurch zwei Gleichungen dritten Grades in y erscheinen, welche Euler abgekürzt

$$\text{III. } A + By + Cy^2 + Dy^3 = 0$$

$$\text{IV. } a + by + cy^2 + dy^3 = 0$$

schreibt. Die Fortsetzung des ähnlichen Verfahrens führt zum Gleichungspaare

$$\text{V. } E + Fy + Gy^2 = 0$$

$$\text{VI. } e + fy + gy^2 = 0,$$

dann zu

$$\text{VII. } H + Iy = 0$$

$$\text{VIII. } h + iy = 0,$$

endlich zu

$$\text{IX. } Hi - Ih = 0.$$

Euler fügt hinzu, dass, wenn man in die Gleichung IX. die vorher abgekürzten Werthe wieder in ihrer unabgekürzten Form einsetze, eine Gleichung entstehe, in welcher nur noch die Functionen P, p, Q, q u. s. w. aus I. und II. enthalten seien. Bei der allmäligen Wiedereinsetzung zeigten sich der ganzen Gleichung gemeinschaftliche Factoren, welche weggelassen werden könnten, und es enthalte dann in der Endgleichung jedes Glied nicht mehr als acht Buchstaben, vier grosse und vier kleine.

Der zweite von Euler gezeigte Weg ist folgender[2]). Die Gleichungen, zwischen denen y eliminirt werden soll, heissen

$$\text{I. } Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \cdots = 0$$

$$\text{II. } py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \cdots = 0.$$

Nun wird eine positive ganze Zahl k gewählt, von der man zunächst nur verlangt, dass sie sowohl $> m$ als auch $> n$ sei. Dann hat man I. mit $py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + \cdots$ sowie II. mit $Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + \cdots$ zu vervielfachen, wo A, a, B, b u. s. w.

[1]) Euler, *Introductio* II, § 482. [2]) Ebenda § 483—484.

vorläufig noch unbestimmte Functionen von x bedeuten. Man erhält so zwei neue Gleichungen, welche beide vom k^{ten} Grade nach y sind, und in denen $k - m + k - n = 2k - m - n$ Buchstaben A, a, B, $b\cdots$ vorkommen. Die Gleichungen selbst heissen:

Ia. $Ppy^k + (Pa + Qp)y^{k-1} + (Pb + Qa + Rp)y^{k-2} + \cdots = 0$

IIa. $Ppy^k + (Pq + Ap)y^{k-1} + (Pr + Rq + Sp)y^{k-2} + \cdots = 0.$

Bildet man ihre Differenz:

$$(Pa+Qp-Pq-Ap)y^{k-1}+(Pb+Qa+Rp-Pr-Rq-Sp)y^{k-2}+\cdots=0,$$

so hat diese neue Gleichung $k - 1$ Glieder, in welchen y vorkommt, und eines, welches von y frei ist. Sind die Coefficienten jener $k-1$ ersten Glieder $= 0$, so bleibt nur das von y freie Glied $= 0$ zu setzen, um das Eliminationsergebniss zu besitzen. Allerdings setzt das voraus, dass das Verschwindenlassen von $k-1$ Coefficienten genüge, um $2k - m - n$ Grössen zu bestimmen, d. h. es muss sein $k - 1 = 2k - m - n$, $k = m + n - 1$, so dass die multiplicirenden Gleichungen $py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + \cdots = 0$ und $Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3}\cdots = 0$ heissen. Eine weitere Voraussetzung, welche Euler aber unerwähnt lässt, ist die, dass das Verfahren nicht etwa Identitäten oder sonstige Unbestimmtheiten hervorbringe.

Noch im Erscheinungsjahre 1748 der Introductio beschäftigte sich Euler in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie[1]) abermals mit der Eliminationsaufgabe, indem er den Nachweis zu führen suchte, dass eine Curve m^{ten} und eine Curve n^{ten} Grades mn Durchschnittspunkte besitzen, wenn man imaginäre und im Unendlichen gelegene Durchschnittspunkte mit einrechne. Er will also zeigen, dass die Elimination von x zwischen den Gleichungen

$$ay^m + (b + cx)y^{m-1} + (d + ex + fx^2)y^{m-2} + \cdots = 0$$

und $$\alpha y^n + (\beta + \gamma x)y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x^2)y^{n-2} + \cdots = 0,$$

wo a, α, b, β u. s. w. Constante bedeuten, eine Gleichung mn^{ten} Grades in y hervorbringe. Meistens, sagt er[2]), gelangt man unter Anwendung der gewöhnlichen Eliminationsmethoden zu einer Gleichung, deren Grad mn übersteigt, und man könnte dadurch an der Richtigkeit des zu beweisenden Satzes irre werden. Wenn auch Theiler der Gleichung, zu welcher man auf diesem Wege gelangt, vorhanden sind, so darf man zunächst zweifeln, ob man jene Theiler zu vernachlässigen berechtigt sei, ob sie nicht Wurzeln enthalten, denen Durchschnittspunkte entsprechen. In dieser Bemerkung Euler's dringt zum ersten Male durch den ausgesprochenen Zweifel das Bewusstsein von einer

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin*. Année 1748. pag. 234—248. [2]) Ebenda pag. 239.

Aufgabe fremden, nur durch ein Verfahren mit den Gleichungen in dieselbe hineingetragenen Wurzeln. Euler macht nun einen neuen Vorschlag[1]) zur Elimination. Die beiden Gleichungen, zwischen welchen diesmal y eliminirt werden soll, seien $y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} - \cdots = 0$ und $y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} - \cdots = 0$. Die erstere Gleichung hat m Wurzelwerthe für y, welche $A, B, C, D \cdots$, die letztere n Wurzelwerthe für y, welche $a, b, c, d \cdots$ heissen mögen und selbstverständlich x enthalten, ebenso selbstverständlich reell oder imaginär sein können. Die beiden Gleichungen können demgemäss auch $(y-A)(y-B)(y-C)(y-D)\cdots = 0$ und $(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)\cdots = 0$ geschrieben werden. Das gleichzeitige Stattfinden beider Gleichungen fordert, dass ein Werth von y, der der ersten genügt, auch die zweite befriedige, dass also z. B. $A = a$ oder $A = b$ oder $A = c$ oder $A = d \cdots$ sei, oder $B = a$ oder $B = b$ oder $B = c$ oder $B = d \cdots$ u. s. w., wofür auch geschrieben werden kann $A - a = 0$, $A - b = 0$, $A - c = 0 \cdots$, $B - a = 0$, $B - b = 0$ u. s. w. und Nullsetzung des aus mn Factoren bestehenden Productes $(A-a)(A-b)(A-c)\cdots(B-a)(B-b)\cdots(C-a)(C-b)\cdots$ würde die von y freie Endgleichung sein, wenn $A, B, C \cdots, a, b, c \cdots$ bekannt wären. Letzteres ist zwar nicht der Fall, aber man kann entweder die grossen oder die kleinen Buchstaben sofort und die anderen hinterdrein wieder aus der Endgleichung heraus schaffen. Es war $(y-a)(y-b)(y-c)\cdots = y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - \cdots$. Ersetzt man y durch A, durch B, durch $C \cdots$, so wird $(A-a)(A-b)(A-c)\cdots = A^n - pA^{n-1} + qA^{n-2} - \cdots$, $(B-a)(B-b)(B-c)\cdots = B^n - pB^{n-1} + qB^{n-2} - \cdots$, $(C-a)(C-b)(C-c)\cdots C^n - pC^{n-1} + qC^{n-2} - \cdots$ und die Endgleichung heisst folglich

$$(A^n - pA^{n-1} + qA^{n-2} - \cdots)(B^n - pB^{n-1} + qB^{n-2} - \cdots)$$
$$(C^n - pC^{n-1} + qC^{n-2} - \cdots)\cdots = 0.$$

Führt man die angedeuteten Multiplicationen aus, so entsteht ein Ausdruck, in welchem neben Bekanntem auch Vereinigungen der grossen Buchstaben $A, B, C \cdots$ unter einander auftreten. Diese sind aber mittels der Girard'schen Formeln für die Summen der Wurzelpotenzen in Verbindung mit den Formeln für Bildung der Gleichungscoefficienten aus den Wurzeln durch die $P, Q, R \cdots$ darzustellen. Euler erläutert dann die sehr allgemein gehaltene Vorschrift an einem bestimmten Beispiele, indem er dazu bemerkt[2]), wenn in dem Beweise noch Einiges dunkel sei, so rühre solches von der grossen

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin*. Année 1748. pag. 243—246. [2]) Ebenda pag. 246.

Allgemeinheit der Betrachtungen her, und alle Zweifel schwänden bei der Anwendung auf besondere Fälle. Es ist klar, dass diese Bemerkung die Lücken eines Beweises nicht auszufüllen im Stande ist und nur dazu dienen kann, als Eingeständniss eines noch nicht ganz einwandfreien Beweises zu gelten.

Der nächste Band der Veröffentlichungen der Berliner Akademie für 1749 empfiehlt sich unserer Aufmerksamkeit durch zwei Abhandlungen, deren erste von einer uns noch fremden Persönlichkeit herrührt. Johann Samuel König[1] (1712—1757) war der Sohn eines Berner Theologen gleichen Namens, der wegen religiöser Streitigkeiten aus der Heimat verbannt als Hofprediger in Büdingen eine Zuflucht gefunden hatte. Dort wurde der Sohn geboren, der aber dann in Bern erzogen wurde und durch seine dortige Beliebtheit wesentlich mitbewirkte, dass dem Vater die Rückkehr gestattet wurde. Seine mathematischen Studien machte König seit 1730 in Basel unter Johann und Daniel Bernoulli und Jacob Hermann, dann 1735 in Marburg unter Christian Wolf. In Basel waren Alexis Claude Clairault und Pierre Louis Moreau de Maupertuis seine Studiengenossen. Von 1738 an war König einige Jahre in Paris Hauslehrer der Marquise De Châtelet (1706—1749), an deren Arbeiten er nicht ohne Antheil gewesen ist. Eine feste Anstellung zu finden gelang König weder im Auslande noch in der Schweiz. In der Schweiz traf ihn sogar 1744 das Verbannungsurtheil aus Gründen der Politik. Nun bemühten sich Daniel Bernoulli und Euler für König. Stellungen in Berlin, in Petersburg wurden ihm angeboten, er entschied sich für Franecker und verblieb nun bis zu seinem frühen Lebensende in Holland in verschiedenen Stellungen. Dort begann 1751 der heftige Streit mit Maupertuis über das Princip der kleinsten Action, welcher ein Seitenstück zu dem Prioritätsstreite zwischen Newton und Leibniz genannt werden kann, und in welchem die Berliner Akademie dem gleichen Fehler einseitiger Parteinahme für ihren Präsidenten verfiel, den 50 Jahre früher die Royal Society begangen hatte. Wir freuen uns, nicht genöthigt zu sein, unseren Lesern auch diesen hässlichen Zwist ausführlich zu erzählen, diese Pflicht fällt nur dem Geschichtsschreiber der Mechanik zu. Gleichwohl durfte der Streit, der so viel garstigen Staub aufgewirbelt hat, nicht ganz unerwähnt gelassen werden, wo der Name König's uns begegnet. Er begegnet uns, wie schon gesagt, als Verfasser eines Aufsatzes von 1749 über den wirklichen Grund

[1] Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz II, 147—182. J. H. Graf, Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in Bernischen Landen. III. Heft, 1. Abtheilung. S. 23—62.

der Unzulänglichkeit der Del Ferro'schen Formel im irreductiblen Falle der kubischen Gleichung[1]).

Die von ihrem quadratischen Gliede befreite kubische Gleichung kann als $x^3 \pm qx - r = 0$ mit positiven q und r dargestellt werden, denn $x^3 \pm qx + r = 0$ geht durch $x = -y$ in die vorige Form über und hat also die gleichen nur mit -1 vervielfachten Wurzeln. Von den allein zu unterscheidenden Formen:

$$\text{A.}\quad x^3 + qx - r = 0$$

$$\text{B.}\quad x^3 - qx - r = 0$$

lässt A. immer auf zwei complexe Wurzeln schliessen und B., vorausgesetzt dass alle Wurzeln reell seien, auf eine positive und zwei negative Wurzeln, wofür sich König auf den Satz von den Zeichenwechseln beruft. Das Fehlen des quadratischen Gliedes bedeutet, dass die eine positive Wurzel so gross ist wie die zwei negativen Wurzeln zusammen, dass sie mithin den absolut grössten Werth unter den drei Wurzeln besitzt. Der irreductible Fall kann sonach unter alleiniger Beachtung von B., wofür man auch

$$\text{C.}\quad x^3 - 3a^2x - 2a^2c = 0$$

schreiben darf, untersucht werden, und nun folgt eine ausführliche Erörterung der Grössebeziehungen zwischen a und c, welche stattfinden müssen, damit C. die erwähnten drei reellen Wurzeln besitze, auf die wir aber nicht eingehen.

Der gleiche Band der Berliner Veröffentlichungen schliesst eine Arbeit Euler's[2]) über die imaginären Gleichungswurzeln in sich. Euler stellt sich hier die gleiche Aufgabe, mit welcher sich D'Alembert (S. 565—567) im Jahre 1746 beschäftigt hatte. Er nennt diesen Vorgänger auch einmal[3]), indem er erklärt, D'Alembert habe in seiner vortrefflichen Abhandlung von 1746 über die Integralrechnung über allen Zweifel erhoben, dass jede imaginäre Gleichungswurzel, von wie verwickelter Zusammensetzung sie sein möge, sich stets auf die Form $M + N\sqrt{-1}$ mit reellen M und N zurückführen lasse. Er tadelt nur, dass D'Alembert das Unendlichkleine in seine Darstellung mit aufgenommen habe und liefert Beweise des gleichen Satzes, die von dem durch ihn gerügten Mangel frei seien. Er zeigt also erst, dass algebraische Operationen, dann aber auch[4]), dass alle bekannten transcendenten Operationen die durch sie hervorgebrachten imaginären Grössen in dem Rahmen jener Form belassen. Was dagegen D'Alembert's Nachweis der Existenz von Gleichungswurzeln betrifft,

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749, pag. 180—192. [2]) Ebenda pag. 222—228. [3]) Ebenda pag. 257. [4]) Ebenda pag. 265 sqq.

so spricht Euler davon mit keiner Silbe. Wir möchten glauben, er habe D'Alembert's Schlüsse nicht für zwingend gehalten und doch den schwachen Punkt in ihnen nicht aufzudecken vermocht, deshalb habe er, ohne ein Wort des Lobes noch des Tadels für diesen Theil der Arbeit von 1746, versucht, eine andere seiner Meinung nach einwandfreie Beweisführung an deren Stelle zu setzen.

Drei Sätze[1]) sind in geometrischer Gestalt vorgetragen. Eine Curve $y = x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \cdots + N$ mit ganzzahlig positivem Exponenten m und reellen Coefficienten $A, B, C \cdots N$ hat bei jedem reellen Werthe der Abscisse x einen und nur einen reellen Werth von y. Bei $x = \infty$ wird $y = \infty$, bei $x = -\infty$ wird $y = -\infty$. Die Curve liegt also auf der positiven Abscissenseite im Unendlichen oberhalb, auf der negativen Abscissenseite im Unendlichen unterhalb der Abscissenaxe. Die rechts und links in die Unendlichkeit sich erstreckenden Curvenzweige stehen aber in stetiger Verbindung[2]), die Curve muss also die Abscissenaxe einmal oder mehrere Mal schneiden, und wenn mehrere Mal, so muss die Zahl der Schnittpunkte, in welchen $y = 0$ ist, ungrad sein. Folglich hat erstens die Gleichung $x^{2m+1} + Ax^{2m} + \cdots + N = 0$ jedenfalls eine reelle Wurzel, vielleicht eine grössere, dann aber ungrade Anzahl von solchen. Die Curve $y = x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \cdots + N$ dagegen liefert $y = \infty$ sowohl wenn $x = \infty$ als wenn $x = -\infty$. Ihre unendlichen Zweige liegen rechts wie links oberhalb der Abscissenaxe, und die Curve schneidet die Abscissenaxe in einer graden Anzahl von Punkten oder gar nicht. Mithin hat zweitens die Gleichung $x^{2m} + Ax^{2m-1} + \cdots + N = 0$ eine grade Anzahl von reellen Wurzeln oder gar keine. Ist die Constante N wesentlich negativ, etwa $N = -O^2$, und fragt man nach der Gestalt der Curve $y = x^{2m} + Ax^{2m-1} + \cdots - O^2$, so ist, wie wir soeben zeigten, $y = \infty$, sowohl wenn $x = \infty$ als wenn $x = -\infty$. Bei $x = 0$ ist $y = -O^2$ d. h. die Curve befindet sich unter dem Coordinatenanfangspunkte, dann aber im Unendlichen sowohl rechts als links oberhalb der Abscissenaxe, die Curve muss daher die Abscissenaxe sowohl rechts als links vom Coordinatenanfangspunkte mindestens einmal schneiden, d. h. drittens die Gleichung $x^{2m} + Ax^{2m-1} + \cdots - O^2 = 0$ hat mindestens eine positive und eine negative Wurzel.

Gegen diese Sätze, welche Euler selbst im I. Bande seiner Introductio in dessen 2. Kapitel schon in analytischer Erörterung aus-

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. pag. 232—235. [2]) *Cette branche [de la courbe audessous de l'axe] étant continue avec l'autre située audessus de l'axe.*

gesprochen hatte, ist niemals der geringste Einwand erhoben worden. Wohl aber ist Euler's weitere Beweisführung von Gauss in der gleichen Abhandlung, in welcher D'Alembert's Untersuchungen bemängelt wurden (S. 565—567), als nicht widerspruchslos erkannt worden, und wir können nicht besser thun als den Bericht über Euler's Gedankengang nebst dem, was darin zweifelhaft erscheint, Gauss zu entnehmen. Auch in der Bezeichnung folgen wir Gauss, während die Euler's selbst etwas davon verschieden ist.

Euler will das vom zweithöchsten Gliede befreite Gleichungspolynom grader Ordnung in zwei Factoren halb so hoher Ordnung zerfällen, also $X = x^{2m} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \cdots + M$ als Product von $x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} + \cdots$ und $x^m + ux^{m-1} + \lambda x^{m-2} + \mu x^{m-3} + \cdots$ darstellen. Die beiden Factoren enthalten $2m - 1$ unbekannte Coefficienten, und genau ebensoviele Coefficienten kommen in X vor. Vervielfacht man die beiden Factoren mit einander und vergleicht ihr Product gliedweise mit X, so entstehen $2m - 1$ Gleichungen, und nun will bewiesen werden, es sei möglich, aus ihnen reelle Werthe von $u, \alpha, \beta, \cdots, \lambda, \mu, \cdots$ zu entnehmen. Wäre u als bekannt angenommen, so könnte man, behauptet Euler, alle anderen Coefficienten $\alpha, \beta, \cdots, \lambda, \mu, \cdots$ rational in u ausdrücken und so wegschaffen, wodurch eine Gleichung $U = 0$ entstehe, welche neben u als Unbekannter nur die bekannten Coefficienten von X enthalte. Wenn es auch praktisch nahezu unausführbar sei[1], bei einigermassen grossem m die Elimination auszuführen, so genüge es, wenn nur der Beweis geliefert werden könne, dass die Gleichungsconstante von $U = 0$ wesentlich negativ sei, denn dann gebe es vermöge des ersten und dritten Einleitungssatzes ein reelles u, welches $U = 0$ erfülle, und folglich lassen sich alle $u, \alpha, \beta, \cdots, \lambda, \mu \cdots$ reell bestimmen. Bei Euler ist der Beweis für den Fall $m = 2$ erbracht, den Gauss dann verallgemeinerte. Sei also mit Euler $X = x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x - \mathfrak{a})(x - \mathfrak{b})(x - \mathfrak{c})(x - \mathfrak{d})$ und sei $x^2 - ux + \beta$ einer der trinomen quadratischen Factoren von X. Nun muss jede Wurzel von $x^2 - ux + \beta = 0$ auch eine Wurzel von $X = 0$ sein, und da u die Summe der zwei Wurzeln von $x^2 - ux + \beta = 0$ ist, kann u die Summe von irgend zweien der Werthe $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ sein, also $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} + \mathfrak{d}$, $\mathfrak{c} + \mathfrak{d}$, im Ganzen $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ Combinationen, woraus man zu schliessen berechtigt ist, die Gleichung in u, nämlich $U = 0$, werde genau vom 6ten Grade sein. Weil ferner in $X = 0$ das zweithöchste Glied fehlt, muss $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = 0$ sein,

[1] *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. pag. 239.

d. h. die sechs Werthe von u sind paarweise geordnet $u = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = p$, $u = \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = -p$, $u = \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = q$, $u = \mathfrak{b} + \mathfrak{d} = -q$, $u = \mathfrak{a} + \mathfrak{d} = r$, $u = \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = -r$ und so zeigt sich $U = (u-p)(u+p)(u-q)(u+q)(u-r)(u+r) = u^6 - \cdots - p^2q^2r^2$ mit negativem constanten Gliede, weil $\frac{1}{2}\cdot\frac{4.3}{2} = 3$ ungrad ist. Ist nun $2m$ eine Potenz von 2, etwa $2m = 2^u$, so kann X in zwei Factoren vom Grade 2^{u-1} zerfällt werden, jeder dieser Factoren in zwei neue vom Grade 2^{u-2} u. s. w., bis schliesslich lauter trinome quadratische Factoren mit reellen Coefficienten ermittelt sind. Ist n der Grad der vorgelegten Gleichung nicht ein 2^u, so giebt es doch jedenfalls ein $2^u > n$ mit $2^u - n = \nu$, und es genügt, die gegebene Gleichung mit x^ν zu vervielfachen, um ein in lauter reelle trinome quadratische Factoren zerlegbares Gleichungspolynom entstehen zu sehen[1].

Gauss hat vier Einwendungen gegen diesen Beweis erhoben. Erstens sei nicht allgemein wahr, dass $\alpha, \beta \cdots, \lambda, \mu \cdots$ rational in u ausdrückbar seien. Zweitens können selbst unter der Voraussetzung rationaler Ausdrückbarkeit die Formeln für $\alpha, \beta \cdots, \lambda, \mu \cdots$ unbestimmt und damit unbrauchbar werden. Drittens sei in der Annahme, in der vom zweithöchsten Gliede befreiten Gleichung sei die Wurzelsumme Null, eine Annahme von unzweifelhafter Richtigkeit, wenn die Gleichung Wurzeln besitze, diese Thatsache doch vorausgesetzt, auf deren Beweis es gerade ankomme. Viertens brauche $-p^2q^2r^2$ nicht negativ zu sein, da imaginäre Werthe von p, q, r das Gegentheil bewirken können. Wenn Euler den letzterwähnten Einwurf auch vorausgesehen[2] hat, so ist es doch ungenügend, was er zur Hebung des Zweifels beibrachte.

Euler hat noch einen anderen Beweis[3]) angegeben, welcher darauf hinausläuft, die Wurzeln von $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots = 0$ müssten sicherlich mittels Wurzelgrössen dargestellt werden können[4]. Wir wissen, dass Euler hier nur seine irrige Vermuthung von 1732 (S. 555) wiederholt, ohne sie zu begründen.

Euler, dessen von keinem anderen Mathematiker auch nur annähernd jemals erreichte Erfindungskraft so viele Früchte zeitigte, dass die bestehenden Akademieschriften sich als ungenügend erwiesen sie aufzubewahren, gab 1746—1751 in Berlin drei Bändchen *Opuscula varii argumenti* heraus. In dem II. Bändchen von 1750 findet sich

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. pag. 243. [2]) Ebenda pag. 240. [3]) Ebenda pag. 263—264. [4]) *Il est certain que cette formule sera composée de plusieurs signes radicaux, dont les quantités A, B ⋯ seront compliquées.*

eine algebraische Untersuchung[1]), zwei Beweise des Satzes von den Summen der Wurzelpotenzen. Sei $Z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \cdots \pm N = 0$ eine Gleichung, deren n Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots \nu$ heissen, so dass also $Z = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\cdots(x-\nu)$ und $\log Z = \log(x-\alpha) + \log(x-\beta) + \log(x-\gamma) + \log(x-\delta) + \cdots + \log(x-\nu)$ ist. Differentiation nach x liefert $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \cdots + \frac{1}{x-\nu} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\beta^2}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x} + \frac{\nu}{x^2} + \frac{\nu^2}{x^3} + \cdots = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2}\int\alpha + \frac{1}{x^3}\int\alpha^2 + \cdots$ in leicht verständlicher Abkürzung. Andererseits ist $\frac{dZ}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \cdots$ und $\frac{1}{Z} = \frac{1}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \cdots}$. Multiplicirt man die für $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dx}$ gefundene Reihe mit Z und setzt das Product der für $\frac{dZ}{dx}$ gefundenen Reihe gleich, so entsteht:

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \cdots = [x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \cdots]\cdot\left[\frac{n}{x} + \frac{1}{x^2}\int\alpha + \frac{1}{x^3}\int\alpha^2 + \cdots\right] = nx^{n-1} + \left(\int\alpha - nA\right)x^{n-2} + \left(\int\alpha^2 - A\int\alpha + nB\right)x^{n-3} + \cdots.$$

Jetzt werden die Reihen rechts und links vom Gleichheitszeichen als gliedweise übereinstimmend gedacht, und so entstehen die Formeln

$$-(n-1)A = \int\alpha - nA$$
$$(n-2)B = \int\alpha^2 - A\int\alpha + nB$$
$$-(n-3)C = \int\alpha^3 - A\int\alpha^2 + B\int\alpha - nC$$
$$(n-4)D = \int\alpha^4 - A\int\alpha^3 + B\int\alpha^2 - C\int\alpha + nD,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

deren Gesetz sofort ersichtlich ist, und aus welchen $\int\alpha, \int\alpha^2, \int\alpha^3 \cdots$ sich der Reihe nach leicht ergeben. Euler's zweiter Beweis ähnelt sehr demjenigen, welchen wir bei unserer Besprechung von Maclaurin's Algebra (S. 571—572) zu erwähnen hatten. Wir lassen dahingestellt, ob Euler von jenem Werke Kenntniss besass.

Gabriel Cramer's ungemein reichhaltige *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* von 1750 gehört gleich Euler's Introductio nur nebensächlich, aber mit wichtigen Gegenständen in dieses Kapitel. Der erste Gegenstand ist das Newton'sche Parallelo

[1]) Euler, *Opuscula varii argumenti* II, 108—120.

gramm, welches Cramer mit den den betreffenden Feldern zugehörenden Gliedern einer Gleichung zwischen x und y mit Einschluss ihrer Zahlencoefficienten ausfüllt[1], welches er aber auch nach dem Vorgange des ausdrücklich dafür genannten De Gua (S. 557) durch ein Dreieck, *Triangle algébrique* oder *analytique*, ersetzt[2]. Jedes Feld, *case*, heisst nach den Potenzen von x und von y, welche ihm eingeschrieben sind oder ihm eingeschrieben gedacht werden, also das Feld x, das Feld x^2y^2, das Feld x^4y u. s. w. Das Feld an der unteren Ecke des Dreiecks heisst die Spitze, *pointe du triangle*, und ist für die Constante bestimmt. Im Uebrigen ist die Anordnung so getroffen, dass die Glieder jeder Horizontalzeile von gleicher Dimension sind, und man hat dem Dreiecke eine solche Ausdehnung zu geben, dass die oberste Zeile dem Grade der Gleichung, mit der man es zu thun hat, entspricht. Von unten nach oben und von links nach rechts heisst also das unterste Feld a, die Felder der folgenden Zeile y, x, dann y^2, xy, x^2, ferner y^3, xy^2, x^2y, x^3 u. s. w. Das gezeichnete Dreieck lässt sich auch durch ein aus Holz oder Elfenbein hergestelltes[3] vertreten, in welchem alle Felder durchlöchert sind. In die Löcher eingesteckte Stifte machen kenntlich, welche Felder hervorzuheben sind, z. B. (Fig. 99) die Felder A, B, C, D, E nebst den beiden durch Sternchen ausgezeichneten Feldern, und zwar hebt man alle Felder hervor, deren namengebende Ausdrücke in der zu untersuchenden Gleichung als Glieder vorkommen. Unsere Figur entspricht also der Gleichung $x^2y^2 + axy^2 + bx^2y + cx^3 + d^2xy + e^2x^2 + f^3y = 0$, weil $A = y$, $B = xy^2$, $C = x^2y^2$, $D = x^3$, $E = x^2$ und von den beiden Sternchen das untere $= xy$, das obere $= x^2y$ ist. Man bildet sodann ein nach aussen gewölbtes Vieleck $ABCDE$, welches die Eigenschaft besitzt, dass die markirten Felder, so weit ihre Marken nicht auf den Vielecksseiten selbst liegen, in das Innere des Vielecks fallen. Jede Vielecksseite giebt zu einer Gleichung Anlass, indem die Summe der ihr angehörenden Gleichungsglieder gleich Null gesetzt wird.

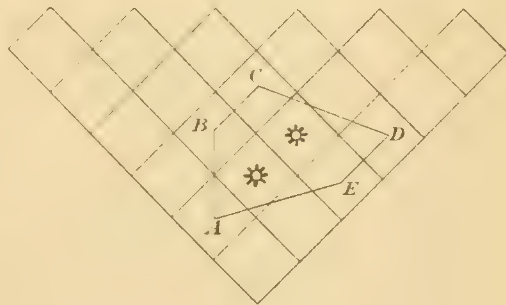


Fig. 99.

[1] Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 55. [2] Ebenda pag. 56. [3] Ebenda pag. 165.

$$
\begin{array}{ll}
AB. & f^3 y + axy^2 = 0 \\
BC. & axy^2 + x^2y^2 = 0 \\
CD. & x^2y^2 + cx^3 = 0 \\
DE. & cx^3 + e^2x^2 = 0 \\
EA. & e^2x^2 + f^3y = 0
\end{array}
$$

und aus diesen Gleichungen entspringen Anfänge von Reihenentwicklungen:

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{f^3}{ax} \\
x &= -a \\
x &= -\frac{y^2}{c} \\
x &= -\frac{e^2}{c} \\
y &= -\frac{e^2}{f^3}x,
\end{aligned}
$$

welche man als Ausgangspunkte zu wählen hat, je nachdem x gegen y gross oder klein gedacht wird, damit die entstehenden Reihen convergiren. Wir bemerken dabei ausdrücklich, dass bei allen Schriftstellern, welche von dem Newton'schen Parallelogramme oder von dem De Gua'schen Dreiecke handeln, das Verlangen nach Convergenz der entstehenden Reihen ausgesprochen ist, aber dass keiner ein eigentliches Merkmal der Convergenz angiebt.

Der zweite Gegenstand aus der Lehre von den Gleichungen, mit welchem Cramer es zu thun hat, ist die Eliminationsaufgabe. Schon in der Vorrede[1] sagt er, die bekannten Methoden hätten ihre Unzulänglichkeit an den Tag gelegt, und so sei eine neue aufzusuchen gewesen, welche die Sache dadurch zu einer leichten mache, dass Zahlzeichen in einer eigenthümlichen Weise zur Darstellung unbestimmt gelassener Grössen in Anwendung kommen, eine Bezeichnung, welche auch bei anderen Untersuchungen sich nützlich erweisen könne. Die Bezeichnung ist aber keine andere als die Leibniz'sche, von der wir (S. 570) sagten, dass Maclaurin sie vielleicht geflissentlich vermieden habe. Es ist auffallend, dass Cramer den Aufsatz der A. E., in welchem er die Anregung zu seiner Bezeichnung gefunden haben dürfte, nicht erwähnt. Sollte er ihn wirklich nicht gekannt und die Nachertindung ganz selbständig gemacht haben? Doch gleichviel. Dem Cramer'schen Bande, über welchen wir ausführlich im 116. Kapitel handeln, ist ein dreitheiliger Anhang beigefügt: über die Elimination von $n-1$ Unbekannten zwischen n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten, über die Elimination

[1] Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes. Préface*, pag. XIV.

einer von zwei Unbekannten zwischen zwei Gleichungen höheren Grades nach eben jenen Unbekannten, über die Hudde'sche Regel zur Auffindung mehrfacher Wurzeln einer Gleichung mit einer Unbekannten.

In der ersten Aufgabe[1] ist Cramer's Bezeichnung unter der Annahme von vier oder mehreren Unbekannten folgende:

$$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{etc.}$$
$$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{etc.}$$
$$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{etc.}$$
$$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Die Exponenten erklärt er als Stellenzeiger. Man habe keine Potenzgrössen vor sich, sondern constante Coefficienten der Unbekannten $z, y, x, v \cdots$ in der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, 4^{\text{ten}} \cdots$ Gleichung. Cramer giebt die Regel der Bildung des Nenners sowohl als des Zählers in dem Bruche, welcher den Werth irgend einer Unbekannten darstellt. Um den Nenner zu erhalten schreibe man bei n (etwa drei) Unbekannten $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ $(1 \cdot 2 \cdot 3 = 6)$ mal die Coefficientenbuchstaben (Z, Y, X) neben einander. In jeder einzelnen Anschreibung lege man den Elementen die Indices (1, 2, 3) stets anders geordnet, im Ganzen also in allen Permutationen deren sie fähig sind, bei und betrachte jeden so gebildeten Einzelausdruck als ein Product. Das Vorzeichen der entstandenen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ Producte richte sich nach der Zahl der *dérangements*, den Abweichungen von der Ordnung. Ein *dérangement* findet statt, so oft einem höheren Index ein niedrigerer unmittelbar oder mittelbar nachfolgt. Bei grader Anzahl der dérangements soll das Product das Zeichen $+$, bei ungrader das Zeichen $-$ erhalten. Der Zähler entstehe aus dem Nenner, indem man den Coefficientenbuchstaben der ihrem Werthe nach zu bestimmenden Unbekannten durch den für die Gleichungsconstante eingeführten Buchstaben A ersetze, Indices und Vorzeichen bleiben ungeändert. Hier ist also die Gleichungsauflösung mittels Determinanten ganz genau beschrieben, und nur Namen und schriftliche Anordnung waren noch nicht so, wie unsere Zeit sie benutzt.

Bezüglich der Elimination einer Unbekannten zwischen zwei Gleichungen höheren Grades[2] schickt Cramer schon vor Beginn des ersten Anhangs die Bemerkung voraus[3], die gewöhnlichen Methoden führten neben ihrer Umständlichkeit das Bedenken herbei, dass Gleichungen von höherem als nothwendigen Grade entstehen, welche überflüssige Wurzeln enthalten, die es nicht immer leicht ist, aus

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 657—659.
[2]) Ebenda pag. 660—676. [3]) Ebenda pag. 656.

ihrer Mischung mit der wahren Auflösung der Aufgabe herauszufinden[1]). Das ist in etwas deutlicherer Weise bejahend ausgesprochen, was Euler in seiner Abhandlung von 1748 verneinend zu verstehen gegeben hatte (S. 577). Auch die von Cramer gegebene Vorschrift deckt sich genau mit der in Euler's Abhandlung, mit welcher Cramer's Bekanntschaft wird angenommen werden müssen. Nur in einer Beziehung geht Cramer über Euler hinaus. Während Euler die Thatsache, dass aus einer Gleichung m^{ten} und einer solchen n^{ten} Grades eine Endgleichung mn^{ten} Grades hervorgeht, doch nur aus einzelnen Beispielen mit Sicherheit erkennen lässt, sucht Cramer dafür einen umständlichen Beweis zu führen, aus welchem die Zeitgenossen schwerlich den Kern herauszuschälen vermocht haben dürften, während man in unseren Zeiten[2]) eine Benutzung von symmetrischen Functionen und eine Andeutung dessen, was man später deren Gewicht genannt hat, darin zu erkennen vermochte. Was endlich die Hudde'sche Regel[3]) betrifft, so beruht Cramer's Beweis auf dem ohne Anwendung von Differentialzeichen aus der Multiplication der Einzelglieder der Entwicklung von $(x+y)^l$ mit der arithmetischen Reihe 0, 1, 2, 3 ⋯ sich ergebenden Satze $\frac{d}{dy}[(x+y)^l] = l(x+y)^{l-1}$.

Ein Schriftsteller bleibt uns noch zu erwähnen: Johann Andreas von Segner[4]) (1704—1777), aus Pressburg in Ungarn, studirte in seiner Heimath und in Jena Medicin, Physik und Mathematik, war kurze Zeit Arzt in Pressburg, dann in Debreczin, wandte sich aber 1732 dem Lehrberufe der Mathematik in Jena zu, der ihn 1735 nach Göttingen, 1755 nach Halle führte. Seine physikalischen Leistungen übertreffen seine mathematischen. Von letzteren erwähnen wir eine 1725 in Jena verfasste Abhandlung, *Dissertatio epistolica ad G. E. Hambergerum, qua regulam Harriotti, de modo ex aequationum signis numerum radicum eas componentium cognoscendi demonstrare conatur.* Damals glaubte Segner mithin, wie jedenfalls auch sein Lehrer Georg Erhard Hamberger[5]) (1697—1755), der Sohn von Georg Albrecht Hamberger (S. 4), dass Harriot der Erfinder der Descartes'schen Zeichenregel sei, worauf wir (S. 563) schon aufmerksam gemacht haben. Ob Segner's Beweis, den wir uns nicht verschaffen konnten, stichhaltig war, ist uns unbekannt, jedenfalls war er der erste,

[1]) *qui renferment des racines superflues, qu'il n'est pas toujours aisé de démêler de celles qui donnent la vraye Solution du Problème.* [2]) Brill und Nöther, Die Entwicklung der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. I. Abschnitt, § 25, S. 137. [3]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 677—680. [4]) Poggendorff II, 892—894. — Allgemeine deutsche Biographie XXXIII, 609—610, Artikel von K. [5]) Poggendorff I, 1007—1008.

der in die Oeffentlichkeit drang. Wir haben indessen einigen Grund, an der zwingenden Kraft jener Erstlingsschrift zu zweifeln. Von Halle aus schickte nämlich Segner 1756 eine Abhandlung zum Abdrucke in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie[1] unter dem Titel: *Demonstration de la règle de Descartes pour connaître le nombre des racines affirmatives et négatives qui peuvent se trouver dans les équations.* Er wusste also jetzt, wer der Erfinder der Regel war. Wir dächten, der frühere Irrthum in dieser einen Beziehung hätte ihn doch schwerlich verhindert, seine Jugendarbeit zu nennen, wenn er sonst keine Bedenken gegen sie gehegt hätte. Aber er erwähnt sie mit keinem Worte, und das hat man wohl mit Recht als ein beredtes Schweigen zu deuten. Was nun die Abhandlung von 1756 betrifft, so ähnelt sie dem Beweise von De Gua (S. 559) so weit, dass sie ein vorhandenes Gleichungspolynom mit $x \mp a$ vervielfältigt und dann untersucht, welche Wirkung dieses Verfahren auf die Vorzeichen ausübt. Die Ungleichungen, von welchen De Gua einen umfassenden Gebrauch machte, kommen nicht in Betracht. Man kann der Abhandlung nicht grade übergrosse Klarheit nachrühmen.

107. Kapitel.

Zahlentheorie.

Nur sehr wenige Männer beschäftigten sich mit Zahlentheorie. War sie doch und sollte sie doch noch lange Zeit bleiben eine Sammlung von geistreichen, für die Wissenschaft kaum nutzbar zu machenden Spielereien. In Briefwechseln zwischen Goldbach und Daniel Bernoulli, zwischen Goldbach und Euler kamen diese Dinge häufig zur Rede, aber Euler war fast der Einzige, der damit an die Oeffentlichkeit trat.

Um nur zwei Dinge aus jenen Briefwechseln zu erwähnen, so schrieb Daniel Bernoulli unter dem 29. Juni 1728 an Goldbach[2], er habe die Gleichung $x^y = y^x$ unter der Annahme ungleicher Werthe für x und y gelöst: von ganzen Zahlen genügten der Gleichung nur 2 und 4, d. h. $2^4 = 4^2$, dagegen gebe es unendlich viele gebrochene Lösungen. Auch andere Gattungen von Grössen, so schliesst die Mittheilung, giebt es, von denen ich nichts sage[3]. Man wird nach diesem Schlussworte wohl oder übel annehmen müssen, dass Bernoulli an complexe Auflösungen dachte.

[1] *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1756 pag. 292—299. [2] *Corresp. math.* Fuss II, 262. [3] *Il y a aussi d'autres espèces de quantités dont je ne dirai rien.*

Goldbach schrieb unter dem 7. Juni 1742 an Euler[1]), er halte es nicht für undienlich, dass man auch diejenigen propositiones anmerke, welche sehr probabiles sind, ohngeachtet es an einer wirklichen Demonstration fehlet. In einer Fussnote bemerkte er dazu, es scheine, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 1, ein *aggregatum trium numerorum primorum* sey. In Euler's Antwort vom 30. Juni heisst es alsdann[2]): Dass ein jeder numerus par eine summa duorum primorum sey, halte ich für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstriren kann. Eben dieser Satz hat, seit jener Briefwechsel durch den Druck bekannt geworden ist, den Namen des Goldbach'schen Erfahrungssatzes erhalten[3]).

Unter den zahlentheoretischen Aufsätzen, welche fast insgesammt in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie zu finden sind und, wie wir oben sagten, mit sehr geringen Ausnahmen von Euler herrühren, haben wir zuerst einen zu nennen, der unserer letzteren Bemerkung nach eine Ausnahme bildet: Goldbach, *Criteria quaedam aequationum, quarum nulla radix rationalis est*[4]). Goldbach benutzt die Potenzreste eines Gleichungspolynoms, um zu entscheiden, ob rationale Wurzeln möglich sind und bedient sich dabei eines Zeichens und eines Wortes, um derenwillen vorzugsweise der kleine Aufsatz geschichtlich denkwürdig erscheint. Das Zeichen ist das der Unmöglichkeit $\top\!\!\!\top$, von welchem Goldbach seit 1730 in seinem Briefwechsel mit Euler Gebrauch machte[5]), das Wort ist das der Congruenz, welches den gleichen Sinn besitzt, mit welchem es später durch Gauss Bürgerrecht in der Zahlentheorie gewann. Ist nämlich eine Zahl $= dp + r$, d. h. lässt sie durch d dividirt einen Rest r, so nennt Goldbach diese Restzahl, *numerum residuum* r, der Kürze wegen ein *congruum*. Sein Schlussergebniss ist folgendes: $x^e \;\top\!\!\!\top\; p^m X + p$, wenn p eine Primzahl, e und m ganze positive Zahlen grösser als 1 und $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots$ mit lauter ganzzahligen Coefficienten bedeutet. Weil $p^m X + p$ durch p theilbar ist, müsste, wenn die Unmöglichkeit nicht stattfände, x^e gleichfalls durch p theilbar, also $x = ap$, $x^e = a^e p^e$ sein. Dann würde aber die Gleichung $a^e p^{e-1} = p^{m-1} X + 1$ folgen, welche unmöglich ist, weil die linke Seite durch p theilbar ist, die rechte nicht.

Unmittelbar hinter Goldbach's Aufsatz folgt ein solcher von Euler, *Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad*

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 127. [2]) Ebenda I, 135. [3]) Eneström scheint im *Bulletino Boncompagni* XVIII, 468 zuerst auf die Stelle aufmerksam gemacht zu haben. [4]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1732 et 1733. T. VI, 98—102. [5]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 25.

numeros primos spectantibus[1]. Fermat hatte (Bd. II, S. 709) behauptet, die Zahl $2^{2^k} + 1$ sei immer Primzahl und hatte an $k = 1, 2, 3, 4$ die Prüfung vollzogen. Euler, im December 1729 durch Goldbach auf den Satz aufmerksam gemacht[2], war zunächst ganz von demselben eingenommen, bis er zufällig $k = 5$ versuchte und $2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417$ fand, wodurch der Satz hinfällig wurde. Darin besteht der wesentliche Inhalt des Aufsatzes, denn wenn Euler auch im weiteren Verlaufe von dem sogenannten Fermat'schen Lehrsatze in der Form, dass $a^n - b^n$ jedesmal durch $n + 1$ theilbar sei, redet, wenn $n + 1$ als Primzahl und a und b als durch $n + 1$ untheilbar angenommen werden, so gesteht er doch ein, den Satz nicht beweisen zu können.

In einem späteren Aufsatze des gleichen Bandes, *De solutione problematum Diophantaeorum per numeros integros*[3], zeigt Euler, wie aus einer ganzzahligen Auflösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = y^2$ beliebig viele andere abermals ganzzahlige Auflösungen gefunden werden können.

Im nächsten Bande wandte sich Euler mit dem Aufsatze *De inveniendo numero qui per datos numeros divisus relinquat data residua*[4] zu der Aufgabe, mehreren unbestimmten Gleichungen ersten Grades gleichzeitig gerecht zu werden. Soll eine Zahl z durch a getheilt den Rest p, durch b getheilt den Rest q lassen und $a > b$ sein, so ist $z = ma + p$ neben $z = nb + q$, und $n = \frac{ma + p - q}{b} = \frac{ma + v}{b}$ soll ganzzahlig sein, wo $p - q = v$ gesetzt wurde. Wegen $a > b$ muss nothwendig $a = \alpha b + c$ mit $c < b$ gesetzt werden können, und man erhält $n = m\alpha + \frac{mc + v}{b}$, wo der letzte Bruch ganzzahlig zu machen ist, etwa $= A$. Daraus folgt $m = \frac{bA - v}{c}$ wiederum als ganze Zahl. Man weiss $c < b$, folglich ist $b = \beta c + d$ mit $d < c$ und $\frac{bA - v}{c} = A\beta + \frac{Ad - v}{c} = m$, und es gilt $\frac{Ad - v}{c} = B$ ganzzahlig zu machen. Fortsetzung des Verfahrens muss endlich zu einem ganzzahlig zu machenden $G = \frac{Hi + v}{k}$ führen mit $a > b > c > d > \cdots > k$ und k als Theiler von v erkennen lassen. Alsdann genügt es $H = 0$ zu setzen, um ganzzahlige $G, \cdots B, A, m, n, z$ zu finden, neben welchem z auch jedes $z + mab$ der Aufgabe genügt. Soll zwischen den Divisoren a und b eine gewisse Beziehung obwalten, so vereinfacht sich häufig die Rechnung. Euler macht darauf aufmerksam,

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T. VI, 103—107. [2] *Corresp. math.* Fuss I, 10. [3] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T. VI, 175—188. [4] Ebenda 1734 *et* 1735. T. VII, 46—66

dass $a = b + 1$ schon bei Michael Stifel (Bd. II, S. 401) Berücksichtigung gefunden habe.

Im folgenden Bande kam Euler auf den Fermat'schen Lehrsatz zurück[1]. Sei die Primzahl $p > 2$. Man hat $2^p = (1 + 1)^p = 1 + p + \frac{p(p-1)}{2} + \cdots + 1 = mp + 2$, mithin ist $2^p - 2$ durch p theilbar und ebenso $2^{p-1} - 1$. Wird $p > 3$ angenommen, so zeigt die Entwicklung $3^p = (1 + 2)^p = 1 + p \cdot 2 + \frac{p(p-1)}{2} \cdot 2^2 + \cdots + 2^p = mp + 1 + 2^p = mp + 3 + (2^p - 2)$, dass $3^p - 3$ durch p getheilt denselben Rest wie $2^p - 2$ d. h. den Rest 0 lässt, mithin ist $3^p - 3$ und ebenso $3^{p-1} - 1$ durch p theilbar. Der Satz wird durch jeweilige Erhöhung der potenzirten Zahl um die Einheit erweitert, und demnach ist die Theilbarkeit von $a^{p-1} - 1$ durch p erwiesen, wenn nur $p > a$. Der schon bei der Entwicklung von $(1 + 1)^p$ zu Tage tretende Kern des Beweises besteht in der Theilbarkeit jedes zur p^{ten} Potenz gehörenden Binominalcoefficienten durch p, und insofern ist es ganz richtig, dass Euler's Beweis mit dem der Oeffentlichkeit vorenthalten gebliebenen von Leibniz (S. 319) übereinstimmt, eine Uebereinstimmung, welche indessen Euler nicht zum Vorwurf gemacht werden darf, da er keinenfalls Kenntniss von Leibnizens Aufsatz hatte.

Die *Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes*[2] Euler's von 1738 betreffen einen besonderen Fall des berühmten Fermat'schen Unmöglichkeitssatzes (Bd. II, S. 705), nämlich den, wo $n = 4$ ist, und behandeln ihn nach einer Methode, in welcher die Aehnlichkeit mit dem, was Fermat Methode der unendlichen Abnahme (Bd. II, S. 709) nannte, sofort einleuchtet. Ist $a^2 + b^2$ wieder ein Quadrat, und sollen a, b theilerfremd sein, so muss eine dieser Zahlen, z. B. a ungrad sein, während b grad ist. Diese Bedingung wird durch $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ mit theilerfremden p und q, deren eines grad, das andere ungrad ist, erfüllt. Nun mögen a und b Zahlen der gedachten Art, d. h. theilerfremd und a ungrad, b grad sein, und zugleich $a^4 + b^4$ ein Quadrat, ohne dass $b = 0$ wäre. Aber $a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2$, und damit daraus ein Quadrat entstehe, muss $a^2 = p^2 - q^2$, $b^2 = 2pq$ und von p, q das eine grad, das andere ungrad sein. Wegen $p^2 - q^2 = a^2$ kann nur p ungrad und q grad sein. Das Quadratischsein von $p^2 - q^2$ erfordert mit Einschluss der für p und q schon gewonnenen Bedingungen, dass $p = m^2 + n^2$, $q = 2mn$ und m, n theilerfremd und eines grad, eines ungrad sei. Nun war $2pq = b^2$,

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736 T. VIII. 141—146.
[2]) Ebenda 1738. T. X, 125—146.

q grad, $2q$ durch 4 theilbar und ebenso wie p ein Quadrat, weil sonst bei theilerfremden p, q die Gleichung $2pq = b^2$ nicht erfüllt werden könnte. Daher ist $2q = 4mn$ nur dann ein Quadrat, wenn m und n jedes für sich ein solches ist: $m = x^2$, $n = y^2$, $p = m^2 + n^2 = x^4 + y^4$. Aber p war als ein Quadrat erkannt, folglich bilden $x^4 + y^4$ eine quadratische Summe, während x, y wesentlich kleiner als a, b sind. Eine solche beliebig oft fortzusetzende Verkleinerung der Zahlen, welche die Aufgabe erfüllen, $a^4 + b^4$ zu einem Quadrate zu machen, ist aber nicht möglich, folglich giebt es keine Anfangswerthe a, b. Ist $a^4 + b^4$ schon kein Quadrat, so ist es um so weniger ein Biquadrat, also die Unmöglichkeit von $a^4 + b^4 = c^4$ in ganzen Zahlen ist bewiesen. Auf wesentlich gleichartiger Grundlage beruhen die Beweise einiger anderen durch Euler beigefügten Sätze, z. B. dass auch $a^4 - b^4$ kein Quadrat sein kann, wenn nicht $b = 0$ oder $b = a$, dass Aehnliches für $2(a^4 + b^4)$ gilt, dass keine Zahl mit Ausnahme der Einheit zugleich Dreieckszahl und Biquadrat sein kann u. s. w. Der letztgenannte Satz wird als *Fermatianum*, d. h. als Fermat bereits bekannt, bezeichnet.

Erst nach mehreren weiteren Jahren veröffentlichte Euler neuerdings eine zahlentheoretische Abhandlung[1], genauer gesagt eine grosse Anzahl beweislos ausgesprochener Sätze über die Divisoren von Zahlen von der Form $pa^2 \pm qb^2$. Darunter befindet sich die Behauptung der Zerlegbarkeit in zwei Quadrate für alle Primzahlen von der Form $4n + 1$, der Nichtzerlegbarkeit in zwei Quadrate für die Primzahlen von der Form $4n + 3$, Sätze welche Fermat bereits kannte.

Der XIV. Band der Veröffentlichungen der Petersburger Akademie, welcher die genannten Lehrsätze enthält, war der letzte, welcher den Titel *Commentarii Academiae Petropolitanae* führte. Eine zweite Reihenfolge von 20 Bänden schloss sich ihnen an als *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae*. Gleich im I. Bande veröffentlichte Euler *Theoremata circa divisores numerorum*[2]), d. h. Beweise zu einer Anzahl der vorher schon gedruckten Sätze. Er beginnt ähnlich wie seiner Zeit beim Beweise des Fermat'schen Lehrsatzes (S. 592). Seien fortwährend unter allen vorkommenden Buchstaben ganze Zahlen verstanden, unter p eine Primzahl. Nun ist $(a + b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2}b^2 + \cdots + pab^{p-1} + b^p$. Alle Binominalcoefficienten, welche bei Euler *unciae* mit einem 1631 durch Oughtred eingeführten Namen heissen, müssen ihrer Bedeutung als figurirte Zahlen

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1744—1746. T. XIV, 151—181. [2] *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1747 *et* 1748. T. I, 20—48.

entsprechend ganze Zahlen sein. Der Factor p eines jeden kann als Primzahl durch die in dem Nenner vorkommenden kleineren Zahlen nicht weggehoben werden, er macht also alle Binominalcoefficienten durch p theilbar, und folglich ist $(a + b)^p - a^p - b^p$ durch p theilbar. Ein Zusatz lässt $a = b = 1$ annehmen, wodurch $2^p - 2 = 2(2^{p-1} - 1)$ durch p theilbar erscheint, beziehungsweise auch $2^{p-1} - 1$, wenn p eine von 2 verschiedene Primzahl ist. Ist neben $(a + b)^p - a^p - b^p$ auch $a^p - a$ und $b^p - b$ durch p theilbar, so folgt durch Addition das Gleiche für $(a + b)^p - (a + b)$. Aber $1^p - 1 = 0$ ist durch p theilbar, demnach bedarf es bei $b = 1$ nur der Theilbarkeit von $a^p - a$ durch p, um die von $(a + 1)^p - (a + 1)$, von $(a + 2)^p - (a + 2)$, $\cdots$ von $c^p - c$ festzustellen, und weil bei $a = 1$ sicherlich $a^p - a$ durch p theilbar sich zeigt, so ist allgemein p in $c^p - c = c(c^{p-1} - 1)$ enthalten, also auch in $c^{p-1} - 1$, es sei denn, dass c ein Vielfaches von p wäre. Offenbar ist auch $(a^{p-1} - 1) - (b^{p-1} - 1) = a^{p-1} - b^{p-1}$ durch p theilbar, wenn weder a noch b für sich diese Theilbarkeit an den Tag legt. Unter der gleichen Voraussetzung kann die ungrade Primzahl $p = 2m + 1$ gesetzt und der Satz ausgesprochen werden, $a^{2m} - b^{2m} = (a^m + b^m)(a^m - b^m)$ müsse durch $2m + 1$ theilbar sein, folglich auch einer der beiden Factoren $a^m + b^m$ oder $a^m - b^m$, keinenfalls aber beide, weil sowohl a als b als durch $p = 2m + 1$ untheilbar gewählt wurden. Die Annahme $p = 2m + 1$ zerfällt abermals in zwei Möglichkeiten $p = 4n - 1$ und $p = 4n + 1$. Bei $p = 4n - 1$ wissen wir (immer unter der Voraussetzung der Untheilbarkeit von a und b durch p), dass $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ durch p theilbar ist, $a^{4n-2} + b^{4n-2} = (a^2)^{2n-1} + (b^2)^{2n-1}$ demnach untheilbar und ebenso jeder Factor von $(a^2)^{2n-1} + (b^2)^{2n-1}$, mithin auch $a^2 + b^2$, welches in $(a^2)^{2n-1} + (b^2)^{2n-1}$ enthalten ist. Dadurch ist der Beweis erbracht, dass keine Summe $a^2 + b^2$ zweier Quadrate durch eine Primzahl von der Form $4n - 1$ theilbar ist, beziehungsweise überhaupt durch eine Zahl von der Form $4n - 1$, weil es keine solche giebt, die nicht mindestens eine Primzahl gleicher Form als Factor enthielte. Ist folglich die Summe $a^2 + b^2$ zweier Quadrate überhaupt theilbar, so müssen die ungraden in ihr enthaltenen Primzahlen sämmtlich von der Form $4n + 1$ sein. Euler geht noch etwas weiter. Er zeigt, dass wenn a und b theilerfremd sind, die Factoren von $a^4 + b^4$ nur 2 oder Zahlen von der Form $8n + 1$ sein können. Wird die Theilerfremdheit von a und b festgehalten, so sind die ungraden Factoren von $a^{2^m} + b^{2^m}$ ausschliesslich von der Form $2^{m+1}n + 1$. Auch noch einige weitere Sätze beweist er, aber bis zur Sicherung der Zerlegbarkeit der Primzahlen von der Form $4n + 1$ in zwei Quadrate gelangt er nicht.

Euler wandte sich ab von der zunächst undankbaren Aufgabe. Wir meinen nicht, als ob er jetzt erst begonnen hätte sich mit Gegenständen aus anderen mathematischen Gebieten zu beschäftigen, das ging bei Euler alles neben einander her, aber innerhalb seines zahlentheoretischen Denkens wechselte er mit dem Stoffe. Er warf sich auf eine wiederum von Fermat in seinen Anmerkungen zu Diophant gestellte Aufgabe: ein rationales, wenn auch nicht ganzzahliges rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dass jede der beiden Katheten um den Dreiecksinhalt vermindert eine Quadratzahl gebe[1]. Euler's Auflösung ist geistreich, entbehrt aber allgemeiner Gesichtspunkte, so dass wir nicht nöthig haben, dabei zu verweilen.

Ein zweiter zahlentheoretischer Gegenstand, mit welchem Euler, mit welchem aber auch durch Euler veranlasst Georg Wolfgang Krafft sich beschäftigte, waren die befreundeten Zahlen. Beide Abhandlungen dürften ziemlich gleichzeitig, etwa 1749, aus den Händen ihrer Verfasser gekommen sein. In den Buchhandel gelangte vermuthlich Euler's Abhandlung zuerst, da sie die Erscheinungszeit 1750 aufweist, während der Band der Veröffentlichungen der Petersburger Akademie, der Krafft's Abhandlung enthält, das Druckjahr 1751 trägt. Trotzdem lassen wir den kurzen Bericht über Krafft's Abhandlung[2]) vorausgehen, weil sie die weniger vollkommene ist. Wir heben aus ihr den hier wahrscheinlich zum ersten Male dem Druck übergebenen Satz hervor, dass, wenn P, Q, R Primzahlen bedeuten, die Summe aller Divisoren von P (1 und P mit eingeschlossen) sich auf $P+1$ beläuft, die der Divisoren von Q^m auf $1+Q+Q^2+\cdots+Q^m=\frac{Q^{m+1}-1}{Q-1}$, die der Divisoren von R^n auf $\frac{R^{n+1}-1}{R-1}$, die der Divisoren von PQ^mR^n auf das Product der gewonnenen Zahlen: $(P+1)\cdot\frac{Q^{m+1}-1}{Q-1}\cdot\frac{R^{n+1}-1}{R-1}$ u. s. w. Krafft stellt mit Hilfe dieses Satzes eine Tabelle der Zahlen 1 bis 150 und der jedesmaligen Divisorensumme her, von welcher er dann weiter Gebrauch macht. Euler's Abhandlung[3]) geht auch von der Angabe der Divisoren, beziehungsweise der Divisorensumme einer Zahl n aus, welche Summe er durch das einem Integralzeichen verwandte, aber nicht damit zu verwechselnde bequeme Symbol $\int n$ bezeichnet, das die Angabe von Beziehungen erleichtert, während bei Krafft ein Symbol fehlt. Euler setzt z. B. $N=m^\alpha\cdot n^\beta\cdot p^\gamma\cdot q^\delta$ mit

---

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1749. T. II, 49—67. [2]) Ebenda T. II, 100—118. [3]) Euler, *Opuscula varii argumenti* II, 23—107 (Berlin 1750).

m, n, p, q als von einander verschiedene Primzahlen und folgert daraus $\int N = \int m^\alpha \cdot \int n^\beta \cdot \int p^\gamma \cdot \int q^\delta$. Er weist auf Beziehungen hin wie $\int n = 1 + n$, $\int n^2 = \int n + n^2$ und $\int n^2 = 1 + n \int n$ oder $\int n^4 = \int n^3 + n^4$ und $\int n^4 = 1 + n \int n^3$. Er weist ferner hin auf $\int n^7 = (1 + n^2 + n^4 + n^6) \int n = (1 + n^4)(1 + n^2) \int n$ und ähnliche Beziehungen, welche es gestatten, die Divisorensummen in Form von Producten zu erhalten, z. B. $\int 2^7 = 3 \cdot 5 \cdot 17$, was die Uebersichtlichkeit ungemein erhöht. Euler giebt dann auch eine Tabelle der Divisorensummen, aber von ganz anderem Umfange als Krafft. Euler stellt die Divisorensumme für Primzahlen unterhalb 1000 und für deren 2te und 3te Potenzen zusammen. Bei den kleineren Primzahlen erstrecken sich die Potenzen, für welche die Divisorensummen berechnet sind, ungemein viel höher, nämlich bis zu 2^{36}, 3^{15}, 5^9, 7^{10}, 11^9, 13^7, 17^5, 19^5, 23^4. Befreundete Zahlen sind bekanntlich solche, welche gegenseitig die Summe der Theile der anderen Zahl sind. Will man diese Forderung in Zeichen ausdrücken, so darf man nicht übersehen, dass Krafft und Euler beide unter die Divisoren einer Zahl die Zahl selbst einrechnen, die bei den Theilen ausgeschlossen ist. Die Theilersumme von n ist also $\int n - n$ und die Doppelbedingung dafür, dass m und n befreundete Zahlen seien, lautet $m = \int n - n$, $n = \int m - m$ oder $\int m = \int n = m + n$. Auch diesen Satz kennt Krafft, aber seine mangelhafte Bezeichnung gestattet ihm nicht, denselben so einfach hinzuschreiben. Bei $m = n$ wird $\int m - m = m$, d. h. m ist alsdann eine vollkommene Zahl, oder mit anderen Worten, jede vollkommene Zahl ist sich selbst befreundet. Bei $m > n$ ist $\int m - m = n < m$, $\int n - n = m > n$, d. h. von zwei befreundeten Zahlen ist die grössere eine mangelhafte, die kleinere eine überschiessende Zahl. Was die eigentliche Aufgabe der Auffindung befreundeter Zahlen betrifft, so hat auch Euler nicht vermocht sie zu lösen. Er muss es beispielsweise dahingestellt sein lassen, ob es untereinander theilerfremde befreundete Zahlen geben könne. Er begnügt sich mit der Behandlung ganz besonderer Fälle. Seien p, q, r, s, t, u lauter unter einander verschiedene Primzahlen, von denen keine in der zusammengesetzten Zahl a enthalten sein darf, so sucht Euler befreundete Zahlenpaare von der Form apq und ar, oder apq und ars, oder $apqr$ und as, oder $apqr$ und ast, oder $apqr$ und $astu$, ohne irgend behaupten zu wollen, mit diesen Annahmen sei der Kreis der Möglichkeiten erschöpft. Es gelingt ihm auf diese Weise 61 Paare befreundeter Zahlen aufzufinden, und zwar 34 Paare grader und 27 Paare ungrader befreundeter Zahlen; der Fall eines Paares aus einer graden und einer ungraden Zahl kommt nicht vor.

Ein weiterer zahlentheoretischer Gegenstand, über welchen Euler Untersuchungen anstellte, wurde ihm von Philip Naudé dem Jüngeren jedenfalls vor 1743 unterbreitet, denn in einem Aufsatze, der zwischen 1742 und 1743 bei der Petersburger Akademie einlief, ist davon die Rede[1]). Es handelt sich um die Zerlegung einer ganzen Zahl in additive selbst ganzzahlige Theile, welche entweder alle von einander verschieden sein müssen, oder auch unter einander gleich sein dürfen. In der Introductio von 1748 hat Euler die doppelte Aufgabe in einem besonderen Kapitel behandelt, über welches wir in unserem 111. Kapitel berichten. Dann hat Euler noch eine Abhandlung *De partitione numerorum*[2]) veröffentlicht, aber sie enthält nicht wesentlich mehr, als schon in der Introductio stand, und somit gehen wir an ihr vorüber ohne ihr Anderes als die Bemerkung über den Urheber der Aufgabe zu entnehmen.

Im folgenden Bande der Veröffentlichungen der Petersburger Akademie[3]) kehrte Euler zu seinem wiederholt in Angriff genommenen Gegenstande *De numeris qui sunt agregata duorum quadratorum* zurück. War doch, wenn man wollte, die Zerlegung in Quadrate, ob in zwei oder in mehrere, nur ein besonderer Fall der Zerlegung überhaupt, und mit dieser Andeutung hatte Euler im Aufsatze des vorhergegangenen Bandes zu verstehen gegeben, er denke noch an die scheinbar verlassene Aufgabe. Zur Lösung brachte er sie auch dieses Mal noch nicht. Man gestatte uns, um uns kürzer fassen zu können, das Nennwort Primzahl mitunter durch das Eigenschaftswort theilerlos zu ersetzen und ferner eine Zahl, welche die Summe zweier ganzzahliger Quadrate ist, eine Quadratensumme, eine Zahl, welche nicht die Summe zweier ganzzahliger Quadrate ist, eine Nichtquadratensumme zu nennen. Euler zeigt, dass wenn p Quadratensumme ist, das Gleiche für $2p$ gilt, und dass dieser Satz umkehrungsfähig ist. Er zeigt, dass das Product zweier Quadratensummen wieder eine solche giebt. Er beweist, dass, wenn pq Quadratensumme und p theilerlose Quadratensumme ist, q Quadratensumme sein muss, eine Folgerung welche sich leicht auf den Fall ausdehnt, dass die Quadratensumme p ein Product aus beliebig vielen theilerlosen Quadratensummen ist. Ist dagegen pq Quadratensumme und q Nichtquadratensumme, so ist p entweder theilerlose Nichtquadratensumme, oder p besitzt eine theilerlose Nichtquadratensumme als Factor, während man in dem letzteren Falle nicht so weit gehen kann zu behaupten, p sei

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1741—1743. T. XIII, 79 und 89. [2]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1750 *et* 1751. T. III, 125—169. [3]) Ebenda 1752 *et* 1753. T. IV, 3—40.

selbst Nichtquadratensumme. Sind a und b theilerfremd, und ist $a^2 + b^2$ durch p theilbar, so kann man immer eine andere durch p theilbare Quadratensumme $c^2 + d^2$ finden, welche höchstens $= \frac{p^2}{2}$ ist. Mit diesem Satze gewinnt Euler wieder die Möglichkeit die Methode der unendlichen Abnahme anzuwenden, welche folgern lässt, dass eine Summe zweier theilerfremden Quadrate nur durch eine Quadratensumme theilbar sein kann, und da jede Primzahl von der Form $4n - 1$ Nichtquadratensumme ist, so können die theilerlosen Quadratensummen, welche in Summen zweier theilerfremden Quadrate als Factoren stecken, nur von der Form $4n + 1$ sein. Ob aber jede Primzahl von der Form $4n + 1$ Quadratensumme sei, ist damit keineswegs festgestellt. Euler führt allerdings die Untersuchung noch etwas weiter. Ist $4n + 1$ Primzahl, und sind a und b nicht durch $4n + 1$ theilbar, so muss $a^{4n} - b^{4n} = [(a^n)^2 + (b^n)^2]\,[(a^n)^2 - (b^n)^2]$ ein Vielfaches von $4n + 1$ sein. Ist dabei $a^{2n} - b^{2n}$ nicht Vielfaches von $4n + 1$, so ist damit erwiesen, dass die Quadratensumme $(a^n)^2 + (b^n)^2$, oder, wenn $a^n = mr$, $b^n = ms$ und r, s theilerfremd sind, dass $m^2(r^2 + s^2)$ und folglich auch $r^2 + s^2$ durch $4n + 1$ theilbar sein muss, womit nach dem Vorhergehenden die Sache erledigt wäre. Es bedarf also des Nachweises, dass, wenn $4n + 1$ Primzahl ist, immer zwei durch $4n + 1$ nicht theilbare Zahlen a, b von der Beschaffenheit gefunden werden können, dass $a^{2n} - b^{2n}$ nicht durch $4n + 1$ theilbar ist. An dieser Forderung stockt die Untersuchung, welche nur noch zwei weitere Sätze feststellt: dass eine Zahl $4n + 1$ sicherlich Primzahl ist, wenn sie nur auf eine einzige Art die Summe zweier theilerfremden Quadrate ist, und ebenso sicher nicht Primzahl, wenn sie auf mehr als eine Art Quadratensumme ist.

Im nächsten Bande gelang es Euler endlich die letzte Hand anzulegen[1]) und den lange umworbenen Satz von der Darstellbarkeit jeder Primzahl von der Form $4n + 1$ als Quadratensumme endgiltig und lückenlos zu beweisen. Da a und b durch die Primzahl $4n + 1$ nicht theilbar sein dürfen, so wird dieser Bedingung bereits genügt, wenn a und b aus den Zahlen 1 bis $4n$ ausgewählt werden. Euler bildet nun die $2n^{\text{ten}}$ Potenzen aller dieser Zahlen und behauptet, dass, wenn man irgend eine von ihnen als a^{2n}, die nächstkleinere als b^{2n} betrachte, nicht alle Differenzen $2^{2n} - 1^{2n}$, $3^{2n} - 2^{2n}$, $4^{2n} - 3^{2n}$, $\cdots (4n)^{2n} - (4n - 1)^{2n}$ durch $4n + 1$ theilbar sein können. Wären sie nämlich sämmtlich durch $4n + 1$ theilbar, so müsste die gleiche Theilbarkeit sich auch auf die Differenzen jener

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1754 *et* 1755. T. V, 3—58.

Differenzenreihe, d. h. auf die zweiten Differenzen von 1^{2n}, 2^{2n}, 3^{2n}, $\cdots (4n)^{2n}$ erstrecken u. s. w. Die $2n^{\text{ten}}$ Potenzen der aufeinander folgenden Zahlen bilden aber eine arithmetische Reihe $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, deren $2n^{\text{te}}$ Differenzen alle unter einander gleich sind und zwar $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)$ heissen. Das ist ein Satz, der schon lange bekannt war, und dessen Erfindung De Lagny 1705 für sich in Anspruch nahm (S. 375). Nun ist aber das Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)$ durch die Primzahl $4n + 1$ nicht theilbar, folglich kann unmöglich jede der genannten ersten Differenzen mit jener Theilbarkeit behaftet sein.

Euler war bei dieser Beweisführung von der Division von Differenzen $(a + 1)^n - a^n$ durch eine Zahl p ausgegangen. Welche Reste stellen sich aber bei der Division der einzelnen Zahlen a^n durch p heraus, welche insbesondere bei $n = 2$? Diese Frage knüpfte sich für ihn an jene Untersuchung an. Hier, sagt er[1], kommen viele ausgezeichnete Erscheinungen vor, durch deren Betrachtung nicht geringes Licht auf die Natur der Zahlen fällt. Damit war also die Lehre von den Potenzresten im Allgemeinen, von den quadratischen Resten insbesondere den Fachgenossen zur Beachtung empfohlen, und wenige Seiten später wurden die Kunstausdrücke Reste, *residua*, und Nichtreste, *nonresidua*, gebildet[2], welche fortan Bürgerrecht in der Zahlentheorie haben sollten. Euler zeigt, dass, wenn $a < p$, jedes $(kp + a)^2$ durch p getheilt denselben Rest lässt wie a^2, ferner auch $(p - a)^2$ ebendenselben Rest, dass also höchstens nur die Reste von $1^2, 2^2, \cdots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, beziehungsweise von $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, wenn p grad ist, unter einander verschieden sein können. Er zeigt, dass also unter den Zahlen $0, 1, 2, \cdots (p - 1)$ höchstens $\frac{p-1}{2}$ oder $\frac{p}{2}$, je nachdem p ungrad oder grad ist, Reste für p sein können, dass, wenn unter den Resten die Zahl r sich findet, auch r^2, r^3, kurz jedes r^m unter den Resten vorkommt, vorausgesetzt dass man übereinkommt, r^m statt derjenigen Zahl zu schreiben, welche bei der Division von r^m durch p übrig bleibt. Ist ferner r ein gegen p theilerfremder Rest, ist $m > n$, und ist $r^m - r^n = r^n(r^{m-n} - 1)$ durch p theilbar, so muss diese Theilbarkeit von $r^{m-n} - 1$ oder von $r^{\lambda} - 1$ herrühren, wo λ nicht grösser als $\frac{p}{2}$ sein kann[3]. Sind r und s Reste, so ist auch rs Rest. Sind r und rs gegen p theilerfremde Reste, so ist auch s Rest. Ist von nun an p eine ungrade

[1] *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1754 *et* 1755. T. V, 14 Scholium. [2] Ebenda T. V, 19 Corollarium 4. [3] Ebenda T. V, 23—24.

Primzahl $2q+1$, so lassen sich folgende Sätze behaupten: Unter den Zahlen $1, 2, 3, \cdots (2q)$ giebt es genau q Reste[1]) und q Nichtreste[2]). Ein Rest mit einem Nichtrest vervielfacht giebt einen Nichtrest. Das Product zweier Nichtreste ist ein Rest. Ergänzung eines Restes r, *complementum residui*, nennt Euler die Zahl $p-r$ oder $-r$, da ja $np+a$ durch a vertreten werden kann[3]), und ähnlicherweise gilt der mit -1 vervielfachte Nichtrest als eine Ergänzung. Ist sowohl r als $-r$ Rest, so haben alle Reste die Eigenschaft, dass ihre Ergänzungen wieder Reste sind, d. h. die q Reste zerfallen in 2mal $\frac{q}{2}$ Reste, deren jeder positiv und negativ auftritt. Das kann aber nur dann stattfinden, wenn $q=2n$, also $p=4n+1$ ist, während bei $p=4n+3$ keine Zahl gleichzeitig mit ihrer Ergänzung Rest sein kann. Die Primzahlen zerfallen also auch in Ansehung dieser Untersuchung in die zwei Klassen von der Form $4n+1$ und $4n+3$, wie sich diese Klassen bei der Frage der Quadratensummen aufdrängten. Damals war bewiesen worden, jede Primzahl $4n+1$ sei Summe von zwei Quadraten. Eine andere Behauptung Fermat's ging dahin, jede Primzahl $4n+3$ sei die Summe von mindestens drei, höchstens vier Quadraten, und nun sollen Schritte auf dem Wege auch diesen Satz zu beweisen erfolgen[4]).

Wenn sich gezeigt hatte, r und $-r$ könnten nur bei $p=4n+1$ gleichzeitig Reste sein, so wird dieses bei jedem $p=4n+1$ eintreffen, denn da jedes solches $p=a^2+b^2$, so wird sowohl a^2 als b^2 kleiner als p sein. Beide Zahlen kommen unter den q quadratischen Resten von p vor, und ist $a^2=r$, so ist $b^2=p-r$. Allerdings ist dieser Beweis kein unmittelbarer[5]). Ein weiterer Satz ist der, dass das Product zweier Summen von je vier ganzzahligen Quadraten eine ähnliche Summe liefert:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)\cdot(p^2+q^2+r^2+s^2) = (ap+bq+cr+ds)^2 \\ +(aq-bp\pm cs\mp dr)^2+(ar\mp bs-cp\pm dq)^3 \\ +(as\pm br\mp cq-dp)^2,\end{aligned}$$

wo einzelne der Zahlen a, b, c, d, p, q, r, s auch Null sein können. Daraus folgt aber, dass der Quotient zweier Summen von je vier Quadraten $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{p^2+q^2+r^2+s^2}$, wenn man ihn im Zähler und im Nenner mit $p^2+q^2+r^2+s^2$ vervielfacht, als Summe von vier

---

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1754 *et* 1755. T. V, 30 Theorema 8. [2]) Ebenda T. V, 31 Corollarium 2. [3]) Ebenda T. V, 36 Definitio und Corollarium 1. [4]) Ebenda T. V, 39—40 Scholium. [5]) Ebenda T. V, 44 Scholium.

Quadraten dargestellt werden kann, sofern man die Bedingung der Ganzzahligkeit fallen lässt. Aus diesem Satze folgt dann endlich mittels einiger Zwischensätze, welche wir überspringen, dass jede ganze oder gebrochene Zahl sich als Summe von höchstens vier ganzen oder gebrochenen Quadraten darstellen lässt.

Euler hat sich noch in demselben Bande in zwei sich unmittelbar an einander anschliessenden Aufsätzen[1]) mit den Divisorensummen, welche zu den in der natürlichen Zahlenreihe aufeinander folgenden Zahlen gehören, beschäftigt. Der Gegenstand hatte schon bei der Arbeit über befreundete Zahlen (S. 595—596) seine Aufmerksamkeit so weit auf sich gezogen, dass er eine Tabelle der Divisorensummen von Primzahlen und deren ersten Potenzen zusammenstellte. Jetzt ergänzte Euler diese Tabelle zu einer solchen der Divisorensummen der Zahlen von 1 bis 100 und warf die Frage auf, ob die in der Tabelle später erscheinenden Zahlen aus den ihnen vorhergehenden hergeleitet werden könnten. Dass $\int mn = \int m \cdot \int n$, so oft m und n theilerfremd sind, war ja bekannt, aber Euler wünschte auch einem additiven oder subtractiven Zusammenhange der Divisorensummen auf die Spur zu kommen. Er bediente sich dabei folgender nichts weniger als einwandsfreien Betrachtung. Er bildete das endlose Product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$ und fand dasselbe als $x^0 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots$, wo die Exponenten in der Form $\frac{3m^2 - m}{2}$ enthalten sind, indem man m nach einander die Werthe $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$ beilegt. Die Vorzeichen der Glieder folgen dem Gesetze, dass nach dem positiven Anfangsgliede je ein Paar — mit einem Paare + abwechselt. Im zweiten Aufsatze sucht er die ganz empirisch aufgestellte Bildungsweise durch eine Induction zu stützen. Dann geht er zu den Logarithmen der als gleich geltenden Ausdrücke über, d. h. er setzt:

$$\log(1-x) + \log(1-x^2) + \log(1-x^3) + \cdots$$
$$= \log(x^0 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - \cdots).$$

Differentiation nach x und nachfolgende Multiplication mit $-x$ liefert:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \cdots = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + \cdots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 \cdots}.$$

Die linksseitigen Brüche werden in unendliche Reihen verwandelt, deren Addition die neue Reihe $x\int 1 + x^2 \int 2 + x^3 \int 3 + x^4 \int 4 + \cdots$ hervorbringt. Diese Reihe wird mit dem Nenner des Bruches rechts

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1754 *et* 1755. T. V, 59—74 (*Observatio de summis divisorum*) und 75—83 (*Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum*).

vervielfacht und das Product dem Zähler des Bruches rechts gliedweise gleichgesetzt. So gelangt Euler zu Gleichungen von der Gestalt

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) \\ + \int(n-12) + \int(n-15) - \cdots.$$

Die Vorzeichen geben die regelmässige Wiederkehr von $++--$ zu erkennen. Die Reihe bricht ab, sobald hinter dem $\int$ eine negative Zahl erscheinen würde. Kommt $\int(n-n) = \int 0$ vor, so ist für dieses an sich unbestimmte Symbol der Werth n zu setzen. Die von n jedesmal abzuziehenden Zahlen sind wieder die $\frac{3m^2-m}{2}$ mit $m = +1, -1, +2, -2, +3, -3$ etc. Die Prüfung der Formel an $n = 1, 2, \cdots 12$ und an $m = 101$ giebt Richtiges.

Ueber drei Abhandlungen, welche Euler in den Jahren 1756 und 1757 der Petersburger Akademie zum Drucke übergab[1]), können wir sehr rasch hinweggehen. Sie gehören insgesammt der Lehre an, welche man später als die von den Formen bezeichnet hat, und zwar sowohl der quadratischen als der cubischen Formen. Zahlreiche Einzelsätze sind erkannt, aber ein einheitlicher Gesichtspunkt ist nicht gewonnen, so dass man Euler wenigstens bis zu der Zeitgrenze, welche wir uns gesetzt haben, nicht als Schöpfer der Lehre von den Formen in dem Maasse bezeichnen darf, wie er es für die Lehre von den quadratischen Resten und den Potenzresten überhaupt war.

Der Name Potenzrest kommt in einem Aufsatze Euler's vor, mit dessen Erwähnung wir unseren Bericht schliessen müssen. *Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta*[2]) enthält von besonders bemerkenswerthen Ergebnissen, dass, wenn p Primzahl und a nicht durch p theilbar ist, es eine kleinste Zahl λ geben müsse, welche hervorbringt, dass a^λ bei Division durch p den Rest 1 lässt; dass alsdann auch $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$ u. s. w. denselben Rest 1 lassen muss; dass die Zahlen $1, a, a^2, \cdots a^{\lambda-1}$ bei der Division durch p lauter verschiedene Reste entstehen lassen; dass λ ein Divisor von $p-1$ sein muss. Der Beweis dieses letzteren Satzes ist in sehr eigenthümlicher Weise geführt. Ist a^λ um 1 grösser als ein Vielfaches von p und a^μ um r grösser als ein ebensolches, so muss auch $a^{\lambda+\mu}$ bei Division durch p den Rest r lassen, und alle überhaupt bei der Division irgend eines a^ν durch p sich ergebenden Reste kommen bei der Division der Zahlen $1, a, a^2, \cdots a^{\lambda-1}$ vor. Nun giebt es bei der Division durch p im Ganzen $p-1$ mögliche Reste, folglich ist $\lambda < p-1$. Ist $\lambda < p-1$,

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1756 *et* 1757. T. VI, 85—114, 155—184, 185—230. [2]) Ebenda 1758 *et* 1759. T. VII, 49—82.

so wird gezeigt, dass $\lambda \leq \frac{p-1}{2}$ sein muss. Falls $\lambda < \frac{p-1}{2}$, so ist die Folgerung gestattet, es werde $\lambda < \frac{p-1}{3}$ sein, und so geht es immer weiter. Endlich muss einmal $\lambda = \frac{p-1}{m}$ werden, d. h. λ ist als Divisor in $p-1$ enthalten. Weil aber $a^{m\lambda}$, wie vorher gezeigt war, denselben Rest wie a liefert, nämlich den Rest 1, so ist $a^{m\lambda} = a^{p-1}$ um 1 grösser, als ein Vielfaches von p, und damit ist ein neuer Beweis des Fermat'schen Lehrsatzes entdeckt, der, nach Euler's Ausspruch, natürlicher sei als derjenige, den er früher veröffentlichte, und der sich (S. 592) auf die Binominalentwicklung stützte.

108. Kapitel.

Combinatorik. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wir haben (S. 532) von zwei durch Euler gelösten geometrischen Aufgaben gesprochen, welche vermöge der von ihm benutzten Methoden mehr der Combinatorik als der Geometrie angehören. Wir kommen gegenwärtig auf sie zurück. In der ersten Aufgabe von 1736 handelt es sich darum[1], ob es möglich sei (Fig. 100), in fort

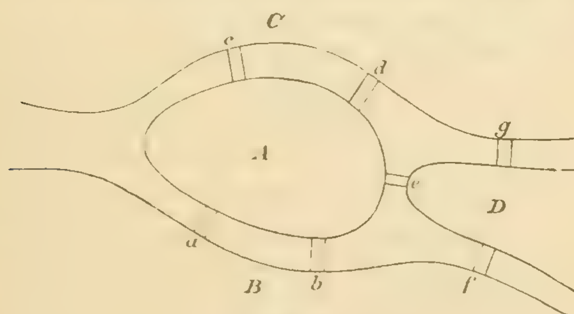


Fig. 100

gesetztem Laufe die sieben Brücken a, b, c, d, e, f, g derart zu überschreiten, dass man über keine Brücke mehr als einmal gehe. Euler drückt ein Hinübergehen von einem der Gebiete A, B, C, D nach einem anderen symbolisch durch Aneinanderfügung der beiden Buchstaben aus, welche jenen Gebieten zur Bezeichnung dienen. Demnach bedeutet AB, dass man über irgend eine Brücke von A nach B gegangen sei, BD dass man sich von B nach D begeben habe, und ABD soll bei nur einmaliger Schreibung des Zwischenbuchstabens B

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 128—140.

anzeigen, dass man von A nach B, dann weiter nach D gegangen sei u. s. w. Der Uebergang über eine Brücke wird also durch 2 Buchstaben, der über 2 durch 3 Buchstaben, der über n Brücken durch $(n+1)$ Buchstaben angedeutet, und wir wissen als erstes Ergebniss, dass der Weg über die 7 in Frage stehenden Brücken durch 8 Buchstaben zu bezeichnen sein wird. Zu einem zweiten Ergebnisse gelangen wir folgendermassen. Führt eine Brücke von A nach einem anderen Gebiete, so muss der Buchstabe A einmal in der Wegangabe vorkommen. Er muss 2mal, 3mal, $(m+1)$-mal vorkommen, wenn 3, 5, $(2m+1)$ Brücken in das Gebiet A einmünden, und genau ebenso verhält es sich mit dem Buchstaben jedes anderen Gebietes. Nun führen nach A, B, C, D der Reihe nach 5, 3, 3, 3 Brücken. In dem Wege müssen also vorkommen $3A$, $2B$, $2C$, $2D$ oder 9 Buchstaben, während nur 8 Buchstaben zur Wegbezeichnung dienen dürfen, und die Aufgabe ist unmöglich. Euler blieb bei dem Falle, der die Veranlassung zur Untersuchung bot, nicht stehen. Er legte sich die weitere Frage vor, wie die Sache sich gestalte, wenn etwa 2, 4, $2m$ Brücken in das Gebiet A einmünden. Während es bei der vorher betrachteten ungraden Brückenzahl keinen Unterschied machte, ob man von A ausging, oder erst aus einem anderen Gebiete über eine Brücke nach A gelangte, ist jetzt zwischen diesen Möglichkeiten zu unterscheiden. Sind nur zwei Gebiete A und B vorhanden, und kommt man von B nach A über eine erste Brücke, von A nach B über eine zweite Brücke zurück, endlich über die $(2m-1)^{\text{te}}$ Brücke nach A, über die $2m^{\text{te}}$ nach B, so heisst der Weg $BAB \cdots B$, d. h. A kommt $m$mal, B aber $m+1$mal vor. Allgemein ausgedrückt: wenn ein Gebiet durch $2m$ Brücken mit einem anderen verbunden ist, so kommt dessen Buchstabe $\frac{2m}{2}+1$mal oder $\frac{2m}{2}$mal in der Wegangabe vor, je nachdem es den Ausgangspunkt enthält oder nicht. Durch Zusammenfassung dieser Regeln kommt Euler zu folgender Anweisung. Man schreibe die Namen aller Gebiete unter einander und neben jedes Gebiet die Zahl der Brücken, welche dort einmünden, so dass die Summe dieser Zahlen, weil jede Brücke zwei Endpunkte besitzt, doppelt so gross als die Zahl der überhaupt vorhandenen Brücken wird. Neben jede der angemerkten Zahlen schreibt man deren Hälfte, wenn sie grad, die Hälfte der um 1 vermehrten Zahl, wenn sie ungrad war. Addirt man diese neue Reihe von Zahlen und erhält die Anzahl der Gebiete oder 1 mehr, so ist die gestellte Aufgabe erfüllbar, und zwar unter der ersten Annahme, wenn man in einem ungraden, unter der zweiten, wenn man in einem graden Gebiete den Ausgangspunkt wählt, grad oder ungrad heisst aber ein Gebiet nach der graden oder ungraden Anzahl der dort einmündenden Brücken.

Die zweite Aufgabe von 1751 hat Euler damals in einem Briefe an Goldbach gestellt[1]. Sie lautet: Auf wie vielerlei Arten kann ein Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden? Ein Viereck $ABCD$ wird entweder durch AC oder durch BD, durch die eine oder durch die andere Diagonale, zusammen auf zwei Arten, in zwei Dreiecke zerlegt. Die Zerlegung eines Fünfecks $ABCDE$ in drei Dreiecke mittels zweier Diagonalen findet auf fünf Arten statt, nämlich mittels AC und AD, mittels BD und BE, mittels CA und CE, mittels DB und DA, mittels EC und EB. Bei einem mittels dreier Diagonalen in vier Dreiecke zu zerlegenden Sechsecke giebt es vierzehn verschiedene Arten. Um die Arten zu zählen, nach welchen ein n-eck mittels $n-3$ Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerlegt wird, hat man, wenn z ihre Anzahl heisst, folgende Zusammenstellung:

$$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$
$$z = 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430$$

und allgemein

$$z = \frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}\cdot\frac{14}{5}\cdots\frac{4n-10}{n-1}.$$

Die Induction, sagt Euler, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, dass diese Sache nicht sollte weit leichter entwickelt werden können.

Auch an Segner muss Euler die sieben ersten Zerlegungszahlen 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429 aber ohne die zu ihrer Berechnung führende Formel haben gelangen lassen, und nun entwickelte dieser in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie eine Recursionsformel zur Lösung der Aufgabe[2]. Sei $ACDEFGB$ (Fig. 101) das zur Zerlegung gegebene Vieleck und AB irgend eine der $n+2$ Seiten desselben. Die Diagonalen von A und von B nach C, deren erstere eine Vielecksseite selbst ist, lassen links nur die Seite AC, rechts das $(n+1)$ Eck $BCDEFG$ erscheinen. Das Dreieck ist das erste überhaupt mögliche Vieleck und kann mit dem *Index* 1 versehen werden, das Viereck mit dem Index 2, das $(n+1)$-Eck mit dem Index $n-1$. Eine Seite ist eigentlich keine Figur und hat den Index 0 zu führen. Die Indices der durch Ziehung von AC und BC links und rechts

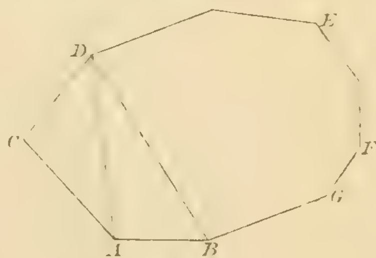


Fig. 101.

[1] *Corresp. math.* (Fuss) I. 551—552. [2] *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae pro annis* 1758 *et* 1759. T. VII, 283—310.

erscheinenden Gebilde sind dieser Erläuterung zufolge 0 und $n-1$, die Indexsumme $0+(n-1)=n-1$. Kann die Figur vom Index $n-1$ auf q Arten in Dreiecke zerlegt werden, so sind, weil links eine weitere Zerlegung nicht stattfindet, für das ganze $(n+2)$-Eck q Zerlegungen vorhanden, so oft ABC eines der gebildeten Dreiecke ist. Nun ziehe man AD und BD, betrachte also ABD als eines der gebildeten Dreiecke. Links bleibt von der ganzen Figur das Dreieck ACD mit dem Index 1 übrig, rechts ein n-Eck mit dem Index $n-2$, die Indexsumme ist $1+(n-2)=n-1$. Kann die Figur vom Index $n-2$ auf p Arten in Dreiecke zerlegt werden, so sind, weil abermals links eine Zerlegung nicht stattfindet, für das ganze $(n+2)$-Eck p Zerlegungsarten vorhanden, so oft ABD eines der gebildeten Dreiecke ist. Schiebt sich die Spitze des durch zwei Diagonalen über AB gebildeten Dreiecks abermals weiter nach rechts, so bleibt links ein Viereck vom Index 2 mit 2 Zerlegungsarten, rechts ein $(n-1)$-Eck vom Index $n-3$ mit etwa o Zerlegungsarten, und da die Zerlegungen links und rechts von einander unabhängig sind, so giebt es $2o$ Zerlegungsarten mit dem hier beschriebenen Dreiecke. Die Thatsache, dass hier ein Product $2o$ auftritt, macht es wünschenswerth, auch den Zahlen q und p die Productenform $1 \cdot q$ und $1 \cdot p$ zu geben, oder mit $a=1$, $b=1$, $c=2$ die drei Producte aq, bp, co erscheinen zu lassen, wo die einander vervielfachenden Factoren die Zerlegungszahlen der links und rechts von dem über AB gezeichneten Dreieck übrigbleibenden Figuren sind und 1 als die Zerlegungszahl der überhaupt unzerlegbaren mit dem Index 0 behafteten Seite gilt, um die Gleichmässigkeit der Formelglieder herzustellen. Welcher Punkt des Vielecks daher als Spitze des mit AB als Grundlinie hergestellten Dreiecks gewählt wird, immer erscheint die Anzahl der alsdann möglichen Zerlegungsarten in Gestalt eines Productes wie aq, bp, co d. h. in Gestalt des Productes der Zerlegungsarten solcher Figuren, deren Indices sich zu $n-1$ ergänzen, und die Summe aller Producte $aq+bp+co+\cdots$ liefert die Anzahl der Zerlegungsarten, welche voraussetzen, dass ein Dreieck die AB zur Grundlinie habe. Bei jeder überhaupt denkbaren Zerlegung muss aber ein Dreieck mit AB als Grundlinie vorkommen, also ist $aq+bp+co+\cdots$ die gesuchte Anzahl. Ihre Bildung vereinfacht sich durch die Erwägung, dass einer Figur mit dem Index k eine andere mit dem Index $n-1-k$ gegenüberliegt, mag sich die erstere links, die zweite rechts von dem Dreiecke über AB befinden oder umgekehrt, dass also Producte wie aq, bp, co je zweimal symmetrisch am Anfang und am Ende der Entwicklung vorkommen. Alle diese Producte paaren sich ab, d. h.

sie erhalten den Factor 2 und treten in nur halber Gliederzahl auf, so oft $n-1$ eine ungrade Zahl ist. Bei gradem $n-1$ erscheint ein Product d^2 zweier gleicher Anzahlen von Zerlegungen einer Figur mit dem Index $\frac{n-1}{2}$, weil eine derartige Figur links und eine zweite rechts von dem über AB beschriebenen Dreiecke erscheint. Segner knüpft an diese Auseinandersetzung eine Tabelle der ausgerechneten Zerlegungsarten bis zum Zwanzigeck.

In den Veröffentlichungen der Pariser Akademie ging den eigentlichen Abhandlungen eine vom Secretär der Gesellschaft herrührende geschichtliche Einleitung, *histoire*, voraus, welche meistens den Inhalt der eingereichten Schriftstücke in gedrängter Kürze und ausserdem Nekrologe verstorbener Akademiker enthielt. Später entstandene Akademien befolgten dieses Beispiel. Auch dem Bande der *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae*, welcher Segner's Abhandlung einschloss, war eine aus Goldbach's Feder stammende Einleitung vorgedruckt. In ihr meldet Goldbach, dass Euler ihm seiner Zeit die oben angeführte independente Formel mitgetheilt habe, welche eine Ausrechnung noch leichter als Segner's Recursionsverfahren zulasse, und welche einige Irrthümer in Segner's Zahlen nachweise. An diese Bemerkung schliesst sich eine Tabelle der richtig gestellten Zerlegungszahlen bis zum Fünfundzwanzigeck einschliesslich, bei welchem eine zwölfziffrige Zahl erscheint.

An den Bericht über die beiden geometrisch-combinatorischen Aufgaben knüpfen wir den über Wahrscheinlichkeitsrechnung an, also über Dinge, von welchem zuletzt im 96. Kapitel die Rede war.

Jean Jacques d'Ortous de Mairan[1]) (1678—1771), gewöhnlich kurzweg De Mairan genannt, Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften seit 1718 und Secretär derselben seit 1741, legte dieser Gesellschaft 1728 eine Untersuchung über das Spiel „Grad oder Ungrad" vor, welche aber nicht gedruckt worden ist. Nur in dem einleitenden Vorberichte finden wir eine Erwähnung[2]), welche so umfangreich ist, dass wir ihr De Mairan's Gedanken entnehmen können. Hält Jemand in einer festgeschlossenen Faust Rechenpfennige verborgen und fragt, ob deren Anzahl grad oder ungrad sei, so ist die allgemeine Annahme die, es spreche ebensoviele Wahrscheinlichkeit für die eine wie für die andere Antwort. De Mairan behauptet, es sei vortheilhaft auf ungrad zu wetten und begründet diese Behauptung wie folgt: Die in der Faust enthaltenen Rechenpfennige sind einem vorher vorhandenen Haufen von Rechenpfennigen entnommen.

---

[1]) Poggendorff II, 17—18. [2]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1728. *Histoire* pag. 53—57.

Enthielt dieser $2n$ Rechenpfennige, so konnten $1, 3, 5, \cdots (2n-1)$ oder $2, 4, 6, \cdots (2n)$ erfasst werden, also genau ebenso leicht eine ungrade als eine grade Anzahl. Enthielt der Haufen aber $2n+1$ Rechenpfennige, so kommt zu den vorigen Fällen noch die der Erfassung aller $(2n+1)$ Rechenpfennige hinzu, die ungrade Wahl hat also eine Möglichkeit mehr für sich. De Mairan beutete diesen Grundgedanken dann noch weiter aus, indem er annahm, dass mehrere Haufen Rechenpfennige vorhanden waren, von deren einem die in der Faust enthaltenen entnommen wurden, dass das Maximum der Rechenpfennige, die in jedem Haufen sich befinden können, aber nicht thatsächlich befinden müssen, gegeben sei, und dergleichen mehr.

Nicole hat im Februar und im März 1730 der Pariser Akademie der Wissenschaften zwei Abhandlungen[1]) vorgelegt, in deren ersterer es sich darum handelte, wer von zwei Spielern, deren Geschicklichkeiten sich wie p zu q verhalten, unter einer vorbestimmten Anzahl von Spielen mindestens eines mehr als der Gegner zu gewinnen hoffen dürfe, und als wie gross sein Vortheil sich berechne. In der zweiten Abhandlung war die Aufgabe auf mehr als zwei Spieler ausgedehnt und zum Gewinne als nothwendig erachtet, dass ein Spieler mindestens ein Spiel mehr als irgend einer der anderen Spieler gewinne. Das Meiste, was Nicole hier vorbrachte, war nicht durchaus neu, sondern schon von De Montmort und De Moivre in Angriff genommen, wenn nicht gelöst. Eine Bemerkung ist allenfalls hervorzuheben, nämlich die[2]), dass, wenn die in der ersten Abhandlung vorausgesetzten beiden Spieler $2n$ Spiele mit einander machen, die Gewinnhoffnung des geschickteren Spielers die gleiche bleibe, als wenn die Verabredung auf $2n-1$ Spiele getroffen worden wäre, während im Allgemeinen die Gewinnhoffnung des geschickteren Spielers mit der Zahl der zu machenden Spiele wachse. Den Grund des scheinbaren Widerspruchs erkennt Nicole darin, dass bei $2n-1$ Spielen der Gewinn von n, bei $2n$ Spielen dagegen der Gewinn von $n+1$ Spielen erforderlich ist, um eine Entscheidung hervorzubringen, d. h. bei $2n$ Spielen muss der Gewinner dem Verlierenden um zwei Spiele voraus sein, bei $2n-1$ Spielen nur um ein Spiel.

Das Jahr 1730 war es auch, welches in London ein Buch herauskommen sah: *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Accessere variae considerationes de methodis comparationum, combinationum et differentiarum, solutiones difficiliorum aliquot problematum ad sortem spectantium, itemque constructiones faciles orbium planetarum, una cum*

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1730, pag. 45—56 und 331—344. [2]) Ebenda pag. 54—55.

determinatione maximarum et minimarum mutationum quae in motibus corporum coelestium occurrunt. Auf dem Titelblatte war kein Verfasser angegeben, aber an der Spitze des Widmungsschreibens von Martin Folkes nannte sich De Moivre als Urheber der *Miscellanea analytica*, wie man das Werk zu nennen pflegt. Wir haben schon (S. 342) erwähnt, dass die Miscellanea analytica Dinge enthalten, welche der Wahrscheinlichkeitsrechnung angehören. De Moivre vertheidigt sich dort gegen De Montmort, der, wie wir gleichfalls schon wissen (S. 336), in der zweiten Ausgabe seines *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* eine im Grunde sehr unschuldige Bemerkung De Moivre's zum Anlass für eine breite Polemik gewählt hatte. Jetzt nahm De Moivre das Wort. Er widmete einen ganzen Abschnitt[1]) der Wahrscheinlichkeitsrechnung, beziehungsweise der Antwort auf einige Anschuldigungen. Es wird darin erzählt, dass De Montmort 1715, also nach dessen Aeusserungen von 1713, in London gewesen sei, dass De Moivre ihn damals in freundschaftlichster Weise herumgeführt habe, dass De Montmort bei der Rückkehr nach Paris geschrieben habe, er werde der ihm erwiesenen Liebenswürdigkeiten stets eingedenk bleiben. Die Spannung hatte demnach nur kurz gedauert, und De Moivre's Ton gegen den überdies jetzt schon seit elf Jahren Verstorbenen war ein höchst anerkennender, nur die ihm selbst gemachten Vorwürfe zurückweisender. Was an Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt, hat aber nur für eine ausführliche Geschichte[2]) dieses besonderen Zweiges der mathematischen Wissenschaften genügende Wichtigkeit, um dabei zu verweilen.

Daniel Bernoulli hat in den Abhandlungen der Petersburger Akademie für 1730 und 1731 eine Arbeit[3]) veröffentlicht, mit welcher er eine Reihe von Untersuchungen begann, welche wir nicht zu erwähnen berechtigt sind, weil sie jenseits der Zeitgrenze fallen, die wir uns gesteckt haben. Nur über den einleitenden Aufsatz dürfen wir berichten. Er führt den Titel eines Versuches einer neuen Theorie eines Maasses für den Zufall und bringt in der That Gedanken zum Vorschein, welche vorher niemals gedruckt worden waren,

[1]) De Moivre, *Miscellanea analytica* pag. 146—229, Liber VII. *Responsio ad quasdam Criminationes*. [2]) Todhunter, *History of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace* pag. 187—190. [3]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1730 *et* 1731. T. V, 175—192. Eine deutsche Uebersetzung mit mathematischen Anmerkungen von A. Pringsheim und mit einer mehr den nationalökonomischen Werthbegriff und dessen Entwicklung betreffenden Einleitung von L. Fick ist (Leipzig 1896) in der „Sammlung älterer und neuerer staatswissenschaftlicher Schriften des In- und Auslandes" erschienen.

und welche dann im Laufe der Zeiten zur Lehre von der im Gegensatze zur mathematischen Erwartung vorhandenen moralischen Erwartung sich ausgebildet haben. Alle Schriftsteller — das ist etwa der Sinn von Daniel Bernoulli's Entwicklungen — setzten den Werth einer Erwartung gleich der Summe der Producte der zu erzielenden Gewinne in den Bruch, der jedesmal zum Zähler die Anzahl der der Erringung des Gewinnes günstigen Fälle, zum Nenner die Anzahl aller überhaupt möglichen Fälle besitze. Dabei komme der Werth, *valor*, des Gewinnes, aber nicht das in Betracht, was man seinen wirthschaftlichen Nutzen, seinen Vortheil, *emolumentum*, nennen könne. Dieser hänge von dem wirthschaftlichen Zustande der Person, *ex conditione personae*, welche den Gewinn erziele, ab. Mittlerer Vortheil, *emolumentum medium*, sei alsdann die Summe der Producte der einzelnen Vortheile in die vorher erklärten Brüche. Der Vortheil selbst setzt sich aus Elementen zusammen, welche im graden Verhältnisse der Elemente des Gewinnes und im umgekehrten Verhältnisse des Vermögens, *summa bonorum*, stehen, eine Hypothese, welche unter unzähligen gewählt wird, und deren Begründung auf Folgendes hinausläuft: Die meisten Menschen verzehren ihre Einkünfte, dieser 5000 Dukaten, jener halb so viel. Dem Ersten erwächst durch 1 Dukaten nicht mehr Vortheil als dem Zweiten durch $\frac{1}{2}$ Dukaten, was in der Gleichung $\frac{1}{5000} = \frac{\frac{1}{2}}{2500}$ sich spiegelt, und diese Gleichung ist das erwähnte Gesetz für die Ermittelung des Vortheils. Ist also x das Vermögen, dx das Element der Vermögenszunahme, dy das Element des Vortheils, b ein Proportionalitätsfactor, so muss $dy = \frac{b\,dx}{x}$, $y = b \cdot \log x + C$ sein, oder bei $C = -b \log a$, wo a das Anfangsvermögen bezeichnet, auch $y = b \cdot \log \frac{x}{a}\cdot$ Denkt man sich das Vermögen x aus a und dem hinzugekommenen Gewinne, *lucrum*, x_1 gebildet, so ist $y = b \cdot \log \frac{a + x_1}{a}\cdot$ Auch hier lässt sich ein *emolumentum medium* bilden, wenn man die verschiedenen Einzelemolumente[1]) $y_1, y_2, y_3, \cdots$ mit der Wahrscheinlichkeit $p_1, p_2, p_3, \cdots$ sie zu erzielen vervielfacht und die Producte addirt. Das mittlere Emolument ist also

$$Y = p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + \cdots = p_1 b \log \frac{a + x_1}{a} + p_2 b \log \frac{a + x_2}{a} + p_3 b \log \frac{a + x_3}{a}$$
$$+ \cdots = p_1 b \log (a + x_1) + p_2 b \log (a + x_2) + p_3 b \log (a + x_3)$$
$$+ \cdots - (p_1 + p_2 + p_3 + \cdots) b \log a,$$

[1]) Unsere Bezeichnung weicht hier im Anschlusse an Todhunter l. c. pag. 214 von der Bernoulli's ab.

ein Ausdruck, der noch einfacher wird, wenn die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \cdots$ alle Möglichkeiten erschöpfen, d. h. wenn $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1$ ist. Dann ist nämlich

$Y = b \log X - b \log a$ mit $X = (a + x_1)^{p_1} \cdot (a + x_2)^{p_2} \cdot (a + x_3)^{p_3} \cdots$.

Eine solche Erschöpfung der Möglichkeiten, wie sie hier vorausgesetzt wurde, muss, da bei ehrlichem Spiele doch nicht in allen Fällen gewonnen werden kann, einige der x negativ auftreten lassen, so oft der Gewinn ein Verlust ist.

Bernoulli zeigt dann, dass jedes Spiel unvortheilhaft ist. Haben zwei Personen je 100 Dukaten und spielen um 50 Dukaten in einem Spiele, welches genau gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit für Jeden bietet, so ist

$$X = (100 + 50)^{\frac{1}{2}} \cdot (100 - 50)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7500} < 87,$$

also jeder der beiden Spieler verschlechtert sein Vermögen um mehr als 13 Dukaten dadurch, dass er sich überhaupt auf das Spiel einlässt.

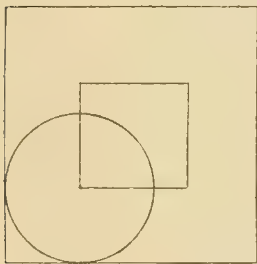
Je grösser das Vermögen im Verhältnisse zum Einsatze ist, um so geringer wird der der Spielgefahr gleichkommende Verlust, und somit bestätige sich, was im bürgerlichen Leben allgemeine Annahme zu sein scheine, dass der Eine ein zweifelhaftes Unternehmen wagen dürfe, ein Anderer nicht. Nachdem eine Nutzanwendung der gleichen Grundgedanken auf die Frage, ob man schwimmende Güter versichern solle, gemacht ist, wobei es wesentlich auf das Verhältniss des Betrages der schwimmenden Güter zum Gesammtvermögen ankommt, wendet sich Daniel Bernoulli einem anderen Gegenstande zu.

Es ist die 1713 von Niclaus I Bernoulli gestellte Aufgabe (S. 338), welche in folgender Form ausgesprochen wird: Paul soll dem Peter 1 geben, wenn dieser bei einem 1ten Wurfe mit einem Geldstücke Schrift werfe, dagegen 2, 4, 8 $\cdots$, wenn Schrift erst beim 2ten, 3ten, 4ten $\cdots$ Wurfe erscheine; Paul's Verlusthöhe wird gesucht. Wenn auch unendlich viele Fälle denkbar sind, könne man doch deren Anzahl durch den Buchstaben N bezeichnen. Beim 1ten Wurfe entscheidet sich das Spiel zu Peter's Gunsten in $\frac{N}{2}$ Fällen, beim 2ten, 3ten, 4ten $\cdots$ Wurfe in $\frac{N}{2^2}, \frac{N}{2^3}, \frac{N}{2^4} \cdots$ Fällen, so dass die Zahlen $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2^2}, p^3 = \frac{1}{2^3} \cdots$ erscheinen und, was früher X hiess, den Werth $(a+1)^{\frac{1}{2}} \cdot (a+2)^{\frac{1}{4}} \cdot (a+4)^{\frac{1}{8}} \cdot (a+8)^{\frac{1}{16}} \cdots$ erhält, falls a das ursprüngliche Vermögen von Paul war. Seine Verlusthöhe ist demnach $(a + 2^0)^{\frac{1}{2^1}} \cdot (a + 2^1)^{\frac{1}{2^2}} \cdot (a + 2^2)^{\frac{1}{2^3}} \cdots - a$, mithin wechselnd

je nach dem Werthe von a. Das war der erste Versuch eine Auflösung der Aufgabe herzuleiten, welchem andere, wie schon bemerkt, folgten, und weil dieser Versuch in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie erschien, erhielt die Aufgabe selbst den Namen der Petersburger Aufgabe, wie wir schon früher (Bd. II, S. 461) gelegentlich berichtet haben.

Daniel Bernoulli gab als Nachschrift zu seiner Abhandlung einen Brief Cramer's an Niclaus I Bernoulli von 1728, welcher die gleiche Aufgabe betrifft, und welchen Daniel Bernoulli zu lesen bekam, nachdem sein eigener Aufsatz schon druckfertig war. Auch Cramer war es nicht entgangen, dass zwischen dem *calcul mathématique* und der *estime vulgaire*, Ausdrücke welche etwa der mathematischen und der moralischen Erwartung entsprechen, ein Gegensatz stattfinde, und dieses Verdienst Cramer's erkennt Daniel Bernoulli an. Dagegen verhält er sich ablehnend gegen Cramer's Versuch, den Widerspruch zu heben, welcher darin besteht, dass alle Potenzen der Zahl 2 von 2^{24} an als einander gleichwerthig betrachtet werden, weil schon $2^{24} = 16777216$ als praktisch unendlich gross gelten dürfe. Nicht minder willkürlich ist ein anderer von Cramer in dem an Niclaus I Bernoulli gerichteten Briefe gemachter Vorschlag, die Freude, welche man an dem Besitze einer Summe habe, und die er *la valeur morale des biens*, ihren moralischen Werth nennt, ihrer Quadratwurzel proportional zu setzen.

George Louis Leclerc Graf von Buffon[1]) (1707—1788) hat nur nebensächlich seinen reichen Geist auf mathematische Dinge gerichtet, dabei aber den Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen ein ganz neues Gebiet eröffnet, das vorher nie beachtet worden war, das geometrische. Ein kurzgefasster aber sehr klarer Bericht[2]) aus dem Jahre 1733 lässt Buffon's Gedanken erkennen. Soll (Fig. 102) eine kreisrunde Scheibe vom Durchmesser d auf ein in quadratische Felder von der Quadratseite a eingetheiltes Brett derart geworfen werden, dass sie genau in ein Feld zu liegen komme, ohne über den Rand desselben hinauszureichen, so kann dieses nur dann erzielt werden, wenn der Mittelpunkt der Wurfscheibe innerhalb des kleineren inneren Quadrates oder auf dessen Umrandung zu liegen kommt, wobei die Seitenlänge des


Fig. 102.

[1]) Poggendorff I, 338. [2]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1733. *Histoire* pag. 43—45.

inneren Quadrates $a - d$ ist. Das Feld a^2 zerfällt durch diese Unterscheidung in zwei Abtheilungen, in das innere Quadrat $a^2 - 2ad + d^2$ und die umgebende Figur $2ad - d^2$. Soll gleich wahrscheinlich sein, dass der Mittelpunkt der Wurfscheibe in die eine oder in die andere Abtheilung falle, so müssen deren Flächen gleich sein, d. h. $a^2 - 2ad + d^2 = 2ad - d^2$, $a = 2d + d\sqrt{2}$, $\frac{a}{d} = 2 + \sqrt{2} = 3.4142136 \cdots$ oder die Quadratseite muss zwischen 6 und 7mal so gross als der Halbmesser der Wurfscheibe sein. Dieser einfachsten Aufgabe stehen verwickeltere zur Seite. Zu diesen gehört es schon, wenn das Wurfstück nicht kreisrund sondern quadratisch ist, weil es dann Stellen giebt, die der Mittelpunkt des Wurfstückes einnehmen darf, wenn die Seiten des Wurfstückes denen des Feldes parallel zu liegen kommen, und bei schrägem Auffallen nicht einnehmen darf. Noch verwickelter ist das sogenannte Nadelproblem, bei welchem das Wurfstück als Länge ohne Breite gedacht ist. Buffon, so erzählt der Bericht, welchem wir folgen, habe die Frage, bei welchen Abmessungen der Felder und der Nadel man mit gleicher Wahrscheinlichkeit erwarten könne, dass die Nadel auf ein einziges Feld zu liegen komme oder nicht, mittels der Quadratur einer Cycloide beantwortet. Buffon's Arbeit selbst erschien erst 1777.

Abermals ein neuer Gedanke von weittragender Bedeutung war es, mit welchem Daniel Bernoulli 1734 an die Oeffentlichkeit trat[1]). Die Pariser Akademie hatte eine Preisfrage gestellt, in welcher eine Erklärung der verschiedenen Neigungen der Ebenen, in welchen die Planetenbahnen verlaufen, verlangt war, und Bernoulli begann seine Abhandlung, durch die er die Hälfte des Preises erwarb, mit Untersuchung der Frage, ob jene Verschiedenheit der Neigungen auf eine bestimmte Ursache zurückzuführen sei. Hier war also zum ersten Male die Grösse der Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine gewisse Reihe von Thatsachen eine gesetzliche sei, als Gegenstand der Erforschung gewählt.

Wir haben uns nun abermals zu De Moivre zu wenden, dessen *Doctrine of chances* 1738 in zweiter Auflage erschien (S. 342). Sie hatte sich gegen die erste Auflage bedeutend vermehrt. Wahrscheinlichkeitsfragen, welche sich auf verschiedene Spiele, wie z. B. auf Whist und Piquet, bezogen, waren in weit grösserer Anzahl als früher vorhanden. Wir begnügen uns mit der Angabe zweier Zusätze.

---

[1]) *Recueil des pièces qui ont remportée le prix à l'Académie des sciences.* T. III (1734). — Gouraud, *Histoire du calcul des probabilités* (Paris 1848) pag. 50. — Todhunter l. c. p 222–223.

A und *B* spielen[1]) um einen Einsatz *s*; *A* hat zwei Möglichkeiten zu gewinnen, *B* nur eine, in einem vierten Falle zieht jeder der beiden Spieler seinen Einsatz zurück. Wie gross ist der Vortheil des Spielers *A*? Da vier Möglichkeiten vorhanden sind, so ist *A* im Vortheil mit $\frac{2s}{4} - \frac{s}{4} = \frac{s}{4}$, und *B* ist mit ebensoviel im Nachtheil. Hätte man den Fall, der das Spiel nichtig macht, nicht berücksichtigt, so wären nur drei Möglichkeiten vorhanden gewesen, und der Vortheil von *A*, beziehungsweise der Nachtheil von *B*, hätte sich auf $\frac{2s}{3} - \frac{s}{3} = \frac{s}{3}$ belaufen. De Moivre sagt ausdrücklich, er habe die an sich sehr leichte Aufgabe aufgenommen, um dem Leser bemerklich zu machen, dass keine Bedingung einer Aufgabe, so unbedeutend sie auf den ersten Blick scheinen könnte, unberücksichtigt bleiben dürfe.

Der zweite Zusatz[2]) stellt sich dar als eine Erweiterung der schon von Fermat auf mehr als zwei Spieler ausgedehnte Frage nach der Theilung vor eingetretener Entscheidung (Bd. II, S. 691) auf den Fall beliebig vieler Spieler, deren Geschicklichkeiten durch entsprechende Maasszahlen ausgedrückt sind, und bei deren Jedem die Anzahl der Gewinnspiele bekannt ist, die ihm zum endgiltigen Siege noch fehlen. De Moivre lehrt hier ein Verfahren, welches auf der Bildung von Combinationsformen zu allen möglichen Klassen bis zu der der Anzahl der Spieler gleichen und darauf folgender Weglassung einzelner dieser Formen beruht.

Als eine Abkürzung von De Moivre's Werk lässt sich *The Nature and Laws of Chance* von Thomas Simpson (1740) betrachten[3]). Fast alle darin enthaltenen Aufgaben sind von De Moivre entlehnt und nach ähnlichen Methoden wie die, deren er sich bediente, behandelt. Nur an wenigen Stellen ist Originelles zu bemerken, und davon sei ein Beispiel gegeben. Wir wissen (S. 324—325), dass Arbuthnot 1692 eine Uebersetzung von Huygens' Abhandlung über Wahrscheinlichkeitsrechnung mit geringen Zusätzen veröffentlichte. Einer dieser Zusätze stellte die Aufgabe[4]), deren Lösung Liebhabern überlassen blieb, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein geworfener parallelepipedischer Körper von den Seiten *a*, *b*, *c* so falle, dass eine bestimmte Fläche, z. B. die von den Seiten *a* und *b* gebildete, oben zu liegen komme. Simpson war der erste, der eine Auflösung veröffentlichte, und zwar folgende[5]). Er beschreibt eine Kugel um den

---

[1]) De Moivre, *Doctrine of chances*, 2. edition, pag. 159—161. [2]) Ebenda pag. 191—192. [3]) So lautet wenigstens Todhunter's Urtheil l. c. pag. 206. Wir selbst kennen Simpson's Schrift nicht. [4]) Todhunter l. c. pag. 53. [5]) Ebenda pag. 209—210.

genannten Körper und lässt den Halbmesser der Kugel eine Bewegung vollziehen, bei welcher er längs des Umfangs der bestimmten Ebene hingleitet und auf der Kugeloberfläche eine Figur hervortreten lässt, deren Fläche untersucht wird. Ihr Verhältniss zur ganzen Kugeloberfläche ist die Wahrscheinlichkeit für das Obenliegen der betreffenden Ebene. Die Aehnlichkeit des Gedankens mit dem von Buffon (S. 612), das Verhältniss von Flächenstücken als Wahrscheinlichkeitsmaass zu benutzen, liegt auf der Hand. Wir wollen damit allerdings keineswegs behaupten, Simpson müsse Buffon's Arbeit gekannt haben.

Johann Bernoulli's 1742 erschienene Gesammtwerke enthalten einen nur kurzen Beitrag zur Wahrscheinlichkeitslehre[1]). Die letzte auf die Ausübung des Wahlrechts bezügliche Aufgabe könnte die Aufmerksamkeit einigermassen fesseln, wenn ihr Sinn nur deutlicher wäre. Es scheint fast, als nehme Bernoulli an, alle Wähler, deren Anzahl durch 3 theilbar sein solle, würden durch das Loos in Dreiergruppen eingetheilt, und die Wahl eines gewissen Candidaten, für welchen die Wähler A und B sich bereits ausgesprochen haben, sei gesichert, wenn diese beiden A und B der gleichen Gruppe angehören. Wir wollen indessen nicht als zweifellos hinstellen, dass wir Bernoulli's Meinung richtig verstanden haben.

Schon dem vorhergehenden Jahre 1741 gehört ein Werk an, welches, ohne der mathematischen Wahrscheinlichkeitslehre gewidmet zu sein, doch wohl hier genannt werden muss. Johann Peter Süssmilch[2]) (1707—1767) hat abwechselnd Medicin, Theologie, Mathematik studirt, hat als Hauslehrer, als Feldprediger, als Geistlicher einer kleinen Ortschaft, zuletzt als Consistorialrath in Berlin gewirkt. Sein Hauptwerk von 1741 führt den Titel: *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung derselben erwiesen.* Die Vorrede schrieb er „auf dem Marsche zu Schweidnitz", also im Getümmel des Kriegslebens. Die göttliche Ordnung wurde 1761 zum zweiten, 1765 zum dritten Male aufgelegt. Eine vierte Auflage besorgte nach Süssmilch's Tode dessen Schwiegersohn Baumann 1775. Seit der zweiten durchaus umgearbeiteten Auflage ist die göttliche Ordnung ein für Gelehrte aller Länder unentbehrliches Musterwerk geworden, welchem zahlreiche Nachahmungen folgten, eine statistische Socialwissenschaft begründend. Aber auch schon die erste Auf-

---

[1]) Joh. Bernoulli *Opera* IV, 28—33. [2]) Allgemeine deutsche Biographie XXXVII, 188—195. Artikel von V. John. — Ludwig Moser, Die Gesetze der Lebensdauer (Berlin 1839), Vorrede S. V—VII.

lage fand in Deutschland und Holland, in England und in der Schweiz, in Dänemark und Schweden laute Anerkennung. Was Halley (S. 46), was Graunt und Arbuthnot (S. 324), was andere Schriftsteller zumeist in England an einzelnen Tabellen sich verschafft und herausgegeben hatten, war hier vereinigt und vermehrt. Das 7. Kapitel der ersten Auflage führt beispielsweise bereits die Ueberschrift: „Von denen Krankheiten und ihrem Verhältniss". Als sodann eine heftige Seuche 1757 viele Menschen dahinraffte, widmete Süssmilch ihr eine besondere Schrift: *Gedanken von den epidemischen Krankheiten und dem grösseren Sterben des 1757sten Jahres*, deren Inhalt wieder in die späteren Auflagen der göttlichen Ordnung eindrang. Süssmilch hatte sich die Aufgabe nicht so gestellt, wie seine Vorgänger und manche seiner Nachfolger sie stellten. Es kam ihm nicht darauf an, der Berechnung von Leibrenten eine feste Grundlage zu geben, er wollte, was der von ihm gewählte Titel deutlich ausspricht. Der göttlichen Ordnung auf die Spur kommen war seine Absicht, sie zu erkennen, welche die Lebensverhältnisse des Menschengeschlechtes regelt, mochte der tägliche Verkehr von den gefundenen Gesetzen Anwendung machen können oder nicht.

Wir sprachen von Nachfolgern Süssmilch's. Der Holländer Wilhelm Kerseboom[1] (1691—1771) kann kaum als solcher bezeichnet werden, denn wenn auch seine bedeutendsten Schriften über die Schätzung der Bevölkerung eines Landes erst 1742 und noch später, also nach der Göttlichen Ordnung erschienen, so reicht seine erste durchaus unabhängig entstandene Veröffentlichung aufwärts bis 1737. Dagegen ist der Franzose Antoine Deparcieux[2] (1703 bis 1768) hier zu nennen mit seinem *Essai sur les probabilités de la vie humaine* von 1746. Ein wesentliches Verdienst dieser Schrift ist die Einführung des Begriffes der mittleren Lebensdauer eines Neugeborenen, als welche Deparcieux den Bruch $\frac{a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \cdots}{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots}$ benennt, in welchem $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ die Anzahl der gleichzeitig Geborenen angiebt, von welchen a_0 im Verlaufe des ersten, a_1 im Verlaufe des zweiten, a_2 und a_3 im Verlaufe des dritten, des vierten Lebensjahres sterben u. s. w.

Maclaurin scheint mit seinen in den letzten Jahren seines Lebens sich äussernden Bestrebungen, eine Wittwenversorgungsanstalt zu begründen, hierher zu gehören. Wenigstens erschienen dahin

[1]) *Nouvelle Biographie universelle* XXVII, 637—639. Statt der dort gebrauchten Schreibweise Kersseboom benutzen wir die mit nur einem s, welche die weitaus häufigere ist. [2]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1768. *Histoire* pag. 155—166. — Moser l. c. S. 66.

zielende Rechnungen von ihm 1748 nach seinem Tode im Druck[1]). Auch Euler hat Arbeiten über Wahrscheinlichkeitsrechnung verfasst, von denen wir aber nur die erste aus dem Jahre 1751 kurz erwähnen dürfen. Sie behandelt[2]) das schon von früheren Schriftstellern erörterte Spiel, bei welchem es darauf ankommt, dass bei gleichzeitigem, von einander unabhängigem Ziehen von Karten aus zwei ursprünglich vollständigen Kartenspielen von beiden Spielern die gleich bezeichnete Karte umgeschlagen werde.

D'Alembert musste in verschiedenen Bänden der Encyclopädie zu Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen sich herbeilassen. Der 1754 gedruckte Band enthielt einen Artikel *Croix ou pile*. Das ist das Spiel, welches englisch *Head or Tail*, deutsch *Bild oder Schrift* genannt wird. Man wettet, ob eine in die Höhe geworfene Münze beim Niederfallen die eine oder die andere Seite nach oben kehren werde. D'Alembert griff in diesem Artikel die gewöhnliche Abschätzung der Wahrscheinlichkeit an. Frage man nach der Wahrscheinlichkeit in zwei Würfen Bild zu erzielen, so gäben alle Schriftsteller die gleiche Antwort. Sie sagten: von den vier Combinationen der beiden Würfe (Bild Bild, Bild Schrift, Schrift Bild, Schrift Schrift) bringe nur die letzte dem Spieler Verlust, der in den drei ersten Fällen gewinne, also sei 3 gegen 1 für ihn zu wetten. Sei diese Ueberlegung richtig? D'Alembert zweifelt daran. Wenn im ersten Wurfe schon Bild falle, so sei damit das Spiel beendigt, und ein zweiter Wurf erfolge nicht. Also gebe es nur drei Combinationen (Bild, Schrift Bild, Schrift Schrift), von denen die letzte allein Verlust bringe, und man habe 2 gegen 1 zu wetten. Derjenige Band der Encyclopädie, welcher dann 1757 die Presse verliess, enthielt den Artikel *Gageure*, Wette. Hier kam D'Alembert auf die Frage zurück, um einige, wie er selbst sagt, sehr gute Einwendungen gegen die von ihm erhobenen Zweifel mitzutheilen, welche Necker, Professor der Mathematik in Genf, ihm brieflich gemacht habe. Necker leugnete die Berechtigung, die Möglichkeit Bild den beiden anderen, Schrift Bild und Schrift Schrift, als gleichartig zur Seite zu stellen, und D'Alembert giebt zu, dass dieser Einwand beachtenswerth erscheine, ohne sich allerdings als nunmehr von der Richtigkeit der gewöhnlichen Schlüsse überzeugt zu bekennen.

In dem Artikel *Croix ou pile* ist als zweiter Gegenstand des Zweifels die Petersburger Aufgabe erwähnt. Ob Daniel Bernoulli's Auseinandersetzung genügend befunden werden könne, wisse er nicht,

---

[1]) Gouraud l. c. pag. 70—71. [2]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1751, pag. 255—270.

sagt D'Alembert. Es liege da ein Aergerniss vor, welches wohl verdiene, die Algebraiker zu beschäftigen[1]). Am wenigsten Sorge macht ihm die unendlich hohe Erwartung dessen, dem ein in geometrischer Progression wachsender um so grösserer Gewinn zufällt, je später der ihm denselben verschaffende Wurf gelingt. Seine Erwartung müsse der Furcht des anderen Spielers, dem unendlicher Verlust drohe, entsprechen. Jeder andere Spieler würde aber durch den Vorschlag eines Spieles, in welchem er in einem Augenblicke unermessliche Summen verlieren könnte, nur beweisen, dass er ein Narr ist, und um mit einem Narren gleichauf zu spielen, muss man nicht minder närrisch sein als er.

Die letzte Veröffentlichung, welche in diesem Kapitel zu nennen ist, hat Thomas Simpson in den P. T. von 1755 zum Drucke gegeben. Es ist ein Brief über den Nutzen, welcher der praktischen Astronomie daraus erwächst, wenn man einen Mittelwerth verschiedener Beobachtungen in Betracht zieht[2]). Dass es überhaupt vortheilhafter sei, zahlreiche Beobachtungen zu vereinigen, als sich auf eine einzelne mit genügender Sorgfalt ausgeführte Beobachtung zu beschränken, galt damals keineswegs als ausgemacht, und Simpson erzählt in den einleitenden Sätzen, es gebe namhafte Persönlichkeiten, welche der entgegengesetzten Ansicht huldigten. Behufs mathematischer Untersuchung, fährt Simpson fort, müsse man irgend eine Voraussetzung über die Grösse der Beobachtungsfehler und über die Häufigkeit ihres Vorkommens sich gestatten. Man könne beispielsweise die Fehler $-v, \cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots v$ annehmen und die Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens durch $r^{-v}, \cdots r^{-3}, r^{-2}, r^{-1}, r^0, r^1, r^2, r^3, \cdots r^v$ ausdrücken, eine Annahme, welche bei $r=1$ darauf hinauslaufe, dass jeder irgend mögliche Fehler die gleiche Wahrscheinlichkeit besitze. Eine zweite Annahme wäre etwa die, dass die Wahrscheinlichkeiten der genannten Beobachtungsfehler sich als $r^{-v}, 2r^{1-v}, \cdots vr^{-1}, (v+1)r^0, vr^1, \cdots 2r^{v-1}, r^v$ darstellen, was vielleicht der Wahrheit näher käme, weil bei dieser Voraussetzung, sofern $r=1$ wäre, immerhin so viel sich ergäbe, dass die Fehler je gröber um so seltener auftreten. Die Summe der hier angegebenen Glieder enthält in der ersten und entsprechender in der zweiten Voraussetzung alle Möglichkeiten, welche dem Beobachter sich bieten, und, wenn sie auf die n^{te} Potenz erhoben wird, alle Möglichkeiten, welche bei n-maliger Beobachtung auftreten. Eine gewisse Anzahl von Gliedern dieser entwickelten n^{ten} Potenz dividirt

---

[1]) *Il y a ici quelque scandale qui mérite bien d'occuper les algébristes.*
[2]) P. T. XLIX, 82—93.

durch ihre Gesammtheit, bezeichnet Simpson als die Wahrscheinlichkeit, dass der mittlere Fehler von t Beobachtungen eine gewisse Grösse nicht überschreite, und eine an einem bestimmten Beispiele angestellte Zahlenrechnung giebt zu erkennen, dass bei sich häufenden Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, das arithmetische Mittel der Beobachtungen mit einem irgend erheblichen Fehler behaftet zu sehen, überaus rasch abnimmt. Das war der erste Schritt über Cotes' Gedanken, Beobachtungsfehler mit Gewichten zu vergleichen (S. 398), hinaus, und wieder war eine neue Gattung von Untersuchungen den Liebhabern der Wahrscheinlichkeitsrechnung erschlossen.

109. Kapitel.

Reihen bis 1736.

Die Geschichte der Lehre von den Reihen, zu welcher wir gelangen, zeigt eine stattliche Entwicklung, so weit es sich um die Beschaffung immer neuen Reihenmaterials handelt, aber über die Benutzbarkeit der gebildeten unendlichen Reihen herrschen fast ausnahmslos Meinungen, welche eher einen Rückschritt gegen das im 97. Kapitel Berichtete, als einen Fortschritt darstellen.

Dort wäre freilich auch der Ort gewesen, wo wir einen Aufsatz Goldbach's *Specimen methodi ad summas serierum* von 1718 hätten nennen sollen. Goldbach[1]) hielt sich damals in Schweden auf und verkehrte viel mit dem dortigen Mathematiker Anders Gabriel Duhre[2]). Dieser hat nach aller Wahrscheinlichkeit den Aufsatz, der von ziemlich geringer Bedeutung ist, an die Redaction der A. E. nach Leipzig geschickt, und dort kam er zum Abdrucke[3]). Kaum höheren Werth besitzt eine Abhandlung Goldbach's von 1727, *De transformatione serierum*[4]). Eine Reihe B kann, wie Goldbach erörtert, sehr wohl den gleichen Werth wie eine Reihe C besitzen, und aus $B = C$ folgt $B - C = 0$, $A \pm (B - C) = A$, d. h. die Reihe A wird ohne Werthveränderung umgeformt, wenn man zu ihr gliedweise B addirt und C subtrahirt, oder C addirt und B subtrahirt. Eine andere Umformung ist die folgende. Seien $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ beliebige der Null näher und näher kommende Grössen, so ist unzweifelhaft $D = 1 + \alpha - \alpha + \beta - \beta + \gamma - \gamma + \cdots = 1$. Nimmt man nun

[1]) Eneström, *Bibliotheca mathematica* 1884, pag. 15—16 und 1887, pag. 23—24. [2]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 184. [3]) A. E. 1720, pag. 27—31. [4]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1727, T. II, 30—34. Einige sinnentstellende Druckfehler sind in unserem Berichte verbessert.

eine unendliche Reihe $A = a + b + c + \cdots$ und vervielfacht sie gliedweise mit D, so bleibt der Werth von A unverändert, während die Form eine andere wurde, d. h. die Summe einer formell neuen Reihe ist gefunden. Die neue Gestalt ergiebt sich als:

$$[(a+b)+(c+d)+(e+f)+(g+h)+\cdots]\cdot[1+\alpha-\alpha+\beta-\beta+\gamma-\gamma+\cdots] =$$
$$\begin{array}{lllll}
(a+b) & +(c+d) & +(e+f) & +(g+h) & +\cdots \\
+a\alpha & +(c-a)\alpha & +(e-c)\alpha & +(g-e)\alpha & +\cdots \\
 & +a\beta & +(c-a)\beta & +(e-c)\beta & +\cdots \\
 & & +a\gamma & +(c-a)\gamma & +\cdots \\
 & & & +a\delta & +\cdots \\
 & & & & +\cdots .
\end{array}$$

In einem Beispiele zu dieser allgemein und ohne jegliches Bedenken angegebenen Umformung setzt Goldbach $\alpha = \frac{m^2+m-1}{m+2}$, $\beta = \frac{\alpha}{m+2} = \frac{m^2+m-1}{(m+2)^2}$, $\gamma = \frac{\beta}{m+2} = \frac{m^2+m-1}{(m+2)^3}$ u. s. w., $a = 1$, $b = -m$, $c = m^2$, $d = -m^3$ u. s. w. Er wählt also $A = 1 - m + m^2 - m^3 + \cdots$. Bildet man die einzelnen Kolumnen der neuen Reihe, so erkennt man sofort $(a+b) + a\alpha = \frac{1}{m+2}$, $(c+d) + (c-a)\alpha + a\beta = \frac{1}{(m+2)^2}$ u. s. w. Die umgeformte Reihe heisst also $A = \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \frac{1}{(m+2)^3} + \cdots$. Die erste Form von A entspricht der Reihenentwicklung von $\frac{1}{1+m}$, die zweite der von $\frac{1}{(m+2)-1} = \frac{1}{m+1}$. Heute würde man hinzusetzen müssen, die erste Reihe convergire bei $-1 < m < 1$, die zweite bei $m > -1$, mithin auch in dem Convergenzbereiche der ersten Reihe, innerhalb dessen also eine wirkliche Gleichung zwischen beiden unendlichen Reihen stattfindet. Goldbach hat nur eine leise Ahnung von der Nothwendigkeit einer etwaigen Einengung des Gleichheitsbegriffes, welche aber durch eine Schlussbemerkung bei Seite geschoben wird. Ich weiss wohl, sagt er, dass die Meisten behaupten, die erste Reihe A entstehe durch fortgesetzte Division aus $\frac{1}{1+m}$, sei aber diesem Werthe nicht gleich, wenn $m > 1$; aber wenn auch diese Art, endliche Grössen durch unendliche Reihen auszudrücken, etwas Ungewohntes hat, so sehe ich doch nicht ein, warum sie überhaupt zu verwerfen sein soll, da doch das eben angeführte Beispiel zeigt, dass man solche Reihen in andere verwandeln kann, deren Glieder fortwährend abnehmen.

Seit 1720 war der von De Moivre eingeführte Begriff und Name der recurrenten Reihe (S. 375) vorhanden. Ohne von diesen und verwandten Untersuchungen zu wissen, beschäftigte sich

Daniel Bernoulli mit dem gleichen Gegenstande, den er allerdings zeitweilig bei Seite legte, als er erfuhr, dass ihm zuvorgekommen sei. Bald griff er ihn wieder auf, und die Frucht dieser Untersuchungen waren *Observationes de seriebus recurrentibus*[1] vom September 1728, deren Hauptinhalt die (S. 548) angekündigte Anwendung recurrenter Reihen auf Gleichungsauflösungen ausmacht. Einen Beweis oder eine eigentliche Herleitung des Verfahrens giebt Bernoulli nicht. Diesen Mangel ergänzte Euler in seiner Introductio, und wir werden daher im 111. Kapitel bei unserer Berichterstattung über letzteres Werk auf den Gegenstand zurückzukommen haben. Das Verfahren selbst ist folgendes.

Man bringt die aufzulösende Gleichung in die Gestalt $1 = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 + \cdots$, wo rechts etwa x^ν mit ν als ganzer positiver Zahl die höchste Potenz von x sein mag, beispielsweise sei $\nu = 4$. Man wählt nun vier (d. h. eigentlich ν) willkürliche Zahlen A, B, C, D und setzt eine fünfte $E = aD + bC + cB + eA$. Die genau gleiche Recursionsformel $F = aE + bD + cC + eB$ lässt eine sechste Zahl F finden u. s. w. Setzt man das Verfahren der Auffindung immer neuer Zahlen mittels der gewählten Recursionsformel bis zu zwei beliebig weit vom Anfang entfernten, unmittelbar auf einander folgenden Zahlen M und N fort, so ist $x = \frac{M}{N}$ ein Näherungswerth einer Gleichungswurzel. Sei z. B. $1 = -2x + 5x^2 - 4x^3 + x^4$ die vorgelegte Gleichung. Man wählt etwa $A = B = C = D = 1$. Man findet

$$\begin{aligned}
E &= -2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0\\
F &= -2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2\\
G &= -2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -7\\
H &= -2 \cdot -7 + 5 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 25\\
I &= -2 \cdot 25 + 5 \cdot -7 - 4 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = -93\\
K &= -2 \cdot -93 + 5 \cdot 25 - 4 \cdot -7 + 1 \cdot 2 = 341\\
L &= -2 \cdot 341 + 5 \cdot -93 - 4 \cdot 25 + 1 \cdot -7 = -1254.
\end{aligned}$$

Näherungswerthe einer Gleichungswurzel sind $\frac{0}{2}$, $-\frac{2}{7}$, $\frac{7}{25}$, $-\frac{25}{93}$, $-\frac{93}{341}$, $-\frac{341}{1254}$, welcher letztere Werth schon ziemlich genau ist, da er zu $1 = \frac{2471540310459}{2472806570256} = 0{,}999487 \cdots$ führt. Bernoulli erkennt an, dass sein Verfahren die Voraussetzung einschliesse, dass die Brüche $\frac{E}{F}$, $\frac{F}{G}$, $\frac{G}{H}$, $\cdots \frac{M}{N}$ einer gemeinsamen Grenze zustreben, was nicht immer der Fall sei, dann z. B. nicht, wenn die Gleichung

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1728. T. III, 85—100.

zwei dem Zahlenwerthe nach gleiche Wurzeln von verschiedenem Vorzeichen, oder auch wenn sie complexe Wurzeln besitze. In solchen Ausnahmefällen habe man $x = y \pm \alpha$ einzusetzen, und die Gleichung in y enthülle die Wurzel unter Anwendung des vorgeschilderten Verfahrens.

Auch Goldbach hat sich in dem gleichen Bande der Veröffentlichungen der Petersburger Akademie[1]) mit recurrenten Reihen und der Form ihres allgemeinen Gliedes beschäftigt.

Wichtiger ist, was De Moivre in seinen *Miscellanea analytica* von 1730 über den Gegenstand veröffentlichte. Als Definition der recurrenten Reihe[2]) gilt die Bedingung, dass eine gewisse Anzahl von Anfangsgliedern willkürlich angenommen werde, von welchen alsdann das nächstfolgende Reihenglied in einer gegebenen Weise abhängen muss, und dass die gleiche Beziehung jedes folgenden Gliedes zu derselben Anzahl vorhergehender Glieder andauere. Sei z. B. in $A + B + C + D + E + F + \cdots$, nachdem A, B, C willkürlich angenommen (etwa $A = 1$, $B = 2x$, $C = 3x^2$), der Zusammenhang $D = 3Cx - 2Bx^2 + 5Ax^3 = 10x^3$, ebenso $E = 3Dx - 2Cx^2 + 5Bx^3 = 34x^4$, $F = 3Ex - 2Dx^2 + 5Cx^3 = 97x^5$ u. s. w., so ist die so gebildete Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + 10x^3 + 34x^4 + 97x^5 + \cdots$$

eine recurrente und $$3x - 2x^2 + 5x^3$$

oder kürzer: $3 - 2 + 5$ heisst der Index oder die Scala der Beziehung. Der 1. Lehrsatz[3]) kennzeichnet die geometrische Reihe, in welcher jedes folgende Glied das m-fache der vorhergehenden ist, auch als recurrente Reihe mit Abhängigkeit jedes Gliedes von den beiden ihm vorhergehenden. Ist nämlich $C = mB$, $B = mA$ oder $B - mA = 0$, beziehungsweise $pB - mpA = 0$, so kann man letzteren Ausdruck auch der rechten Gleichungsseite von $C = mB$ hinzufügen und erhält $C = (m + p)B - mpA$, wobei p zu beliebiger Auswahl freisteht. Eine zweite geometrische Reihe $H + K + L + \cdots$ mit $K = pH$, $L = pK$ u. s. w. liefert ähnlicherweise $L = (m + p)K - mpH$, und durch Addition zu der für C erhaltenen Gleichung entsteht[4]) $C + L = (m + p)(B + K) - mp(A + H)$. Die Werthe $m + p$ und $-mp$, welche die Scala der geometrischen Reihe darstellen, sind aus $(x - m)(x - p) = x^2 - (m + p)x + mp$ zu entnehmen[5]), d. h. sie sind gefunden, wenn man aus diesem Producte das Glied x^2 weglässt und die beiden anderen Glieder durch $-x$ und -1 dividirt. Die geometrische Reihe lässt sich ferner auch als

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1728. T. III, 164—173. [2]) De Moivre, *Miscellanea analytica* pag. 27. [3]) Ebenda pag. 27, Theorema 1. [4]) Ebenda pag. 27, Corollarium 1. [5]) Ebenda pag. 27, Corollarium 2.

recurrente Reihe mit dreigliedriger Scala auffassen[1] u. s. w. Aus dem oben gefundenen $C = (m + p)B - mpA$ braucht man nur zu folgern $qC = mqB + pqB - mpqA$ und $qC - mqB - pqB + mpqA = 0$ und dieses mit $D = (m + p)C - mpB$ zu verbinden. Man hat alsdann $D = (m + p + q)C - (mp + mq + pq)B + mpqA$ mit willkürlichen p und q. Im Fortgange der Erörterungen zeigt De Moivre, dass jeder Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine ganze Function ist, sich in eine recurrente Reihe entwickelt und kommt damit weiter auf Partialbruchzerlegungen.

Die im IV. Buche der Miscellanea analytica gelehrte Summirung recurrenter Reihen geht von den folgenden, den Fall einer zweigliedrigen Scala voraussetzenden Erwägungen aus. Sei $P + Q + R + S + T + \cdots$ eine derartige Reihe mit der Summe z, so ist einerseits $P + Q + R + \cdots = z$, beziehungsweise $Q + R + \cdots = z - P$ und andererseits vermöge der stattfindenden Scala:

$$\begin{aligned} P &= P \\ Q &= Q \\ R &= fxQ - gx^2P \\ S &= fxR - gx^2Q \\ T &= fxS - gx^2R \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Addition aller dieser Gleichungen bringt

$$z = P + Q + fx(z - P) - gx^2z$$

hervor, woraus $z = \frac{P + Q - fxP}{1 - fx + gx^2}$ folgt, oder unter der Annahme $P = a$, $Q = bx$ endlich $z = \frac{a + bx - fax}{1 - fx + gx^2}$. Dass die ganze Rechnung nur dann einen Sinn hat, wenn die Reihe eine unendliche und zugleich convergent ist, weil nur dann die rechts stehenden $Q + R + S + \cdots$ und $P + Q + R + \cdots$ ebenso $z - P$ und z zur Grenze haben, wie das links stehende $P + Q + R + S + T + \cdots$ sich als z summirt, bildet für De Moivre keine Schwierigkeit.

Noch Einiges aus dem in der That mannigfachen Inhalte der Miscellanea analytica fordert unseren Bericht. Im 3. Kapitel des V. Buches hat De Moivre eine Aufgabe behandelt[2], welche schon von Jacob Bernoulli in der *Ars conjectandi* gestreift worden war, die Aufgabe, das Glied grössten Zahlenwerthes in der n als ganze positive Zahl voraussetzenden Binomialentwicklung $(a + b)^n$ ausfindig zu machen. Einige Druckfehler stören beim Lesen, nach deren Ver-

---

[1] De Moivre, *Miscellanea analytica* pag. 27, Theorema 2. [2] Ebenda pag. 107—108.

besserung De Moivre's Gedankengang folgender ist. Sei etwa $M = \frac{n(n-1)\cdots(n-l+2)}{1\cdot 2\cdots(l-1)} a^{n-l+1} b^{l-1}$ das grösste Glied. Die beiden Nachbarglieder links und rechts sind $\frac{n(n-1)\cdots(n-l+3)}{1\cdot 2\cdots(l-2)} a^{n-l+2} b^{l-2}$ $= \frac{l-1}{n-l+2} \frac{a}{b} M$ und $\frac{n(n-1)\cdots(n-l+1)}{1\cdot 2\cdots l} a^{n-l} b^{l} = \frac{n-l+1}{l} \frac{b}{a} M$. Da M grösser als jedes von beiden sein soll, so muss $1 > \frac{l-1}{n-l+2} \frac{a}{b}$ und $1 > \frac{n-l+1}{l} \frac{b}{a}$ sein, oder $\frac{bn+2b+a}{b+a} > l > \frac{bn+b}{b+a}$. Sind die beiden um die Einheit verschiedenen Grenzwerthe Brüche, so ist l die zwischen beiden liegende ganze Zahl; sind die beiden Grenzwerthe ganze Zahlen, so giebt es überhaupt kein Glied M grössten Werthes, sondern zwei gleich grosse, in der Entwicklung unmittelbar auf einander folgende Glieder.

Gleich auf der ersten Seite der Miscellanea analytica steht der Satz[1]), der den Namen De Moivre's vorzugsweise berühmt machen sollte. Wenn l und x, sagt De Moivre, die Cosinusse zweier mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbögen A und B sind und $A = nB$, dann ist $x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}}}$. Der Sinn wird durch andere Schreibweise deutlicher werden. Da $l = \cos A$, so ist $l^2 - 1$ $\cos A^2 - 1 = -\sin A^2$ und $l + \sqrt{l^2 - 1} = \cos A + \sin A \sqrt{-1}$ $= \cos nB + i \sin nB$. Andererseits ist $x = \cos B$, und die Formel lautet:

$$\cos B = \frac{1}{2}(\cos nB + \sqrt{-1}\sin nB)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(\cos nB + \sqrt{-1}\sin nB)^{-\frac{1}{n}}.$$

Man sieht, sie ist auch in dieser dem heutigen Brauche angepassten Schreibart nicht ganz übereinstimmend mit dem sogenannten Moivreschen Binomialtheoreme

$$\cos B + \sqrt{-1}\sin B = (\cos nB + \sqrt{-1}\sin nB)^{\frac{1}{n}},$$

aber letzteres hängt doch eng mit ersterer zusammen.

Den Miscellanea analytica ist ein *Complementum* angehängt, in welchem De Moivre beiläufig auch einen Fortschritt in der Lehre von den Bernoullischen Zahlen (S. 332—333) vollzog[2]). Jacob Bernoulli hatte für die Summe der c^{ten} Potenzen aller ganzen Zahlen von 1 bis n die Formel gefunden:

---

[1]) De Moivre, *Miscellanea analytica* pag. 1. [2]) Ebenda. Complementum pag. 6 sqq.

$$Sn^c = \frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5} + \cdots.$$

De Moivre setzte darin $n = 1$ und erhielt dadurch die erste Recursionsformel zwischen jenen Zahlen:

$$1 = \frac{1}{c+1} + \frac{1}{2} + \frac{c}{2}A + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}B$$
$$+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}C + \cdots.$$

Dem gleichen Jahrgange 1730 wie De Moivre's Miscellanea analytica entstammt ein zweites in England verfasstes und gedrucktes Werk: *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitorum* von James Stirling. So sehr auch Stirling in Newton's Fusstapfen zu treten liebte, an eine geistige Verwandtschaft mit dessen Methodus differentialis (S. 358—362) ist nicht zu denken, und ebensowenig darf die bei Stirling vorkommende Ueberschrift *De aequationibus differentialibus quae definiunt series*[1]) uns veranlassen, dort nach die Reihen definirenden Differentialgleichungen im heutigen Sinne des Wortes zu suchen. Stirling bedient sich folgender Bezeichnung. Seien $T, T', T'' \cdots$ aufeinander folgende Glieder einer Reihe, deren Stellenzeiger $z, z+1, z+2 \cdots$ heissen. Kennt man die Gleichung, welche T' in seiner Abhängigkeit von T und z darstellt, so kennt man auch die Abhängigkeit des Gliedes T'' von T' und $z+1$ und überhaupt die sämmtlichen Reihenglieder, und diese Gleichung nennt Stirling die Differentialgleichung der Reihe. Sie kann auch durch den Zusammenhang zwischen T und z ersetzt werden, und Stirling wählt letzteren vorzugsweise in zwei Gestalten:

$$1.\quad T = A + Bz + Cz(z-1) + Dz(z-1)(z-2)$$
$$+ Ez(z-1)(z-2)(z-3) + \cdots$$

$$2.\quad T = \frac{A}{z} + \frac{B}{z(z+1)} + \frac{C}{z(z+1)(z+2)} + \frac{D}{z(z+1)(z+2)(z+3)}$$
$$+ \frac{E}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \cdots.$$

Auf ähnliche Formen können auch die Folgeglieder $T', T'' \cdots$ zurückgeführt werden. Von der Gleichung 1. aus gelangt man, indem man $(z+1)z(z-1)\cdots(z-m+1) = (z-m+m+1)z(z-1)\cdots(z-m+1) = (m+1)z(z-1)\cdots(z-m+1) + z(z-1)\cdots(z-m)$ setzt, zu

---

[1]) Stirling, *Methodus differentialis* pag. 3.

$$T' = A + B(z+1) + C(z+1)z + D(z+1)z(z-1) + E(z+1)z(z-1)(z-2) + \cdots$$
$$= (A+B) + (B+2C)z + (C+3D)z(z-1) + (D+4E)z(z-1)(z-2) + \cdots.$$

Beim Ausgang von Gleichung 2. hat man $\frac{1}{(z+1)(z+2)\cdots(z+m)} = \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+m-1)} - \frac{m}{z(z+1)\cdots(z+m)}$ zu setzen, um

$$T' = \frac{A}{z} + \frac{B-A}{z(z+1)} + \frac{C-2B}{z(z+1)(z+2)} + \frac{D-3C}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \cdots$$

zu ermitteln. Dass im ersten Falle T auch als Summe $a + bz + cz^2 + \cdots$ dargestellt werden kann, ergiebt sich durch Ausführung der in 1. angedeuteten Multiplicationen. Umgekehrt ist auch die Umwandlung $z^2 = z + z(z-1)$, $z^3 = z + 3z(z-1) + z(z-1)(z-2)$ u. s. w. leicht ersichtlich. Im zweiten Falle kann man wünschen T in $\frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z^3} + \cdots$ umzuwandeln und kann auch dieses erzielen, indem man bei jedem einzelnen Theilausdruck eine Division vornimmt, z. B. $\frac{B}{z(z+1)} = \frac{B}{z^2+z} = \frac{B}{z^2} - \frac{B}{z^3} + \frac{B}{z^4} - \cdots$.

Nun sei S die Summe der mit T abschliessenden z ersten Reihenglieder und S' die der $z-1$ ersten Glieder oder $S' = S - T$, während S' auch dadurch aus S hervorgeht, dass z durch $z-1$ ersetzt wird. Zieht man dann S' von S ab, so bleibt T, das allgemeine Glied der durch S summirten Reihe, übrig. Stirling geht nun freilich nicht auf diesem Wege vor. Er setzt ein gewisses T voraus und behauptet, dass ein gewisses S ihm entspreche. Sein Beweis der behaupteten Thatsache ist dagegen genau so, wie wir andeuteten; er zieht S' von S ab und zeigt, dass T übrig bleibt. Darnach ist keineswegs unmöglich, dass Stirling in dem Beweise seinen Erfindungsgang enthüllt hat. Zu $T = A + Bz + Cz(z-1) + Dz(z-1)(z-2) + \cdots$ gehöre, behauptet Stirling, $S = Az + (z+1)\left[\frac{1}{2}Bz + \frac{1}{3}Cz(z-1) + \frac{1}{4}Dz(z-1)(z-2) + \cdots\right] = Az + \frac{1}{2}B(z+1)z + \frac{1}{3}C(z+1)z(z-1) + \frac{1}{4}D(z+1)z(z-1)(z-2) + \cdots$. Dann ist, fährt er fort, $S' = A(z-1) + \frac{1}{2}Bz(z-1) + \frac{1}{3}Cz(z-1)(z-2) + \frac{1}{4}Dz(z-1)(z-2)(z-3) + \cdots$ und $S - S' = T = A + Bz + Cz(z-1) + Dz(z-1)(z-2) + \cdots$, wie behauptet war. Ein Beispiel ist die Summe der Quadratzahlen $1 + 4 + 9 + \cdots + z^2$. Hier ist $T = z^2 = z + z(z-1)$, mithin $A = 0$, $B = C = 1$ und $S = (z+1)\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z(z-1)\right) = \frac{z(z+1)(z+2)}{6}$.

Andererseits stellt Stirling der zweiten Gestalt angehörende ins Unendliche summirbare Reihen her. Hier bedeute S die vom Gliede T mit dem Stellenzeiger z ins Unendliche sich erstreckende Reihe und $S' = S - T$ oder was S wird, wenn z in $z+1$ übergeht. Er behauptet, zu $T = \frac{A}{z(z+1)} + \frac{B}{z(z+1)(z+2)} + \frac{C}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \cdots$ gehöre $S = \frac{A}{z} + \frac{B}{2z(z+1)} + \frac{C}{3z(z+1)(z+2)} + \cdots$. Wir dürfen den Beweis, der abermals dem Gedanken $S - S' = T$ entspricht, übergehen. Ist $T = \frac{1}{z(z+3)}$, so muss man zur Anwendung der entsprechenden Formel die Umwandlung in $T = \frac{1}{z(z+1)} - \frac{2}{z(z+1)(z+2)} + \frac{2}{z(z+1)(z+2)(z+3)}$ mit $A = 1$, $B = -2$, $C = 2$ vornehmen, alsdann ist $S = \frac{1}{z} - \frac{1}{z(z+1)} + \frac{2}{3z(z+1)(z+2)} = \frac{3z^2+6z-2}{3z(z+1)(z+2)}$, und setzt man $z = 1$, so findet man $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots = \frac{11}{18}$.

Mitunter geht die Umwandlung von T, welche in dem angeführten Beispiele drei Glieder in Anspruch nahm, nur mittels einer unendlichen Anzahl von Gliedern. Alsdann ist auch S mittels einer unendlichen Anzahl von Gliedern gegeben, oder die vorgelegte Reihe ist nicht eigentlich summirt, sondern nur in eine andere unendliche Reihe von meistens rascherer Convergenz umgewandelt. Ein Beispiel bietet die Reihe der reciproken Quadratzahlen mit $T = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1\cdot 2}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \cdots$ und folglich $S = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z(z+1)} + \frac{1\cdot 2}{3z(z+1)(z+2)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4z(z+1)(z+2)(z+3)} + \cdots$. Setzt man $z = 13$, so ist $\frac{1}{13^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2} + \cdots = \frac{1}{13} + \frac{1}{364} + \frac{1}{4095} + \frac{1}{29120} + \cdots$. Nimmt man 13 Glieder dieser neuen Reihe, so ist deren Summe 0,079957427. Daneben sind die 12 Anfangsglieder $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{12^2} = 1{,}564976638$. Die Summe der ganzen unendlichen Reihe[1] ist folglich $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = 1{,}644934065$. Dass dieser Zahlenwert kürzer durch $\frac{\pi^2}{6}$ dargestellt wird, hat Stirling nicht erkannt, auch nicht, wo er später[2] auf die gleiche Reihe zurückkommt. Die zur Auffindung der Gleichung zwischen S und T angewandte Methode führt auch leicht zu einer Gleichung zwischen S und S', beziehungsweise zwischen T und T', und umgekehrt kann

[1] Stirling, *Methodus differentialis* pag. 29. [2] Ebenda pag. 55.

man aus Gleichungen zwischen S und S' oder zwischen T und T' auf den Zusammenhang zwischen S und T schliessen.

Bei Besprechung einer zwischen S und S' aufgestellten Gleichung kommt Stirling[1]) auf den Gedanken, den Stellenzeiger z auch anders als ganzzahlig positiv zu wählen, d. h. also die Reihe zu interpoliren, auch wohl sie nach rückwärts fortzusetzen, und von dem letzteren Verfahren ist ihm $\cdots \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \cdots$ ein Beispiel[2]). In dieser Reihe ist $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots = \frac{1}{x-1}$, und bei $x = 1$ werden beide Abtheilungen unendlich gross, während von deren Werthe bei $x \gtrless 1$ nichts gesagt ist.

Die Lehre von De Moivre's recurrenten Reihen, welche aber bei Stirling durch Division entstandene Reihen heissen, gründet er auf das Gesetz[3]), dass, von welchem Gliede an man die Reihe beginne, ihre Summe stets ein Bruch gleichen Nenners ist, z. B. $\frac{1}{1-3x+x^2} = 1 + 3x + 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \cdots$; $\frac{3x - x^2}{1 - 3x + x^2} = 3x + 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \cdots$; $\frac{8x^2 - 3x^3}{1 - 3x + x^2} = 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \cdots$; $\frac{21x^3 - 8x^4}{1 - 3x + x^2} = 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \cdots$; $\frac{55x^4 - 21x^5}{1 - 3x + x^2} = 55x^4 + 144x^5 + \cdots$.

Bei anderen Reihen kommt es darauf an, ihrem Gesetze durch Bildung von Fluxionen auf die Spur zu kommen, also ihre Differentialgleichung im heutigen Sinne des Wortes zu ermitteln. Wenn wir die Fluxionspünktchen Stirling's durch Differentialzeichen ersetzen, so ist sein Gang[4]) folgender. Sei $y = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots$, so ist $x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$. Abermalige Differentiation liefert $x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-x}$ und die Differentialgleichung lautet $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x}$.

Eine zweite Hauptabtheilung der *Methodus differentialis* ist durch ihre Ueberschrift der Interpolation der Reihen[5]) zugewiesen. In zahlreichen Fällen vollzieht Stirling die Interpolation, indem er die aufeinander folgenden Glieder der Reihe als Ordinaten einer parabolischen Curve auffasst, welche zu um Gleiches zunehmenden Abscissen gehören, aber immer geht dieses nicht an, z. B. nicht bei der Reihe

---

[1]) Stirling, *Methodus differentialis* pag. 35. [2]) Ebenda pag. 36—37. [3]) Ebenda pag. 69 sqq. [4]) Ebenda pag. 78. [5]) Ebenda pag. 85—153: *Pars secunda de interpolatione serierum.*

1, $1 \cdot 2$, $1 \cdot 2 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ etc., welche zu rasch zunimmt[1]). In diesem Falle schlägt Stirling vor, zu den Logarithmen der Glieder überzugehen, aus ihnen eine nach der Methode parabolischer Ordinaten interpolirbare Reihe zu bilden, und zu dem so interpolirten Logarithmus die Zahl zu suchen, welche alsdann das interpolirte Glied der eigentlich vorgelegten Reihe sein werde.

Im weiteren Verlaufe kommt Stirling dann zu der Aufgabe[2]), die Summe beliebig vieler Logarithmen zu finden, deren Zahlen eine arithmetische Progression bilden, modern ausgedrückt, den Logarithmus einer Gammafunction zu ermitteln. Seien $x+n$, $x+3n$, $x+5n$, $\cdots z-n$ die aufeinander folgenden Glieder einer arithmetischen Progression mit der Differenz $2n$. Ferner seien l, z und l, x die briggischen Logarithmen von z und x, endlich sei $a = 0{,}4342944819032\,52$ der reciproke natürliche Logarithmus von 10. Alsdann ist die Summe der briggischen Logarithmen:

$$l,(x+n) + l,(x+3n) + l,(x+5n) + \cdots + l,(z-n)$$

$$= \left\{\frac{z l, z}{2n} - \frac{az}{2n} - \frac{an}{12z} + \frac{7an^3}{360z^3} - \frac{31an^5}{1260z^5} + \frac{127an^7}{1680z^7} - \frac{511an^9}{1188z^9} + \cdots\right\}$$

$$\left\{\frac{x l, x}{2n} - \frac{ax}{2n} - \frac{an}{12x} + \frac{7an^3}{360x^3} - \frac{31an^5}{1260x^5} + \frac{127an^7}{1680x^7} - \frac{511an^9}{1188x^9} + \cdots\right\}.$$

Das Bildungsgesetz der auftretenden Zahlencoefficienten ist folgendes. Nennt man $\frac{1}{12} = \alpha_1$, $\frac{7}{360} = \alpha_2$, $-\frac{31}{1260} = \alpha_3$, $\frac{127}{1680} = \alpha_4$, $-\frac{511}{1188} = \alpha_5 \cdots$, wofür Stirling $A, B, C, D, E \cdots$ schreibt, bezeichnet man ferner die Binomialcoefficienten durch die heute gebräuchliche Abkürzung $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$, welche Stirling nicht kennt und dadurch die Möglichkeit einbüsst, eine allgemeine Formel anzuschreiben, so ist $\frac{-1}{(2\cdot 1+1)\,4\cdot 1} = \binom{1}{0}\alpha_1$, ferner $\frac{1}{(2\cdot 2+1)\cdot 4\cdot 2} = \binom{3}{0}\alpha_1 + \binom{3}{2}\alpha_2$ und allgemein

$$\frac{-1}{(2k+1)\,4k} = \binom{2k-1}{0}\alpha_1 + \binom{2k-1}{2}\alpha_2 + \cdots + \binom{2k-1}{2k-2}\alpha_k.$$

Der Beweis wird wieder nach jener bei Stirling immer wiederkehrenden Methode geführt, dass der Veränderlichen einer Reihe ein neuer Wert beigelegt und dann die Differenz der beiden Reihen ermittelt wird, welche letztere Aufgabe auszuführen Stirling dem Leser überlässt, während er sich damit begnügt, das Ergebniss auszusprechen. In der Reihe $\frac{z l, z}{2n} - \frac{az}{2n} + \frac{\alpha_1 an}{z} + \frac{\alpha_2 an^3}{z^3} + \frac{\alpha_3 an^5}{z^5} + \cdots + \frac{\alpha_k a n^{2k-1}}{z^{2k-1}} + \cdots$,

[1]) Stirling, *Methodus differentialis* pag. 110. [2]) Ebenda pag. 135.

welche wir $F(z)$ nennen wollen, soll z durch $z-2n$ ersetzt werden. So entsteht $F(z-2n) = \frac{(z-2n)\, l,\, (z-2n)}{2n} - \frac{a(z-2n)}{2n} + \frac{\alpha_1 a n}{z-2n} + \frac{\alpha_2 a n^3}{(z-2n)^3} + \frac{\alpha_3 a n^5}{(z-2n)^5} + \cdots + \frac{\alpha_\varkappa a n^{2k-1}}{(z-2n)^{2k-1}} + \cdots$ In dieser zweiten Reihe soll jeder einzelne Bruch durch Division in eine nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ fortschreitende Reihe verwandelt und dann die Subtraction $F(z) - F(z-2n)$ vollzogen werden. Stirling behauptet, der Unterschied trete als $l,\, z - \frac{an}{z} - \frac{an^2}{2z^2} - \frac{an^3}{3z^3} - \cdots = l,\, z + a \log\left(1 - \frac{n}{z}\right) = l,\, z - l,\left(1 - \frac{n}{z}\right) = l,\, (z-n)$ hervor, wenn die Silbe log den natürlichen Logarithmus bedeutet. Weiss man aber, dass $F(z) - F(z-2n) = l,\, (z-n)$, so kann man, indem z jedesmal durch $z-2n$ ersetzt wird, beliebig viele ähnliche Gleichungen bilden, beginnend mit $F(z-2n) - F(z-4n) = l,\, (z-3n)$ und schliessend mit $F(x+2n) - F(x) = l,\, (x+n)$. Addirt man dann alle diese Gleichungen, so entsteht in der That $F(z) - F(x) = l,\, (z-n) + l,\, (z-3n) + \cdots + l,\, (x+n)$.

Die Thätigkeit Euler's auf dem Gebiete der Reihenlehre beginnt 1730. Er benutzte bei seinen Untersuchungen die Integralrechnung, welcher er bei eben dieser Gelegenheit Neuentdeckungen von grösster Bedeutung hinzufügte. Wir sind nicht im Stande zu entscheiden, ob Euler damals schon Kenntniss von Stirling's ebenfalls von 1730 datirten Methodus differentialis besessen haben kann. Thatsache ist, dass er sich mit einigen dort behandelten Aufgaben ebenfalls beschäftigt hat. Euler ist dabei noch weit mehr als Stirling sorglos bis zum Uebermaasse in der Anwendung unendlicher Reihen. Euler's Aufsatz *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*[1], d. h. über transcendente Reihen, deren allgemeines Glied sich als in algebraischer Gestalt nicht darstellbar erweist, geht aus von der Reihe $1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots$. Diese Reihe stimme mit derjenigen überein, deren allgemeines Glied die Gestalt der unendlichen Factorenfolge

$$\frac{1^{1-n}\cdot 2^n}{1+n}\cdot\frac{2^{1-n}\cdot 3^n}{2+n}\cdot\frac{3^{1-n}\cdot 4^n}{3+n}\cdot\frac{4^{1-n}\cdot 5^n}{4+n}\cdots$$

besitze. Setzt man nämlich in dem neuen Ausdruck $n=1$, so wird er zu $\frac{1\cdot 2}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{3}\cdot\frac{1\cdot 4}{4}\cdots = 1$. Setzt man $n=2$, so entsteht $\frac{1\cdot 2^2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot 3^2}{4}\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot 4^2}{5}\cdots = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots = 2$. Desgleichen bringt

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1730 *et* 1731 T. V, 36—57.

$n = 3$ den Wert $\frac{1 \cdot 2^3}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2^2} \cdot 3^3}{5} \cdot \frac{\frac{1}{3^2} \cdot 4^3}{6} \cdots = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 6} \cdots$ $= 1 \cdot 2 \cdot 3$ hervor u. s. w. Die neue Form habe vor der ursprünglichen den ganz wesentlichen Vorzug, sich als zur Interpolation geeignet zu erweisen, indem man in ihr dem n auch nichtganzzahlige Werthe beizulegen vermöge, was in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ unthunlich sei. Bei $n = \frac{1}{2}$ gehe die neue Form über in $\sqrt{\left[\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdots\right]}$, und vergleiche man die von Wallis seiner Zeit gefundene Factorenfolge (Bd. II, S. 827), so sei der Werth dieses Gliedes vom Stellenzeiger $\frac{1}{2}$ gleich der Quadratwurzel aus der Kreisfläche, deren Durchmesser die Einheit ist, wofür man heute $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ schreibt. Da demzufolge $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ einen Ausdruck bedeute, der bald ganzzahlig erscheine, bald von der Quadratur des Kreises abhänge, so habe ihn das, sagt Euler, auf den Gedanken gebracht, eine abermalige Umformung zu versuchen, und zwar in ein Integral, weil es ja Integrale gebe, welche derart von einem in ihnen vorkommenden n abhängen, dass sie, je nachdem n ganzzahlig ist oder nicht, algebraische Auswerthung oder nur eine solche mittels der Quadratur von Curven gestatten. Beispiel eines solchen Integrals sei $\int x^e dx (1 - x)^n$, wenn bei der Integration beachtet werde, dass das Integral zugleich mit x zu Null werden solle; dann werde es unter Einsetzung von $x = 1$ das n^{te} Glied einer unendlichen Reihe bilden[1]). Euler meint also das bestimmte Integral, welches heute $\int_0^1 x^e (1 - x^n)\, dx$ geschrieben wird, in welchem e eine beliebige Constante bedeutet, das sogenannte erste Euler'sche Integral oder die Betafunction, welche seit Binet durch $B(e + 1, n + 1)$ bezeichnet wird. Die Auswerthung des angegebenen Integrals erfolgt durch Binomialentwicklung von $(1 - x)^n$, ein in diesem Falle wegen $0 < x < 1$ durchaus gerechtfertigtes Verfahren, wenn auch Euler sich dessen weder bewusst ist, noch bewusst sein kann. Er setzt also $x^e (1 - x)^n = x^e - \frac{n}{1} x^{e+1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{e+2} - \cdots$. Bei der Integration wird $\int x^e (1 - x)^n dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} - \frac{n x^{e+2}}{1(e+2)} + \frac{n(n-1) x^{e+3}}{1 \cdot 2 (e+3)} - \frac{n(n-1)(n-2) x^{e+4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 (e+4)}$ $+ \cdots$ und $\int_0^1 x^e (1 - x)^n dx = \frac{1}{e+1} - \frac{n}{1(e+2)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 (e+3)}$

[1]) *Sit proposita haec formula* $\int x^e dx (1 - x)^n$ *vicem termini generalis subiens, quae integrata ita, ut fiat* $= 0$, *si sit* $x = 0$, *et tum posito* $x = 1$, *dat terminum ordine n progressionis inde ortae.*

$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3(e+4)}+\cdots$. In diese selbst unendliche Reihe werden für n die mit 0 beginnenden aufeinander folgenden ganzen Zahlen eingesetzt. Man findet, dass $\int\limits_0^1 x^e(1-x)^n\,dx$

bei $n=0$ $\quad n=1$ $\quad n=2$ $\quad n=3$

den Werth $\frac{1}{e+1}$ $\quad \frac{1}{(e+1)(e+2)}$ $\quad \frac{1\cdot 2}{(e+1)(e+2)(e+3)}$ $\quad \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}$

annimmt, oder mit anderen Worten: Euler hat gefunden, dass $\int\limits_0^1 x^e(1-x)^n\,dx$ das n^{te} Glied der Reihe $\frac{1}{e+1}+\frac{1}{(e+1)(e+2)}+\frac{1\cdot 2}{(e+1)(e+2)(e+3)}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}+\cdots$ ist und sich als Product schreiben lässt:

$$\int\limits_0^1 x^e(1-x)^n\,dx=\frac{1\cdot 2\cdots n}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n+1)}.$$

Diese Productenform giebt, so oft n eine positive ganze Zahl ist, den Werth des bestimmten Integrals übersichtlicher, als die zuvor erhaltene unendliche Reihe es that; dagegen muss jene benutzt werden, wenn n keine positive ganze Zahl ist.

Ist $e=\frac{f}{g}$, so wird $\int\limits_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n\,dx=\frac{g^{n+1}}{f+(n+1)g}\cdot\frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+1\cdot g)(f+2\cdot g)\cdots(f+n\cdot g)}$ und $\frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+1\cdot g)(f+2\cdot g)\cdots(f+n\cdot g)}$ $=\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int\limits_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n\,dx$. Durch $f=1$ und $g=0$ geht der Bruch links vom Gleichheitszeichen in $1\cdot 2\cdots n$ über, d. h. in den Ausdruck, dessen Umwandlung in ein Integral eigentlich beabsichtigt war, rechts aber bedarf es wegen des im Nenner auftretenden g zur Einsetzung jener Werthe noch einiger Vorbereitung. Euler ersetzt in dem Integrale x durch $x^{\frac{g}{f+g}}$. Er erhält $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int\limits_0^1 x^{\frac{g}{f+g}\cdot\frac{f}{g}}\left(1-x^{\frac{g}{f+g}}\right)^n\frac{g}{f+g}\,x^{-\frac{f}{f+g}}\,dx$

$$=\frac{f+(n+1)g}{(f+g)^{n+1}}\int\limits_0^1\left(\frac{1-x^{\frac{g}{f+g}}}{\frac{g}{f+g}}\right)^n dx$$ und nun besteht die Schwierigkeit,

bei Annahme von $f = 1$, $g = 0$ nicht mehr in dem Factor vor dem Integrale, welcher $= 1$ wird, sondern nur noch unter dem Integrale, wo $\frac{1-x^z}{z}$ auftritt, dessen Werth bei $z = 0$ zu ermitteln bleibt und nach bekannter Regel[1]) ermittelt wird. Zähler und Nenner von $\frac{1-x^z}{z}$ werden nach z differentiirt und geben $\frac{-x^z \cdot dz \cdot \log x}{dz}$, welches durch $z = 0$ in $-\log x$ übergeht. Folglich ist endgiltig:

$$1 \cdot 2 \cdots n = \int_0^1 dx\,(-\log x)^n.$$

Damit war das zweite Euler'sche Integral, die Gammafunction $\Gamma(n+1)$, wie man seit Legendre sagt und schreibt, in die Wissenschaft eingeführt.

Wir erwähnen noch ein Letztes aus dem reichhaltigen Aufsatze, der, dem Titel und den Anfangsäusserungen nach der Reihenlehre gewidmet, nach und nach die Lehre von den bestimmten Integralen in den Mittelpunkt der Betrachtungen rückte, sodass unser 118. Kapitel auf ihn wird zurückweisen müssen. Was wir noch anführen wollen, ist die Differentiation mit gebrochenem Index. Wohl hatte Leibniz (S. 221) in Briefen an Johann Bernoulli die Frage nach der Bedeutung einer solchen Differentiation aufgeworfen, aber dieser Briefwechsel, erst 1745 gedruckt, war für die Oeffentlichkeit noch nicht vorhanden, und wenn auch die Möglichkeit nicht geleugnet werden will, dass Euler durch Johann Bernoulli mündlich in Basel oder später schriftlich in nicht bekannt gewordenen Briefen auf die Frage aufmerksam gemacht worden sein kann, so steht diese Möglichkeit doch auf sehr schwachen Füssen. Euler's Auffassung ist folgende. Sei zunächst n eine ganze positive Zahl, so ist $\frac{d^n(z^e)}{dz^n}$ $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots e-n} z^{e-n}$. Nun war aber $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots e = \int_0^1 dx\,(-\log x)^e$, sowie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (e-n) = \int_0^1 dx\,(-\log x)^{e-n}$ und demzufolge

$$\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = z^{e-n} \cdot \frac{\int_0^1 dx\,(-\log x)^e}{\int_0^1 dx\,(-\log x)^{e-n}},$$

ein Ausdruck, der an und für sich keineswegs an die Ganzzahligkeit von n gebunden erscheint. Ihn wählt Euler als Definition des n^{ten} Differentialquotienten und indem er beispielsweise $e = 1$, $n = \frac{1}{2}$

[1]) *per regulam cognitam.*

setzt, gelangt er zu $\frac{d^{\frac{1}{2}} z}{\sqrt{dz}} = \sqrt{z} \cdot \frac{\int_0^1 dx\,(-\log x)}{\int_0^1 dx \sqrt{-\log x}}$. Der Zähler, fährt Euler fort, ist $\int_0^1 dx\,(-\log x) = 1$, wie sich leicht als richtig erweist, da $\int dx\,(-\log x) = x - x \cdot \log x$ bei $x = 0$ in 0, bei $x = 1$ in 1 übergeht. Für den Nenner hat Euler im Vorverlaufe des Aufsatzes den Werth $\int_0^1 dx \sqrt{-\log x} = \sqrt{A}$ erkannt, wo A die Fläche des Kreises vom Durchmesser 1 ist, also nach heutiger Schreibweise $A = \frac{\pi}{4}$ und $\int_0^1 dx \sqrt{-\log x} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, mithin $\frac{d^{\frac{1}{2}} z}{\sqrt{dz}} = 2\sqrt{\frac{z}{\pi}}$.

In dem gleichen Bande der Petersburger akademischen Veröffentlichungen steht ein zweiter Aufsatz Euler's: *De summatione innumerabilium progressionum*[1]), der sich die Aufgabe stellt, Reihen unter Anwendung bestimmter Integrale zu summiren. Wie der Bruch $\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$, so oft n eine ganze positive Zahl, so ist unter der gleichen Voraussetzung für n auch $\frac{1 - P^n}{1 - P} = 1 + P + \cdots + P^{n-1}$, welche Function von x auch durch P angedeutet werde, und integrirt man auf beiden Seiten nach x zwischen den Grenzen 0 und k, so entsteht $k + \int_0^k P dx + \int_0^k P^2 dx + \cdots + \int_0^k P^{n-1} dx = \int_0^k \frac{1 - P^n}{1 - P} dx$. In einem besonderen Falle sei $P = \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha$, so ist $k + \frac{k^{\alpha+1}}{(1+\alpha) a^\alpha} + \frac{k^{2\alpha+1}}{(1+2\alpha) a^{2\alpha}} + \cdots + \frac{k^{(n-1)\alpha+1}}{(1+(n-1)\alpha) a^{n\alpha-\alpha}} = \int_0^k \frac{a^{n\alpha} - x^{n\alpha}}{(a^\alpha - x^\alpha) a^{n\alpha-\alpha}} dx$. Die Reihe, welche hier summirt ist, kann mit $\frac{b}{c} + \frac{b^{i+1}}{c+e} + \frac{b^{2i+1}}{c+2e} + \cdots + \frac{b^{(n-1)i+1}}{c+(n-1)e}$ verglichen werden, d. h. mit einer Reihe von Brüchen, deren Zähler eine geometrische, und deren Nenner eine arithmetische Progression bilden. Dazu ist nur zu setzen $k = \frac{b}{c}$, $\alpha = \frac{e}{c}$, $a = \frac{b^{\frac{e-ci}{e}}}{c}$ und das summatorische Glied[2])

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1730 *et* 1731 T. V, 91—105. [2]) *terminus summatorius.*

nimmt dadurch den Werth an $\int_0^{b} \frac{b^{\frac{ne-n-i}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{(n-1)(e-c)}{c}} \left(b^{\frac{e-c}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}}\right)} dx$. Weitere Betrachtungen, auf welche genauer einzugehen wir unterlassen, führen zu Doppelintegralen als summatorisches Glied, noch andere zur Auswerthung und Umwandlung besonderer unendlicher Reihen.

In einem Aufsatze des nächstfolgenden Jahres: *Methodus generalis summandi progressiones*[1], hat Euler abermalige Reihenuntersuchungen niedergelegt. Gleich zu Anfang ist beweislos eine sehr allgemeine Doppelformel ausgesprochen. Ist s die Summe der n Glieder einer Reihe und t das letzte Glied, welches naturgemäss ebenso wie s von n abhängig sein muss, so sei, behauptet Euler,

$$t = \frac{ds}{1 \cdot dn} - \frac{d^2 s}{1 \cdot 2\, dn^2} + \frac{d^3 s}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dn^3} - \frac{d^4 s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, dn^4} + \cdots$$

und

$$s = \int t\, dn + \frac{t}{2} + \frac{dt}{12\, dn} - \frac{d^3 t}{720\, dn^3} + \frac{d^5 t}{30240\, dn^5} \text{ etc.}$$

Später wird die Summation von geometrischen Progressionen und von solchen Reihen gezeigt, deren Glieder durch einen Factor eine geometrische, durch einen zweiten eine arithmetische Progression aufzeigen, Reihen mit welchen De Moivre (S. 344—345) es seiner Zeit zu thun hatte. Ist $s = x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + \cdots + x^{a+(n-1)b}$, so folgert Euler $s - x^a + x^{a+nb} = x^{a+b} + x^{a+2b} + \cdots + x^{a+nb}$ $= x^b (x^a + x^{a+b} + \cdots + x^{a+(n-1)b}) = x^b s$ und daraus $s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}$. Ist ferner $s = x^a + 2x^{a+b} + 3x^{a+2b} + \cdots + nx^{a+(n-1)b}$, so wird gefolgert $s - x^a + (n+1) x^{a+nb} = 2x^{a+b} + 3x^{a+2b} + \cdots + (n+1) x^{a+nb} = x^b (2x^a + 3x^{a+b} + \cdots + (n+1) x^{a+(n-1)b}) =$ $x^b (s + x^a + x^{a+b} + \cdots + x^{a+(n-1)b}) = x^b \left(s + \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}\right)$ und daraus $s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{(1 - x^b)^2} - \frac{nx^{a+nb}}{1 - x^b}$. Bei $a = b = 1$ wird $x + 2x^2$ $+ \cdots + nx^n = \frac{x - (n+1) x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2}$. Euler zeigt, dass der letztere Ausdruck auch durch Integration und darauf folgende Differentiation gefunden werden kann. Aus $s = x + 2x^2 + \cdots + nx^n$ folge nämlich $\int \frac{s}{x} dx = \int dx + \int 2x\, dx + \cdots + \int nx^{n-1} dx = x + x^2 + \cdots$ $+ x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ und daraus $\frac{s}{x} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}\right) = \frac{1 - (n+1) x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}$.

---

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T. VI, 68—97.

nebst $s = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$. Der hier angewandte Kunstgriff gewinnt alsbald für Euler den Charakter einer auch bei verwickelteren Reihen nützlichen Methode.

Wir kommen zu Euler's Aufsatz *De summis serierum reciprocarum*[1]), in welchem er als Erster die Summation der reciproken Quadratzahlen veröffentlichte und dadurch eine durch Johann Bernoulli (S. 92) auf die Tagesordnung gesetzte Aufgabe löste. Euler's Gedankengang ist folgender. Sei s ein Bogen und y dessen Sinus oder $y = s - \frac{s^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{s^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \cdots$, so ist auch $1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1\cdot2\cdot3y} - \frac{s^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5y} + \cdots = 0$. Diese aus unendlich vielen Gliedern bestehende Gleichung ist unendlich hohen Grades in s und besitzt deshalb unendlich viele Wurzeln, wie es in der That unendlich viele Bögen giebt, welchen allen derselbe Sinus zukommt. Ist p der Umfang des Halbkreises, A der kleinste $\arcsin y$, so kann $\arcsin y$ ausserdem auch noch die Werte $\begin{matrix} p-A, & 2p+A, \\ -p-A, & -2p+A, \end{matrix}$ $\begin{matrix} 3p-A, & 4p+A, & \cdots \\ -3p-A, & -4p+A, & \cdots \end{matrix}$ besitzen, und da jedes Gleichungspolynom in so viele Factoren zerfällt als der Grad der Gleichung verlangt, da aus jedem Factor, indem man ihn $= 0$ setzt, eine Wurzel, beziehungsweise aus jeder Wurzel ein Factor ermittelt werden kann, so ist $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1\cdot2\cdot3y} - \frac{s^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5y} + \cdots = \left(1 - \frac{s}{A}\right)\left(1 - \frac{s}{p-A}\right)\left(1 - \frac{s}{-p-A}\right)\left(1 - \frac{s}{2p+A}\right)\left(1 - \frac{s}{-2p+A}\right)\cdots$. Nach einem bekannten Satze findet zwischen den Coefficienten der Gleichung und ihren Wurzeln der Zusammenhang statt, dass der Coefficient der ersten, zweiten, dritten $\cdots$ Potenz der Unbekannten sich als negative Summe der Wurzeln, als Summe der Wurzelproducte zu je zweien, als negative Summe der Wurzelproducte zu je dreien $\cdots$ erweist. Heissen die Wurzeln einer Gleichung $a, b, c \cdots$, ist α ihre Summe, β die Summe ihrer Producte zu je zweien, γ die Summe ihrer Producte zu je dreien $\cdots$, ist ferner $a + b + c + \cdots = P$, $a^2 + b^2 + c^2 + \cdots = Q$, $a^3 + b^3 + c^3 + \cdots = R$ u. s. w., so ist nach einem nicht weniger bekannten Satze $P = \alpha$, $Q = P\alpha - 2\beta$, $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma$, $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma - 4\delta$ u. s. w. Im gegenwärtigen Falle ist $\alpha = \frac{1}{y}$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{-1}{1\cdot2\cdot3y}$, $\delta = 0 \cdots$, ferner $a = \frac{1}{A}$,

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1734 *et* 1735. T. VII, 123—134.

$b = \frac{1}{p - A}$, $c = \frac{1}{-p - A}$ $\cdots$. Demnach ist $P = \frac{1}{y}$, $Q = \frac{1}{y^2}$, $R = \frac{1}{y^3} - \frac{1}{1 \cdot 2y}$, $S = \frac{1}{y^4} - \frac{1}{1 \cdot 2y^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ u. s. w. In diese allgemeinen Formeln setzt Euler $y = 1$, wodurch A der kleinste arcsin $1 = \frac{p}{2} = q$ wird, wenn q die Länge des Quadranten bezeichnet. Die einzelnen Wurzeln A, $p - A$, $-p - A$, $2p + A$, $-2p + A$ $\cdots$ sind dann q, q, $-3q$, $5q$, $-3q$, $5q$ $\cdots$, wo jeder Werth paarweise auftritt. Somit wird $1 = \frac{2}{q}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$ und $\frac{q}{2} = \frac{p}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ oder die Leibnizische Reihe ist gefunden. Die Summe Q der Wurzelquadrate wird als $\frac{1}{y^2}$ gleichfalls $= 1$, ferner $R = \frac{1}{2}$, $S = \frac{1}{3}$, und die Summen der 5ten, 6ten, 7ten Wurzelpotenzen finden sich als $T = \frac{5}{24}$, $V = \frac{2}{15}$, $W = \frac{61}{720}$. Man erhält daher die Gleichungen

$$1 = \frac{2}{q^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) \text{ nebst } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{q^2}{2} = \frac{p^2}{8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{q^3}\left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots\right) \text{ nebst } \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{q^3}{4} = \frac{p^3}{32}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{q^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \text{ nebst } \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{q^4}{6} = \frac{p^4}{96}$$

$$\frac{5}{24} = \frac{2}{q^5}\left(\frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots\right) \text{ nebst } \frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots = \frac{5q^5}{48} = \frac{5p^5}{1536}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{2}{q^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots\right) \text{ nebst } \frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots = \frac{q^6}{15} = \frac{p^6}{960},$$

wo p überall die Zahl bedeutet, die heute π heisst.

Aus diesen Reihen leitet Euler dann andere ab. Sei $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = s_2$, $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = s_4$ u. s. w. Er erhält $\frac{s_2}{4} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots = s_2 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$ und $s_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{p^2}{8} = \frac{p^2}{6}$. Aehnlicherweise ist $\frac{s_4}{16} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \cdots = s_4 - \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right)$ und $s_4 = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) = \frac{16}{15} \cdot \frac{p^4}{96} = \frac{p^4}{90}$. Euler zeigt alsdann, wie ausser dem besonderen Werthe $y = 1$ auch andere Werthe von y eingeführt werden könnten, die wieder zu Reihensummirungen führen.

Euler war der Erfinder dieser Reihensummen[1]. Er hat 1736

[1] Das hat Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1890 pag. 22–24 ausser allen Zweifel gestellt.

und 1737 Briefe über dieselben mit Johann Bernoulli gewechselt. Als im Jahre 1742 Johann Bernoulli's Werke in 4 Bänden erschienen, deren vierter wesentlich noch Ungedrucktes brachte, wurden vom Verfasser selbst an dessen Spitze drei Aufsätze über Reihen gestellt, deren dritter die Summirung der reciproken Quadratzahlen von der Sinusreihe ausgehend vollzieht[1]), also ganz ähnlich wie Euler es gemacht hatte. Die einzige Erklärung dieser auffallenden Nachveröffentlichung kann darin gefunden werden, dass Bernoulli durch Euler nur von dem Ergebnisse der Summirung Kenntniss erhalten haben dürfte. Das geistige Zusammentreffen in der jedenfalls nicht ganz nahe liegenden Herleitung bleibt immerhin erstaunlich.

Wir kehren zu Euler's Abhandlungen über Reihen zurück, und zwar zu seinen Bemerkungen über harmonische Reihen, *De progressionibus harmonicis observationes*[2]). Die Reihe $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+2b} + \cdots + \frac{c}{a+(i-1)b} + \cdots$ ist eine harmonische, weil je drei auf einander folgende Glieder derselben eine stetige harmonische Proportion bilden. Ihre Glieder nehmen fortwährend ab. Trotzdem ist die Summe der unendlichen harmonischen Reihe unendlich gross, was mittels des Princips einleuchtet, dass, wenn eine unendliche Reihe eine endliche Summe besitzen soll, die Summe von $2i$ Gliedern sich von der von i Gliedern nicht unterscheiden darf, d. h. in diesem Falle muss die Summe der Glieder, um welche die weiter fortgesetzte Reihe die kürzere übertrifft, unendlich klein sein; ist dieselbe dagegen von endlicher Grösse, so kann die Summe der unendlichen Reihe nicht endlich sein, sondern muss unendlich gross werden. Nun betrachte man die $(n-1)i$ Glieder $\frac{c}{a+ib} + \frac{c}{a+(i+1)b} + \cdots + \frac{c}{a+(ni-1)b}$. Ihre Summe ist $> \frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$ und $< \frac{(n-1)ic}{a+ib}$, d. h. bei sehr grossem i, dem gegenüber a wie b nicht in Betracht kommen, liegt diese Summe zwischen $\frac{(n-1)c}{nb}$ und $\frac{(n-1)c}{b}$; sie ist somit von endlicher Grösse, und die harmonische Reihe selbst unendlich gross. Es ist nicht zu verkennen, dass hier Jacob Bernoulli's Divergenzbeweis (S. 90) als Muster diente, aber ebensowenig, dass Euler's Fassung des Beweises noch klarer war und das Wesen der Reihendivergenz noch mehr enthüllte. Nun setzt Euler weiter s als die Summe der i ersten Glieder, d. h. $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \cdots + \frac{c}{a+(i-1)b} = s$.

[1]) Joh. Bernoulli, *Opera* IV, 20—25. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1734 *et* 1735. T. VII, 150—161.

Das nächste Glied $\frac{c}{a+ib}$ ist die Veränderung von s, welche der Veränderung von i um 1 entspricht, und da bei sehr grossem i diese Veränderungen als Differentiale zu betrachten sind, von welchen di als constant gilt, so ist $\frac{ds}{di} = \frac{c}{a+ib}$, $s = \int \frac{c\,di}{a+ib} = C + \frac{c}{b}\log(a+ib)$. Setzt man aber die Reihe bis zum Gliede $\frac{c}{a+(ni-1)b}$ fort, so muss als Summe $C + \frac{c}{b}\log(a+nib)$ herauskommen. Die überschüssigen Glieder $\frac{c}{a+ib} + \frac{c}{a+(i+1)b} + \cdots + \frac{c}{a+(ni-1)b}$ haben mithin die Summe $\left[C + \frac{c}{b}\log(a+nib)\right] - \left[C + \frac{c}{b}\log(a+ib)\right] = \frac{c}{b}\log\frac{a+nib}{a+ib}$, welches bei sehr grossem i in $\frac{c}{b}\log n$ übergeht. Bei $a=b=c=1$ ist also nahezu $\log n = \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{ni}\right) - \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}\right)$. Die Gliederzahl der abzuziehenden Reihe ist nur der n^{te} Theil der Gliederzahl der anderen, d. h. man hat je n Glieder der positiven und eines der negativen Reihe in eine Gruppe zu vereinigen. Man erhält $\log n = \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)i+1}+\frac{1}{(n-1)i+2}+\cdots+\frac{1}{ni}-\frac{1}{i}\right)$. Wenn auf diese Weise Reihen zur Logarithmenberechnung hervorgebracht werden, so dienen umgekehrt Logarithmen zur Summirung der harmonischen Reihe. Aus der logarithmischen Reihe $\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots$ folgt $\frac{1}{x} = \log\frac{x+1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} - \cdots$, und setzt man für x die aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von 1 bis i, so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1} &= \log 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots \\
\frac{1}{2} &= \log\frac{3}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 16} - \frac{1}{5\cdot 32} + \cdots \\
\frac{1}{3} &= \log\frac{4}{3} + \frac{1}{2\cdot 9} - \frac{3}{3\cdot 27} + \frac{1}{4\cdot 81} - \frac{1}{5\cdot 243} + \cdots \\
\frac{1}{4} &= \log\frac{5}{4} + \frac{1}{2\cdot 16} - \frac{1}{3\cdot 64} + \frac{1}{4\cdot 256} - \frac{1}{5\cdot 1024} + \cdots \\
&\vdots \\
\frac{1}{i} &= \log\frac{i+1}{i} + \frac{1}{2i^2} - \frac{1}{3i^3} + \frac{1}{4i^4} - \frac{1}{5i^5} + \cdots.
\end{aligned}$$

Die Addition dieser Gleichungen führt zu folgender Formel: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

$+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}=\log(i+1)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{i^2}\right]-$
$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{i^3}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{i^4}\right]-\cdots.$
Die zu $\log(i+1)$ noch additiv und subtractiv in Rechnung zu bringenden Ausdrücke sind convergent. Ihre angenäherte Auswerthung liefert 0,577218, eine Zahl, welche man sich später gewöhnt hat die Euler'sche Constante zu nennen und sie durch C zu bezeichnen. Dann ist also

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}=\log(i+1)+C.$$

Den Gedanken, das $i+1^{\text{te}}$ Glied einer Reihe als Unterschied zwischen den Summen der i und der $i+1$ Anfangsglieder zu betrachten, der dem Unterschiede 1 der Stellenzeiger entspricht, und somit den Differentialquotienten der Summe nach der Gliederzahl darzustellen (S. 639), hat Euler auch in geometrische Form gekleidet. In der *Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi*[1]) nimmt er (Fig. 103) auf einer Abscissen-

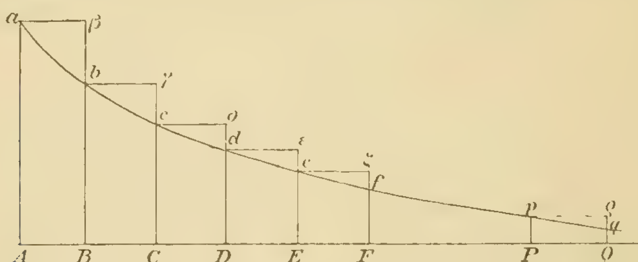


Fig. 103.

axe AQ lauter der Einheit gleiche Stücke $AB=BC=CD=DE=EF=\cdots=PQ$ und errichtet in allen so bezeichneten Punkten der Abscissenaxe Ordinaten Aa, $Bb\beta$, $Cc\gamma$, $\cdots$ Pp, $Qq\varrho$ so, dass in der angenommenen Längeneinheit gemessen Aa das erste Reihenglied einer gegebenen Reihe darstellt, Bb das zweite, $\cdots$ Pp das $n-1^{\text{te}}$, Qq das n^{te}. Die Rechtecke $A\beta+B\gamma+C\delta+\cdots+P\varrho$ besitzen als Flächeninhalt die Summe der $n-1$ ersten Reihenglieder und sind grösser als die von den Ordinaten Aa, Qq, der Abscisse AQ und der Curve $ab\cdots q$ eingeschlossene Fläche, welche durch ein bestimmtes Integral darzustellen in dem früheren Aufsatze gelehrt wurde. In einer zweiten Figur (Fig. 104) ist die Summe der Rechtecke $A\beta+B\gamma+C\delta+\cdots+P\varrho$ oder die Summe der $n-1$ ersten Reihenglieder kleiner als die durch ein bestimmtes Integral dar-

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 3—9.

gestellte Fläche, welche von den Ordinaten $A\alpha$, $Q\varrho$, der Abscisse AQ und der Curve $\alpha\beta\cdots\varrho$ eingeschlossen ist. Letztere Curvenfläche ist also zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, welche Newton

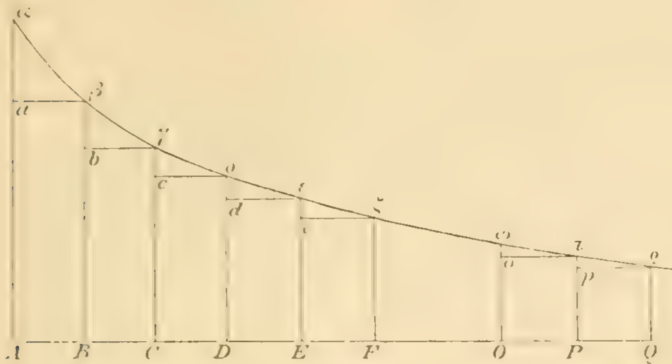


Fig. 104.

(S. 193) bereits gekannt hatte, und die Reihensumme zwischen zwei Integralen. Eine dritte Figur endlich (Fig. 105) bringt noch enger die Reihensumme einschliessende Grenzen hervor als die genannten Integrale, indem die dort vernachlässigten gemischtlinigen Dreiecke insofern Berücksichtigung finden, als man statt ihrer um weniges grössere oder kleinere gradlinige Dreiecke in Rechnung bringt.

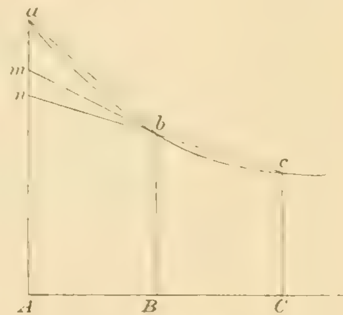


Fig. 105.

Wir haben (S. 635) gewisse Formeln auftreten sehen, in welchen Differentialquotienten aufeinander folgender Ordnung die hervorragendste Rolle spielten. Auf die Herleitung dieser Formeln kam Euler zurück unter der Ueberschrift: *Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali*[1]. Die Bezeichnung ist eine andere als in dem früheren Aufsatze. Euler schreibt jetzt x statt n, X statt t, S statt s. Er setzt ferner den Taylor'schen Satz voraus, für welchen er dessen Entdecker angiebt, und der in der Form auftritt, eine Function y von x nehme, wenn x in $x + a$ übergehe, den Werth an $y + \frac{a}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$, eine unendliche Reihe, an deren Benutzbarkeit kein Zweifel laut wird. Ist beispielsweise y eine Function

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 9—22.

von x, welche die Eigenschaft besitzt, mit x zugleich zu verschwinden, so lasse man $a = -x$ werden, weil alsdann $x + a = x - x = 0$ ist, und setze den neuen Werth von y als Null, d. h. man erhält $0 = y - \frac{x}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$, beziehungsweise $y = \frac{x}{1}\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3} - \cdots$. Eine derartige mit x zugleich verschwindende Function ist naturgemäss S oder die Summe der x-gliedrigen Reihe $A + B + C + \cdots + X$. Bei $x - 1$ Gliedern ist deren Summe $S - X$ der Werth, den S annimmt, wenn x in $x - 1$ übergeht, d. h. wenn oben $a = -1$, $y = S$ gesetzt wird, oder man hat $S - X = S - \frac{dS}{dx} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2S}{dx^2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3S}{dx^3} + \cdots$. Daraus folgt die erste der früheren Formeln: $X = \frac{dS}{dx} - \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2S}{dx^2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3S}{dx^3} - \cdots$.

Soll eine Umkehrung der Reihe[1] in dem Sinne erfolgen, dass S nach X und dessen Differentialquotienten entwickelt werde, so nehme man $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \cdots$ als vorläufig unbekannte constante Coefficienten und setze $\frac{dS}{dx} = \alpha X + \beta\frac{dX}{dx} + \gamma\frac{d^2X}{dx^2} + \delta\frac{d^3X}{dx^3} + \varepsilon\frac{d^4X}{dx^4} + \cdots$. Fortgesetzte Differentiation giebt $\frac{d^2S}{dx^2} = \alpha\frac{dX}{dx} + \beta\frac{d^2X}{dx^2} + \gamma\frac{d^3X}{dx^3} + \delta\frac{d^4X}{dx^4} + \cdots$, $\frac{d^3S}{dx^3} = \alpha\frac{d^2X}{dx^2} + \beta\frac{d^3X}{dx^3} + \gamma\frac{d^4X}{dx^4} + \cdots$, $\frac{d^4S}{dx^4} = \alpha\frac{d^3X}{dx^3} + \beta\frac{d^4X}{dx^4} + \cdots$, $\frac{d^5S}{dx^5} = \alpha\frac{d^4X}{dx^4} + \cdots$, während Integration zu $S = \alpha\int X\,dx + \beta X + \gamma\frac{dX}{dx} + \delta\frac{d^2X}{dx^2} + \cdots$ führt. Die Differentialquotienten von S nach x setzt Euler alsdann in obige erste Formel ein und erhält $0 = (1 - \alpha)X + \left(\frac{\alpha}{1\cdot 2} - \beta\right)\frac{dX}{dx} - \left(\frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\beta}{1\cdot 2} + \gamma\right)\frac{d^2X}{dx^2} + \left(\frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\gamma}{1\cdot 3} - \delta\right)\frac{d^3X}{dx^3} - \cdots$. Alle Einzelglieder dieser Entwicklung verschwinden, und die Entwicklung selbst ist unabhängig von der Art des Zusammenhanges zwischen X und x, wenn die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ so gewählt werden, dass $0 = 1 - \alpha = \frac{\alpha}{1\cdot 2} - \beta = \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\beta}{1\cdot 2} + \gamma = \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\gamma}{1\cdot 2} - \delta = \cdots$. So erhält man $\alpha = 1$, $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6}$, $\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24}$, $\cdots$. Jeder folgende Coefficient hängt von allen ihm vorhergehenden ab. Eine unabhängige Darstellung

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 14—16.

der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$, hält Euler für unmöglich[1], und nur empirisch fortschreitend findet er $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{1\cdot 2}$, $\gamma = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2}$, $\delta = 0$, $\varepsilon = \frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$, $\zeta = 0$ u. s. w. In der Reihe für S fallen von δ an die Coefficienten der Differentialquotienten von X nach x von grader Differentiationsordnung weg, und man erhält die frühere zweite Formel: $S = \int X dx + \frac{X}{2} + \frac{1}{12}\frac{dX}{dx} - \frac{1}{720}\frac{d^3X}{dx^3} + \frac{1}{30240}\frac{d^5X}{dx^5}$ etc. Die bei der Integration hinzuzufügende Constante muss der schon erwähnten Nothwendigkeit, dass $x = 0$ auch $X = 0$ und $S = 0$ hervorbringe, Rechnung tragend gewählt werden. Das hat naturgemäss Schwierigkeiten, wenn X eine solche Function von x ist, dass x im Nenner vorkommt, wie bei der harmonischen Reihe mit $X = \frac{1}{x}$, $\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$ u. s. w. Die Summirung gestaltet sich hier mittels $\int X dx = \int \frac{dx}{x} = \log x$ zu $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} = C + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \cdots$. Um nun C zu gewinnen, setzt Euler $x = 10$ und findet näherungsweise seine Constante

$$C = 0{,}5772156649015329$$

auf 16 Decimalstellen, während er sie früher (S. 640) nur auf 6 Decimalstellen berechnet hatte.

Andere Anwendungen der gleichen Summenformel machte Euler in einem wenig späteren Aufsatze: *Methodus universalis series summandi ulterius promota*[2]).

110. Kapitel.

Reihen seit 1737.

Wir erinnern uns, dass Jacob Bernoulli (S. 90) im vollen Bewusstsein des unendlichen Werthes der harmonischen Reihe gleichwohl in unbefangendster Weise mit derselben rechnend zu gewissen Summenbildungen gelangte. Auch Goldbach (S. 620) rechnete mit unendlichen Reihen von mindestens zweifelhafter Berechtigung, und ein Ergebniss theilte er Euler mit, der davon mit der Bemerkung,

---

[1]) *Ipsa autem series coefficientum α, β, γ, δ ··· ita est comparata, ut vix credam pro ea terminum generalem posse exhiberi.* [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 147—158.

es rühre von Goldbach her, in der Abhandlung *Variae observationes circa series infinitas*[1]) Gebrauch machte. Sei x die Summe der unendlichen harmonischen Reihe oder $x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$. Man weiss, dass $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \cdots$, und setzt man der Reihe nach $a = 2$, $a = 3$, $a = 5$, $a = 6$, so erhält man:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots$$
$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \cdots.$$

Zieht man diese Reihen von x ab, so bleibt $x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots$. Offenbar lassen weitere Reihen für $\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \cdots$ sich bilden, in denen lauter von einander verschiedene Glieder $\frac{1}{7^r}, \frac{1}{10^r}, \frac{1}{11^r}, \cdots$ mit $r \geq 1$ vorkommen. Zieht man auch diese Reihen wieder von $x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ ab, so erschöpfen sich schliesslich alle Glieder der harmonischen Reihe mit Ausnahme der 1 und man behält $x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots\right) = 1$, beziehungsweise

$$x - 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots.$$

Nun war

$$x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

und zieht man die obere Reihe von der unteren ab, so bleibt Goldbach's Reihe

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots,$$

deren Definition darin besteht, dass die Nenner der sie bildenden Stammbrüche um 1 vermehrt sämmtliche Potenzzahlen liefern, die in der natürlichen Zahlenreihe vorkommen.

Euler setzte ein ähnliches Verfahren fort, mittels dessen er die oben gefundene Reihe von der Summe 1 in zwei andere zerspaltete, deren eine nur mit ungraden Nennern behaftete Brüche enthielt, die zweite nur Brüche graden Nenners. Er fand

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. IX, 160—188.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{31}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\cdots=\log 2,$$
$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\cdots=1-\log 2.$$

In einem weiteren Satze ging Euler von der Leibnizischen Reihe $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$ aus, und dieses dürfte die erste Stelle sein[1], an welcher Euler sich des Buchstabens π für die Zahl $3{,}1415926\cdots$ bediente. Wir wissen, dass sich William Jones 1706 mit eben dieser Bezeichnung versuchte (S. 295), aber ohne Nachahmung blieb. Euler's Beispiel schlug durch, und bald nahm ein Schriftsteller nach dem anderen das π an. Noch eine andere bald allgemein gewordene Bezeichnung schreibt sich von dem in Rede stehenden Aufsatze her, in welchem die erste uns bekannte Benutzung des Buchstaben e für die Basis des natürlichen Logarithmensystems sich findet[2].

Euler blieb bei Reihensummirungen nicht stehen, sondern beschäftigte sich auch mit der Anwendung unendlicher Factorenfolgen[3]. Sei die unendlich grosse Summe der harmonischen Reihe[4] wieder durch x bezeichnet. Von $x=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ zieht Euler $\frac{x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$ ab und behält $\frac{x}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$, eine Reihe, in welcher Stammbrüche geraden Nenners fehlen. Aus ihr folgt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\cdots$, und zieht man diese Reihe neuerdings ab, so erhält man $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$. In den Nennern dieser Reihe fehlen alle durch 2 oder durch 3 theilbare Zahlen. Man sieht, dass in $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x=\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots$ die Nenner der noch vorhandenen Stammbrüche durch 2, 3, 5 untheilbar sein werden, und dass ein ähnliches Verfahren sich dazu eignet, auch die Brüche aus der immer weniger Glieder enthaltenden Reihe zu entfernen, deren Nenner durch die folgenden Primzahlen 7, 11, 13 $\cdots$ theilbar sind. Endlich erscheint $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdots x=1$, beziehungsweise $x=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdots$, wo die unendliche Factorenfolge aus lauter Brüchen $\frac{p}{p-1}$ gebildet

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. IX, 165.
[2] Ebenda T. IX, 187: *posito e pro numero cujus logarithmus hyperbolicus est* 1.
[3] Ebenda T. IX, 172 sqq.. [4] *estque adeo infinitum.*

ist und p alle auf einander folgenden Primzahlen bedeutet. Die harmonische Reihe nähert sich aber, wie Euler in der früheren Abhandlung über dieselbe (S. 640) gezeigt hatte, bei i Gliedern dem Werthe $\log(i+1)$ und bei $i=\infty$ dem Werthe $\log\infty$, der, wiewohl unendlich gross, doch kleiner als jede Potenz des Unendlichgrossen ist, und eben diesen Werth muss man der angegebenen Factorenfolge zuschreiben[1]).

In dem gleichen Bande der Petersburger akademischen Veröffentlichungen findet sich eine theoretisch nicht gar bedeutende Zusammenstellung verschiedener Reihen, welche zur Berechnung von π Anwendung gefunden haben[2]). Euler zieht die Methode der Annäherung durch unendliche Reihen allen anderen vor, wenn die zu benutzenden Reihen zwei Eigenschaften besitzen, die erste rascher Convergenz, so dass nicht viele Glieder in Rechnung gezogen zu werden brauchen, die zweite einfachen Baues der Glieder, so dass deren Einzelberechnung keine übermässige Mühe verursacht. Die Leibnizische Reihe $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ befriedige z. B. in der zweiten, aber nicht in der ersten Beziehung, denn man müsse 10^{50} Glieder in Rechnung ziehen, um π auf 100 Decimalstellen genau zu erhalten. Unter den vortheilhafter zu gebrauchenden Reihen sind einige, deren Herleitung auf dem Gedanken beruht, dessen Machin (S. 350) sich bediente. Euler nennt aber diesen seinen Vorgänger nicht, wiewohl er dessen Zerlegung $\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ ausdrücklich als eine der bequemsten anpreist. Als eine andere vortheilhafte Zerlegung wird $\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{70}+\operatorname{arctg}\frac{1}{99}$ vorgeschlagen. Wir erwähnen auch Euler's Zerlegung $\frac{\pi}{4}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, weil sie mehrfach in Lehrbücher der Analysis Eingang gefunden hat.

Wir schliessen einige Bemerkungen über Dinge an, welche weder nach dem Orte noch nach der Zeit ihrer Entstehung hier vollberechtigt erscheinen, welche aber bekannt zu werden verdienen, und welche wir anderwärts nicht unterzubringen wissen. Um die Mitte des XVII. Jahrhunderts bereits bildete sich in Japan eine mathematische Schule unter dem Einflusse (so glauben japanische Gelehrte[3])) der

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 174: *Erit istius expressionis valor* $=\log\infty$, *quod infinitum inter omnes infiniti potestates est minimum.* [2]) Ebenda T. IX, 222–238. [3]) Briefliche Mittheilung von Prof. D. Kikuchi in Tokio vom 9. Januar 1896.

damals vollzogenen Einführung chinesischer Arithmetik, aber ohne unmittelbare Fühlung mit europäischer Wissenschaft. An der Spitze dieser Schule stand Seki[1] († 1708). Ein handschriftlich gebliebenes Werk *Horu Sankyō* von Matsunga gehört etwa dem Jahre 1739 an[2]. Yamaji verfasste um 1765 ein gleichfalls handschriftlich erhaltenes Werk *Kon Kon no Maki*, in welchem Erfindungen von Seki mitgetheilt werden[3]. Ein Schüler des Yamaji hiess Naomaru Ajima[4]. Er führte Coordinaten in die japanische Mathematik ein, und unser Gewährsmann lässt es dahingestellt, ob man dabei an eine selbständige Nacherfindung oder an fremde Lehren zu denken habe. Enzō Wada[5] mit seinem als Handschrift aufbewahrten Werke *Enri Shinkō* führt bis zum Jahre 1800 herab, und Hasegawa's *Kyūseki Tsūkō* ist gar 1844 gedruckt[6]. Endlich wird uns berichtet[7], dass T. Endō in jüngster Zeit eine Geschichte der japanischen Mathematik in japanischer Sprache vollendet habe, welche dem Drucke entgegensehe. Ob dieses Buch, falls es in eine europäische Sprache übersetzt wird, eine genaue Bestimmung der Entstehungszeit der einzelnen Formeln ermöglichen kann, wissen wir nicht, unser bisheriger Berichterstatter hält eine solche Bestimmung für mindestens sehr schwierig, weil alles in tiefstes Geheimniss gehüllt und nur den wenigen Eingeweihten zugänglich war. Wir müssen dieser Schilderung nach fast an eine um 2000 Jahre verspätete Nachahmung der Pythagoräischen Schule denken.

Die späten Veröffentlichungen beziehen sich auf Reihenentwicklungen für π und für π^2. Sei (Fig. 106) arc $AC = \frac{1}{2}$ arc AB, $CG = EH = d$, $CD = s$, $EF = s_1$. Man hat $AF^2 = EF \cdot FH = s_1(d - s_1)$. Andererseits $AF^2 = \frac{1}{4} AC^2 = \frac{1}{4}(CD^2 + AD^2) = \frac{1}{4}(CD^2 + CD \cdot DG) = \frac{1}{4} CD \cdot CG = \frac{sd}{4}$. Mithin ist $s_1^2 - s_1 d + \frac{1}{4} sd = 0$. Nun fand Seki, welchem diese Entwicklung zugeschrieben wird, eine Reihendarstellung für s_1 aus der angegebenen Gleichung:

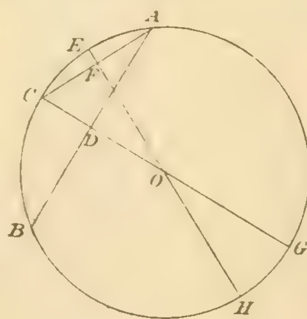


Fig. 106.

$$s_1 = \frac{1}{4} s + \frac{1}{16} \frac{s^2}{d} + \frac{1}{32} \frac{s^3}{d^2} + \frac{5}{256} \frac{s^4}{d^3} + \frac{7}{512} \frac{s^5}{d^4} + \frac{21}{2048} \frac{s^6}{d^5} + \cdots.$$

[1]) D. Kikuchi in der in Tokio erscheinenden Zeitschrift *Tokio Sugaku Butsurigaku Kwai Kiji*. Vol. VII, pag. 107. [2]) Ebenda pag. 53. [3]) Ebenda pag 107. [4]) Ebenda pag 114. [5]) Ebenda pag 47. [6]) Ebenda pag 47. [7]) Ebenda pag. 117.

Eine Herleitung dieser Reihe ist vorläufig nicht mitgetheilt. Man kann sie erhalten, wenn man zuerst $\left(\frac{s_1}{d}\right)^2 - \frac{s_1}{d} = -\frac{1}{4}\frac{s}{d}$ schreibt, dann $\frac{s_1}{d} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{s}{d}}$, die Quadratwurzel $\sqrt{1-\frac{s}{d}}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt $\left(1-\frac{s}{d}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{s}{d} - \frac{1}{8}\left(\frac{s}{d}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{s}{d}\right)^3 - \cdots$ und nach Einsetzung dieses Werthes die ganze Gleichung mit d vervielfacht. Sollte Seki's Verfahren wirklich so gewesen sein, so müsste man entweder seinen mathematischen Geist aufs höchste bewundern oder seine Unabhängigkeit anzweifeln. In der für s_1 gleichviel wie gefundenen Reihe ist das Anfangsglied $\frac{1}{4}s = \frac{s}{2^2}$ mit dem Namen der Urzahl, *original number*, belegt; die nachfolgenden Glieder heissen 1te, 2te, 3te ⋯ Differenz und werden durch Recursionsformeln aus einander erhalten. Nennt man die Urzahl auch nullte Differenz (was der Japaner nicht thut) so entsteht allgemein die $k+1$te Differenz aus der $k$ten durch Multiplication mit $\frac{s}{d}$ und mit einem Zahlenfactor f_{k+1} von der Art, dass $f_1 = \frac{1}{4}$, $f_2 = \frac{1}{2}$, $f_3 = \frac{5}{8}$, $f_4 = \frac{7}{10}$, $f_5 = \frac{3}{4}$, $f_6 = \frac{11}{14}$, $f_7 = \frac{13}{16}$. Allgemein ist $f_{k+1} = \frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+3)(2k+4)}$. Warum nicht $f_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+4}$ als Regel gegeben wird, wird nachher ersichtlich.

Wie die Gleichung $s_1^2 - s_1 d + \frac{1}{4} sd = 0$ die Beziehung der Sagitta des halben Bogens zu der des ganzen Bogens ausdrückt, so muss, wenn $s_2, s_3, s_4, \cdots$ die Sagitta des viertel, achtel, sechszehntel ⋯ Bogens bezeichnen soll, eine Reihe von Gleichungen stattfinden, deren erste heisst $s_2^2 - s_2 d + \frac{1}{4} s_1 d = 0$ oder $s_2^2 - ds_2 + \left(\frac{ds}{16} + \frac{s^2}{64} + \frac{s^3}{128d} + \frac{5s^4}{1024d^2} + \cdots\right) = 0$. Aus ihr findet sich eine Reihe für s_2, die wieder mit einer Urzahl $\frac{s}{16} = \frac{s}{4^2}$ beginnt und sich durch Differenzen fortsetzt, welche abermals durch wiederkehrende Vervielfachung mit $\frac{s}{d}$ und mit Zahlenfactoren entstehen, welche der Reihe nach $\frac{5}{16}, \frac{21}{40}, \frac{143}{224}, \frac{17}{24}, \frac{133}{176}, \frac{575}{728}, \frac{261}{320} \cdots$ heissen.

Allgemein ist jetzt der $k+1$te Factor $\frac{(4(k+1)-1)(4(k+1)+1)}{(4(k+1)+2)(4(k+2))}$.
Ganz allgemein zeigt sich, dass, wenn der ursprüngliche Bogen in n gleiche Theile getheilt ist und die Sagitta zu einem Bogentheile

gesucht wird, diese sich durch eine Reihe berechnet, welche mit einer Urzahl $\frac{s}{n^2}$ beginnt und durch Differenzen sich fortsetzt mittels Multiplication mit $\frac{s}{d}$ und mit Zahlenfactoren von der Form $q_m = \frac{(mn-1)(mn+1)}{\left(mn+\frac{n}{2}\right)(mn+n)} = \frac{2m^2 - \frac{2}{n^2}}{2m^2+3m+1}$, welcher bei $n = \infty$ in $\frac{2m^2}{2m^2+3m+1}$ übergeht.

Zu jeder Sagitta gehört eine Sehne oder Chorda, zu s_r die c_r, wobei, wie oben, $AF^2 = \frac{1}{4}CD\cdot CG$ oder $AC^2 = CD\cdot CG$ war, allgemein $c_{r+1} = \sqrt{s_r d}$ sein muss. Sei nun der ursprüngliche Bogen die halbe Kreisperipherie, c_{r+1} die Sehne zu dem Bogen, der 2^{r+1} mal genommen den Halbkreis liefert, so ist $2^{r+1}c_{r+1} = 2\cdot 2^r\sqrt{s_r d}$ ein Näherungswerth für den Halbkreis $\frac{\pi d}{2}$, beziehungsweise $4\cdot 2^{2r}s_r d$ ein Näherungswerth für dessen Quadrat $\frac{\pi^2 d^2}{4}$. Nun sei $2^r = n$ und für s_r entsteht eine mit $\frac{s}{2^r}$ als Urzahl beginnende Reihe. Diese Reihe muss mit $4\cdot 2^{2r}\cdot d$ vervielfacht werden, um $\frac{\pi^2 d^2}{4}$ zu liefern, oder mit anderen Worten $\frac{\pi^2 d^2}{4}$ ist die Summe einer Reihe, in welcher die Factoren, welche die einzelnen Differenzen hervorbringen, wie oben $\frac{2(mn-1)(mn+1)s}{(2m^2+3m+1)n^2 d}$ heissen, die Urzahl aber $4\cdot 2^{2r}\cdot d\cdot\frac{s}{2^{2r}} = 4ds$ ist. So entsteht:

$$\frac{\pi^2 d^2}{4} = 4ds\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{d}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{s^2}{d^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{s^3}{d^3}+\cdots\right].$$

Beim Halbkreise, von welchem hier ausgegangen wird, ist $s = \frac{d}{2}$, also $4ds = 2d^2$, $\frac{s}{d} = \frac{1}{2}$ und $\frac{\pi^2 d^2}{4} = 2d^2\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{4}\right.$ $\left.+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{8}+\cdots\right]$, beziehungsweise

$$\frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots.$$

Diese ganze Folge von Schlüssen soll, wie gesagt, der Hauptsache nach bis auf Seki zurückführen, bis zu der Zeit, in welcher Newton den binomischen Lehrsatz zuerst auf die Ausziehung von Quadratwurzeln anwandte. Seki's Nachfolger gaben alsdann Reihen für Bruchtheile von π selbst, die, ihrer Herleitung nach gleichfalls geometrisch, wieder so aufgefasst werden, dass sie mit einer Urzahl

beginnen, aus welcher die Differenzen durch fortgesetzte Vervielfachung mit einem Gesetze gehorchenden Factoren gebildet werden. So soll z. B.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 8} - \frac{1}{7 \cdot 16} - \frac{5}{9 \cdot 128} - \cdots$$

eine japanische Reihe sein.

Gehen wir nach dieser Einschaltung zu Euler's nächster Abhandlung *(Consideratio progressionis cujusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae*[1]) über, so finden wir hier die erste Andeutung einer später als sehr merkwürdig erkannten Reihenart, nämlich der halbconvergenten Reihen. Da $\int_0^t \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t$, so meint Euler, man könne das Integral in eine Summe zahlreicher sehr kleiner Glieder umwandeln, indem man $dt = \frac{t}{n}$ und t der Reihe nach mit den Werthen $\frac{1 \cdot t}{n}, \frac{2 \cdot t}{n}, \cdots \frac{n \cdot t}{n}$ versehen in Rechnung ziehe, ein Gedanke, dem wir schon bei Kepler (Bd. II, S. 757) begegnet sind, der ihn zum Nachweis der Richtigkeit der Gleichung $\int_0^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi = 1 - \cos\varphi$ benutzte. Euler setzt also $\operatorname{arctg} t \sim \frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \cdots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$, eine annähernde Gleichung, die um so richtiger ist, je grösser n gewählt wird, immer aber an einem wenn auch geringen Ueberschuss von $\operatorname{arctg} t$ über die Summe der rechtsstehenden Reihe leidet. Die genaue Summe nennt er s und entwickelt die einzelnen Reihenglieder durch Division selbst wieder in unendliche Reihen: $\frac{nt}{n^2+t^2} = \frac{t}{n} - \frac{t^3}{n^3} + \frac{t^5}{n^5} - \frac{t^7}{n^7} + \cdots$, $\frac{nt}{n^2+4t^2} = \frac{t}{n} - \frac{2^2t^3}{n^3} + \frac{2^4t^5}{n^5} - \frac{2^6t^7}{n^7} + \cdots$, $\frac{nt}{n^2+9t^2} = \frac{t}{n} - \frac{3^2t^3}{n^3} + \frac{3^4t^5}{n^5} - \frac{3^6t^7}{n^7} + \cdots$, $\frac{nt}{n^2+n^2t^2} = \frac{t}{n} - \frac{n^2t^3}{n^3} + \frac{n^4t^5}{n^5} - \frac{n^6t^7}{n^7} + \cdots$. Man fasse die Glieder der neuen Reihen, welche gleiche Potenzen von $\frac{t}{n}$ enthalten, zusammen, so entsteht $s = \frac{t}{n}[1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots + n^0] - \frac{t^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2] + \frac{t^5}{n^5}[1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3] - \cdots$. Jede der in eckigen Klammern stehenden n-gliedrigen Reihen hat Jacob Bernoulli (S. 332) in eine Summe vereinigen gelehrt, und wenn Euler sich auch nicht ausdrücklich auf ihn beruft, so benutzt er doch Bernoulli's Formeln,

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 116—127.

über welche er in einer Beziehung hinausgeht. Während Bernoulli sich an den fünf ersten Bernoulli'schen Zahlen genügen liess, benutzt Euler noch sieben weitere, im Ganzen also zwölf Bernoulli'sche Zahlen.

Der Anfang der Darstellung von s heisst also jetzt: $s = \frac{tn}{n} - \frac{t^3}{n^3}\left[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right] + \frac{t^5}{n^5}\left[\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\right] - \cdots = t - \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{2n} + \frac{t^3}{6n^2}\right] + \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^5}{2n} + \frac{t^5}{3n^2} - \frac{t^5}{30n^4}\right] - \cdots$. Eine Umordnung der Glieder, so dass diejenigen zusammengefasst werden, welche gleichhohe Potenzen von n im Nenner besitzen, führt zu $s = \left[\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots\right] - \frac{t^2}{2n}[t - t^3 + t^5 - t^7 + \cdots] - \frac{t^2}{6n^2}[t - 2t^3 + 3t^5 - 4t^7 + \cdots] - \frac{t^4}{30n^4}[t - 5t^3 + 14t^5 - 30t^7 + \cdots] - \frac{t^6}{42n^6}\left[t - \frac{28}{3}t^3 + 42t^5 - 132t^7 + \cdots\right]$ u. s. w. Das Gesetz, welches die in der letzten Anordnung mit $\frac{t^m}{Nn^m}$ vervielfachte in Klammern eingeschlossene Reihe befolgt, wird ohne weitere Begründung angegeben. Es lässt diese Reihe in der Gestalt $t - \frac{(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3}t^3 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}t^5 - \cdots$ erscheinen. Aber ihre für jeden positiven Werth von m unendliche Gestalt behagt Euler nicht, und er nimmt eine geradezu verblüffende Umformung mit ihr vor.

Heisst ihre Summe v, so wird $mv = mt - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^3 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}t^5 - \cdots = \frac{(1 - t\sqrt{-1})^{-m} - (1 + t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}$, eine Gleichung, welche unter der Voraussetzung, man dürfe die $(-m)^{\text{te}}$ Potenz ohne weiteres nach der binomischen Formel entwickeln, sich als richtig erweist.

Nun ist weiter $\frac{(1 - t\sqrt{-1})^{-m} - (1 + t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \left(\frac{1}{(1 - t\sqrt{-1})^m} - \frac{1}{(1 + t\sqrt{-1})^m}\right) = \frac{(1 + t\sqrt{-1})^m - (1 - t\sqrt{-1})^m}{2(1 + t^2)^m\sqrt{-1}}$ und unter abermaliger Anwendung des binomischen Satzes auf die im Zähler vorkommenden Potenzgrössen entsteht $mv = \frac{1}{(1 + t^2)^m} \times \left[\frac{m}{1}t - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^3 + \frac{m(m-1)\cdots(m-4)}{1 \cdot 2 \cdots 5}t^5 - \cdots\right]$, d. h. v ist jetzt durch eine Reihe gegeben, welche von selbst abbricht, so oft m eine ganze positive Zahl ist. Diese Umformung liefert als Endergebniss $s = \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots\right) - \frac{t^3}{2n(1 + t^2)} - \frac{t^2}{2 \cdot 6n^2(1 + t^2)^2} \cdot \frac{2t}{1} - \frac{t^4}{4 \cdot 30n^4(1 + t^2)^4}\left(\frac{4t}{1} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^3\right) - \cdots$. Die Annahme $t = 1$, also

$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, liefert endlich die Formel $\pi = \frac{4n}{n^2+1} + \frac{4n}{n^2+4} + \frac{4n}{n^2+9} + \cdots + \frac{4n}{n^2+n^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{42} \frac{1}{2^2 \cdot 3 n^6} + \frac{5}{66} \frac{1}{2^4 \cdot 5 n^{10}} - \cdots$, welche um so mehr convergire, je grösser n gewählt werde[1]).

Unmittelbar an diese Aeusserung anschliessend beginnt Euler einen neuen Paragraphen seiner Abhandlung mit den Worten: Wenn auch diese Reihe um so mehr zu convergiren scheint, je grösser n ist, so convergirt sie doch stets nur bis zu einem gewissen Gliede, und nach diesem wachsen die Glieder wieder; deshalb taugt es nicht, die Reihe bis dahin anzuwenden, wo die Glieder zu divergiren beginnen, sondern es wird nützlich sein, das Verfahren da einzustellen, wo die grösste Convergenz beobachtet wird. Ist nämlich von den Brüchen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66} \cdots$ derjenige, dem der Stellenzeiger ν zukommt, $= X$ und der nächstfolgende $= Y$, so ist fortwährend $\frac{Y}{X} > \frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{2\pi^2}$ und bei ins Unendliche wachsendem ν wird $\frac{Y}{X} = \frac{\nu^2}{\pi^2}$. Daraus erkennt man, dass die Reihenglieder in beständig höherem Maasse wachsen, so dass keine noch so sehr convergirende geometrische Progression, mit ihnen in Verbindung gebracht, sie zum Convergiren bringen kann.

Euler hat also eingesehen, dass die Bernoulli'schen Zahlen schneller als in geometrischem Verhältnisse wachsen, und dass vermöge dieser Eigenschaft die am Anfang convergente Reihe später der Divergenz verfällt. Er hilft sich dann bei der Anwendung dieser Reihen, indem er die neuerdings anwachsenden Glieder durch ein Restglied ersetzt, von welchem er nicht erläutert, wie er dazu gelangt ist, wenn man auch unschwer errathen kann, dass er sich dazu der Formel $1 - \frac{4\mu^2}{\pi^4 n^4} + \left(\frac{4\mu^2}{\pi^4 n^4}\right)^2 - \cdots = \frac{1}{1 + \frac{4\mu^2}{\pi^4 n^4}}$ bediente, ohne die Divergenz der hier auftretenden geometrischen Reihe bei $4\mu^2 > \pi^4 n^4$ in Erwägung zu ziehen. Und doch sagt Euler nur wenige Seiten später[2]), man könne bei Anwendung divergenter Reihen nicht vorsichtig genug verfahren, während es ihm abermals nur eine Seite später nicht darauf ankommt, den Satz auszusprechen[3]), dass alle geometrischen Progressionen nach vorwärts und rückwärts ins Unendliche fortgesetzt die Summe 0 haben.

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 121: *quae series eo magis convergit quo magis numerus pro n accipiatur.* [2]) Ebenda T. XI, 125: *Ex his satis perspicitur, quam caute circa summationem serierum divergentium versari oportet.* [3]) Ebenda T. XI, 126—127, § 20.

Da nämlich $\frac{n}{1-n} = n + n^2 + n^3 + \cdots$ und $\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots$, so müsse wegen $\frac{n}{1-n} + \frac{n}{n-1} = 0$ auch $\cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + \cdots = 0$ sein. Wir erinnern uns, dass Stirling (S. 628) dieselbe beiderseits ins Unendliche sich erstreckende Reihe mit ihren bei $n = 1$ unendlich grossem Werthe ins Auge gefasst hatte. Es kann wohl sein, dass Euler dort die Anregung fand, auf das eigenthümliche Gebilde zu achten. Jedenfalls aber wird es unseren Lesern durch die erwähnten Widersprüche deutlicher als bisher hervorgetreten sein, in welcher Unklarheit sich Euler damals über die Begriffe von Reihenconvergenz und Divergenz befand.

Euler hatte im VII. Bande der Petersburger Commentarien die Summe reciproker Potenzen der in der Zahlenreihe auf einander folgenden Zahlen untersucht und mittels der in unendlich viele Factoren zerlegten Sinusreihe gefunden (S. 636—637). Er hatte im VIII. Bande derselben Sammlung seine Summenformel abgeleitet, ohne in den in ihr auftretenden Coefficienten ein Gesetz erkennen zu können (S. 643). Euler hat sich niemals mit einem negativen Ergebnisse zufrieden gegeben. Im XII. Bande kehrte er mit den Betrachtungen über einige Reihen, *De seriebus quibusdam considerationes*[1]), zu den gleichen Fragen zurück. Ist s ein Kreisbogen und $y = \sin s = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$, sind dann wieder $a, b, c \cdots$ die Wurzeln der aus der Sinusreihe gebildeten Gleichung $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3 y} - \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 y} + \cdots$, schreibt man α für die Summe dieser Wurzeln, $\beta, \gamma, \delta \cdots$ für die Summe ihrer Producte zu zweien, dreien, vieren $\cdots$, setzt man dann, ungleich der früheren Bezeichnung, $a + b + c + d + \cdots = A$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \cdots = B$, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \cdots = C$ u. s. w., so erhält man $A = \alpha$, $B = \alpha A - 2\beta$, $C = \alpha B - \beta A + 2\gamma$ u. s. w., Ergebnisse, welche von den früheren nur in Bezug auf die grossen Buchstaben abweichen. Nun tritt aber neu hinzu, dass eben diese grossen Buchstaben als Coefficienten einer recurrenten Reihe erkannt werden, indem $\frac{\alpha - 2\beta z + 3\gamma z^2 - 4\delta z^3 + \cdots}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \cdots} = A + Bz + Cz^2 + \cdots$ ist, wie einfache Division bestätigt. Euler geht dann noch einen wichtigen Schritt weiter. Er setzt den Nenner des hier benutzten Bruches $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \cdots = Z$, so wird der Zähler sofort $= -\frac{dZ}{dz}$ und demnach $A + Bz + Cz^2 + \cdots = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$. Ausser durch Z lässt sich aber $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \cdots$

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1740. T. XII, 53—96.

auch noch durch $1 - \frac{1}{y}\sin z$ bezeichnen, wie aus der geschilderten Entstehung der $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ hervorgeht. Ist demnach $Z = 1 - \frac{1}{y}\sin z$ und y dabei constant, so wird $\frac{dZ}{dz} = -\frac{1}{y}\cos z$ und $-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$ $= \frac{\frac{1}{y}\cos z}{1 - \frac{1}{y}\sin z} = \frac{\cos z}{y - \sin z}$, mithin gefunden $A + Bz + Cz^2 + \cdots$ $= \frac{\cos z}{y - \sin z}$. Wir bemerken dabei, dass Euler statt $\sin z$ und $\cos z$ die Schreibweise $\sin A \cdot z$ und $\cos A \cdot z$, d. h. sinus arcus z, cosinus arcus z hat, und dass der Abkürzungsbuchstabe A, abgesehen davon, dass ihm ein Pünktchen folgt, genau so aussieht, wie der Coefficient A, wodurch man sich beim Lesen der Abhandlung nicht irre machen lassen darf. Wird $y = 1$, also das frühere $s = \frac{\pi}{2}$ angenommen, so entsteht $A + Bz + Cz^2 + \cdots = \frac{\cos z}{1 - \sin z}$, und kann man $\frac{\cos z}{1 - \sin z}$ in eine nach Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickeln, so sind damit die Coefficienten $A, B, C \cdots$ gegeben, denn eine zweite Reihe $P + Qz + Rz^2 + \cdots$, welche aus demselben geschlossenen Ausdruck sich herleitete, ohne dass $P = A$, $Q = B$, $R = C \cdots$ wäre, ist unmöglich[1].

Beiläufig bemerkt, dürfte dieses die erste Stelle sein, an welcher der der Methode der unbestimmten Coefficienten zu Grunde liegende Gedanke deutlich ausgesprochen ist.

Jene gewünschte Reihe verschafft sich Euler so. Es ist $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)$, ferner $1 - \sin z$ $= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2$ $- \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)^2$, also $\frac{\cos z}{1 - \sin z} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)$ und dieser Ausdruck muss der Reihe $A + Bz + Cz^2 + \cdots$ entsprechen, welche Euler jetzt durch s bezeichnet, wofür wir lieber σ schreiben, um jede Verwechslung mit dem früheren s zu vermeiden. Aus $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) = \sigma$ folgt aber $\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} = \operatorname{arctg}\sigma$, und durch Differentiation nach z erhält man $\frac{1}{2} = \frac{\frac{d\sigma}{dz}}{1 + \sigma^2}$, $1 + \sigma^2 = 2\frac{d\sigma}{dz}$, $1 + (A + Bz + Cz^2 + \cdots)^2 = 2(B + 2Cz + 3Dz^2 + \cdots) = 2B$ $+ 4Cz + 6Dz^2 + \cdots$. Nun endlich findet Euler durch Ausführung der links vom Gleichheitszeichen geforderten Quadrirung, und durch

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1740. T. XII, 61.

Gleichsetzung der auf beiden Seiten auftretenden z^k enthaltenden Glieder unter Berücksichtigung des schon bekannten Werthes $A = 1$ die zwischen $A, B, C \cdots$ stattfindenden Beziehungen $A = 1$, $B = \frac{A^2 + 1}{2}$, $C = \frac{2AB}{4}$, $D = \frac{2AC - B^2}{6}$ u. s. w.

Wir können unmöglich über alle weitere Entwicklungen berichten. Wir müssen uns begnügen, aus dem Zusammenhange herausgerissen, zu sagen, dass im § 16 von trigonometrischen Functionen mit imaginärem Argumente und ihnen gleichen Exponentialausdrücken mit reellen Exponenten die Rede ist[1], dass z. B. $\frac{\alpha\sqrt{-1}}{\sin(\alpha\sqrt{-1})} = \frac{2\alpha e^{\alpha}}{e^{2\alpha} - 1}$ erkannt ist, wenn auch die Bezeichnung weniger einfach gewählt ist. Wir erwähnen ferner, dass die Summen der reciproken Potenzen der ganzen Zahlen mit graden Exponenten bis zur Summe der reciproken 24ten Potenzen ausgerechnet sind[2]) und zwar jeweils in der Form $\frac{1}{1^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \cdots = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k+1)} A_{2k}$, wo aber Euler auch wieder insofern etwas anderer Bezeichnung sich bedient, als er da, wo wir durch Anwendung des Stellenzeigers k verallgemeinerten, die besonderen Zahlenwerthe anschreibt, auch wo es um die A_{2k} sich handelt. Statt $A_2, A_4, A_6, A_8 \cdots$ findet man also bei Euler $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{10} \cdots$. Die allgemeine Summenformel endlich erhält durch Anwendung dieser Zahlen eine etwas andere Gestalt[3]): $S = \int X dx + \frac{X}{2} + \frac{A_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{dX}{dx} - \frac{A_4}{1 \cdot 2 \cdots 5} \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{A_6}{1 \cdot 2 \cdots 7} \frac{d^5X}{dx^5} + \cdots$.

Die Zeitfolge führt uns zu einem ganz hervorragenden umfangreichen Werke, welches 1742 in Edinburgh die Presse verliess, zu dem *Treatise of fluxions* von Maclaurin. Wir werden im 112. und im 118. Kapitel über dasselbe zu berichten haben, zunächst besprechen wir nur die Stellen, welche für die Reihenlehre von Wichtigkeit sind. Dazu gehört mittelbar der Satz[4]), dass die auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Curve $y = \frac{Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots}{ax^n + bx^{n-1} + \cdots}$ unter der Voraussetzung $n > m$ die Abscissenaxe zur Asymptote habe, dass aber der Flächeninhalt zwischen einer Anfangsordinate, der Curve und der Abscissenaxe nur dann ein endlicher sei, wenn $n > m + 1$, dagegen ein unendlich grosser, wenn $n < m + 1$. Auf ihn beruft sich nämlich Maclaurin[5]), wo er die Summirung einer Reihe zur Aus-

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1740. T. XII. 65—66. [2] Ebenda T. XII. 73—74. [3] Ebenda T. XII. 74—75. [4]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 272—273. § 327. [5] Ebenda pag. 289—304. § 350—362.

messung eines Flächenraums von der genannten Gestalt in Beziehung setzt. Seien (Fig. 107) die Absissenstücke $AB = BC = CH = HI = \cdots = 1$ und die Ordinaten $AF, BE, CK, HL \cdots$ die einzelnen

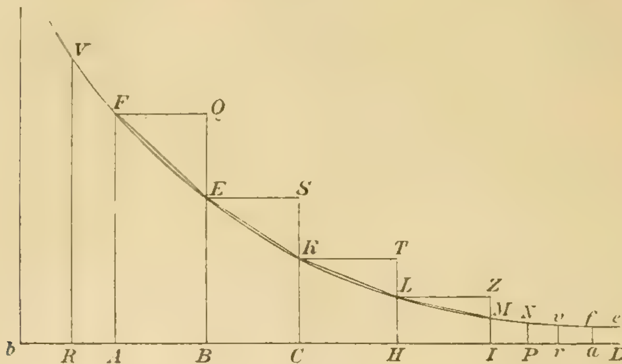


Fig. 107.

Reihenglieder, so ist die Reihensumme gleich der Snmme der Rechtecke $AQ + BS + CT + HZ + \cdots$. Diese Rechtecke sind aber zusammen grösser, als die von der Curve $FEKL \cdots$ mit AF und AD gebildete Fläche, welche selbst wieder, wie man durch gedachte Verlängerung der $SE, TK, ZL \cdots$ nach links sich leicht überzeugt, grösser ist als $BS + CT + HZ + \cdots$. Je nachdem man also die Curvenfläche endlich oder unendlich findet, wird das Gleiche für die Reihensumme gelten müssen. Wird ferner in Erwägung gezogen, dass die gradlinigen Dreiecke $FQE, ESK, KTL, LZM \cdots$ den Hauptheil des Ueberschusses der Rechteckssumme $AQ + BS + CT + HZ + \cdots$ über die Curvenfläche ausmachen und zusammen der Hälfte des Rechtecks AQ gleichkommen, so wird jene Rechteckssumme, d. h. die vorgelegte Reihe, annähernd eben so gross sein, wie die um das halbe erste Reihenglied vermehrte Curvenfläche. Es sind das die gleichen Gedanken, welche zum Theil Newton (S. 193), welche genauer Euler 1736 ausgesprochen hatte (S. 640—641). Als dem Zwecke der Reihensummirung noch näher kommend wird dann eine Umformung vorgeschlagen[1], welche zur Reihensummirung unter Ausrechnung von verhältnissmässig nur wenigen Gliedern führt, und welche mit der Euler'schen Summenformel (S. 635) übereinstimmt. Eine Herleitung verspart sich Maclaurin auf den zweiten Band.

Maclaurin macht dann darauf aufmerksam, dass, wenn $A, B, C, D \cdots$ die Glieder einer Reihe sind, und wenn man deren Differenzen bildet, eben diese Differenzen $A - B$, $B - C$, $C - D \cdots$ eine neue Reihe

[1] Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 292—293, § 352—353.

darstellen, deren Summe der Unterschied zwischen dem ersten und dem letzten Gliede der ursprünglichen Reihe ist. Nehmen die Glieder der ursprünglichen Reihe unter jeden angebbaren Werth ab[1], so bleibt ihr erstes Glied allein als Summe der Differenzenreihe, z. B. $1=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$; $\frac{1}{1\cdot 2}=\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\cdots=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$. Dieses Verfahren sei im Wesentlichen schon von Jacob Bernoulli (S. 88 flgg.) benutzt worden und habe auch in den Händen von Taylor, von Nicole, von Stirling Dienste erwiesen. Maclaurin selbst bedient sich desselben noch bei zahlreichen verwickelteren Betrachtungen.

Die Verwandlung eines Ausdruckes in eine Reihe, mithin die der Reihensummirung als Umkehrung gegenüberstehende Aufgabe, kommt bei Integrationen in Betracht[2]. Kann das Integral nicht genau als algebraischer Ausdruck angegeben werden, so muss man es durch eine convergirende Reihe ausdrücken[3]. Wie das zu geschehen hat, ist verschieden. In sehr vielen Fällen genügt ein Divisionsverfahren, wie z. B. bei $\frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\cdots$, wo unter der Voraussetzung eines gegen a sehr kleinen x wenige Anfangsglieder der Reihe ihrem Gesammtwerthe nahezu gleich sind[4]. Differentiation führt gleichfalls nicht selten zur Reihenentwicklung, und als Beispiel dient für Maclaurin der binomische Lehrsatz Newton's[5]. Ist n ganz beliebig, so wird gleichwohl für $(1+x)^n$ eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe vorausgesetzt werden dürfen, deren von x freies Anfangsglied 1 heisst. Man wird annehmen dürfen $(1+x)^n=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots$. Differentiation nach x liefert nach einander

$$n(1+x)^{n-1}=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdots$$
$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=2B+2\cdot 3Cx+3\cdot 4Dx^2+\cdots$$
$$n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}=2\cdot 3C+2\cdot 3\cdot 4Dx+\cdots$$
. . . .

Setzt man überall $x=0$, so rechtfertigt sich einestheils der An-

---

[1] Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 293, § 354: *If the terms of the first series decrease in such a manner that by continuing the progression they may become less than any quantity how small soever that can be assigned.* [2]) Ebenda pag. 604—607, § 745—747. [3]) *When a fluent cannot be represented accurately in algebraic terms, it is then to be expressed by a converging series.* [4]) *In that case a few terms at the beginning of the series will be nearly equal to the value of the whole.* [5] Ebenda pag. 607—608, § 748.

fang der für $(1+x)^n$ angenommenen Reihe mit 1 und ergiebt sich anderntheils $n = A$, $n(n-1) = 2B$, $n(n-1)(n-2) = 6C$ u. s. w., d. h. $A = n$, $B = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, $C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots$. Aehnlich wird unmittelbar darauf der polynomische Lehrsatz[1]) hergeleitet, für dessen Erfindung auf De Moivre verwiesen ist (S. 83).

Die obige Herleitung des Binomialsatzes hat allerdings neben anderen Erfordernissen, deren Erkennung erst späteren Zeiten angehört, unter allen Umständen zur Voraussetzung, dass die Auffindung des Differentialquotienten von $(1+x)^n$ nach x als $n(1+x)^{n-1}$ nicht selbst mittels des Binomialsatzes stattgefunden habe, und diese Vorsicht hat Maclaurin geübt. Seine Herleitung jenes Differentialquotienten[2]) geht aus von der Ungleichung $nE^{n-1} > \frac{E^n - F^n}{E - F} > nF^{n-1}$, sofern $E > F > 0$ und n ganzzahlig positiv. Aus ihr folgt $\frac{(A+a)^n - A^n}{(A+a) - A}$ $> nA^{n-1}$ und $\frac{A^n - (A-a)^n}{A - (A-a)} < nA^{n-1}$ oder $(A+a)^n - A^n > naA^{n-1}$ $> A^n - (A-a)^n$. Mit anderen Worten: die n^{ten} Potenzen positiver Zahlen wachsen in der Weise, dass ihre Differenzen fortwährend zunehmen. Ist nun a die Fluxion von A, so muss naA^{n-1} die Fluxion von A^n sein, weil die Annahme einer Fluxion $naA^{n-1} + r$ ebenso wie die Annahme einer Fluxion $naA^{n-1} - r$ zu Widersprüchen führt. Sei nämlich $\sqrt[n-1]{A^{n-1} + \frac{r}{na}} - A = o$, so folgt $naA^{n-1} + r$ $= na(A+o)^{n-1}$, d. h. der Quotient der Fluxionen von A^n und von A ist $n(A+o)^{n-1}$. Denkt man sich ein $u < o$ als Fluxion von A, so muss demgemäss die entsprechende Fluxion von A^n sich als $nu(A+o)^{n-1}$ erweisen. Nach dem Vorausgeschickten ist $nu(A+o)^{n-1}$ $> nu(A+u)^{n-1} > (A+u)^n - a^n$, und doch kann die Fluxion von A^n als Grenze von $(A+u)^n - A^n$ nicht grösser als diese Differenz selbst sein, welche bewiesenermaassen zugleich mit u zunimmt, der angekündigte Widerspruch ist mithin aufgedeckt. Aehnlich ist der Beweis, dass auch $naA^{n-1} - r$ nicht die Fluxion von A^n sein kann, und demnach ist in der That naA^{n-1} die genannte Fluxion, wenn nur n eine ganze positive Zahl ist. Ist dagegen $\frac{m}{n}$ der Exponent von A und $A^{\frac{m}{n}} = K$, $A^m = K^n$, und ist a die Fluxion von A, k die von K, so ist $maA^{m-1} = nkK^{n-1}$, sowie $k = \frac{m}{n} a \frac{A^{m-1}}{K^{n-1}}$

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 608, § 749. [2]) Ebenda pag. 583—586, § 710—714.

$= \frac{m}{n} a A^{m-1} : A^{m-\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} a A^{\frac{m}{n}-1}$. Ist dann weiter $A^{-r} = K$ oder $A^r \cdot K = 1$, so folgt durch Fluxionsbildung $raA^{r-1}K + kA^r = 0$ nebst $k = -ra\frac{K}{A} = -raA^{-r-1}$. Auf den Fall eines irrationalen Exponenten wird nicht Rücksicht genommen.

Wir unterbrechen hier einen Augenblick unseren Bericht über Maclaurin's Werk, um einem am 6. Mai 1742 der Royal Society vorgelegten Aufsatze[1] eine Erwähnung zu gönnen. Johann De Castillon hat damals den binomischen Lehrsatz mit einem Beweise versehen. Bei der Entwicklung von $(p+q)^m$ müssen, sagt er, unter Annahme eines positiven ganzzahligen m die Glieder p^m, $p^{m-1}q$, $p^{m-2}q^2$, $\cdots q^m$, im Ganzen $m+1$ Glieder vorkommen. Vervielfacht man $(p_1+q_1)(p_2+q_2)\cdots(p_m+q_m)$, so entstehen 2^m Glieder und $2^m > m+1$. Daraus folgt, dass beim Uebergange des Productes in eine Potenz, d. h. wenn alle p unter sich und alle q unter sich gleich werden, gewisse Glieder identisch werden müssen. Das Glied $p^s q^t$ (wo $s+t=m$) wird so oft vorkommen, als s Elemente p und t Elemente q permutirt werden können, d. h. $\frac{(s+t)(s+t-1)(s+t-2)\cdots 1}{s(s-1)\cdots 1 \cdot t(t-1)\cdots 1}$ mal. Man kann auch von einer Potenzentwicklung auf die nächsthöhere schliessen mittels $(p+q)^m = (p+q)(p+q)^{m-1}$ und so unter Voraussetzung von $(p+q)^2 = p^2+2pq+q^2$ zu dem gleichen Ergebnisse gelangen[2]. Wird $m = \frac{r}{n}$ und $(p+q)^{\frac{r}{n}} = Ap^{\frac{r}{n}} + Bp^{\frac{r}{n}-1}q$ $+ Cp^{\frac{r}{n}-2}q^2 + \cdots$, ein versuchsweiser Ansatz, dessen Berechtigung keinerlei Begründung erhält, so folgt $(p+q)^r = \left(Ap^{\frac{r}{n}} + Bp^{\frac{r}{n}-1}q\right.$ $\left.+ Cp^{\frac{r}{n}-2}q^2 + \cdots\right)^n$ oder $p^r + rp^{r-1}q + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}p^{r-2}q^2 + \cdots = A^n p^r$ $+ nA^{n-1}Bp^{r-1}q + nA^{n-1}Cp^{r-2}q^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}A^{n-2}B^2p^{r-2}q^2$ $+ \cdots$ und durch Gleichsetzung der in Bezug auf p und q identischen Glieder zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens erhält man $A = 1$, $nB = r$ und $B = \frac{r}{n}$, $nC + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \frac{r(r-1)}{2}$ und $C = \frac{r(r-n)}{2n^2}$ $= \frac{\frac{r}{n}\left(\frac{r}{n}-1\right)}{1\cdot 2}$ u. s. w. Wird der Exponent negativ, so begnügt sich De Castillon mit Andeutung der in der Potenzirung alsdann mit enthaltenen Division, welche wiederum zu den durch den binomischen Lehrsatz geforderten Coefficienten führe. Der Vergleich von

[1] P. T. XLII, 91—98. [2] Ebenda XLII, 94.

De Castillon's Schlüssen mit denen Maclaurin's fällt sehr zu Ungunsten des ersteren aus.

Noch drei Jahre später begnügte sich Kästner in einem Programme über den Binomialsatz (Leipzig 1745) nun gar mit dem Beweise des einfachsten Falles bei ganzzahlig positivem Exponenten. Er nahm die Entwicklung von $(a+b)^m$ als gegeben an, vervielfachte mit $a+b$, ähnlich wie es De Castillon beiläufig gethan hatte, und zeigte die Uebereinstimmung des Productes $(a+b)(a+b)^m$ mit der Entwicklung von $(a+b)^{m+1}$. Aber $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ steht in vollem Einklange mit dem Binomialsatze, also gehorchen auch die folgenden Potenzen dem gleichen Gesetze. Als Erfinder der hier benutzten Schlussweise der vollständigen Induction nannte Kästner bei dieser Gelegenheit Jacob Bernoulli. Das Erstlingsrecht Pascal's war ihm augenscheinlich unbekannt.

Hatte sich Maclaurin bei seinem Beweise für den binomischen Lehrsatz des Hilfsmittels bedient, eine Reihenentwicklung für $(1+x)^n$ vorläufig anzusetzen und durch wiederholte Differentiation nebst Einsetzung von $x=0$ die Reihencoefficienten zu bestimmen, so führte ihn genau der gleiche Weg zu derjenigen Entwicklung, welche den Namen der Maclaurin'schen Reihe[1]) erhalten hat, und von welcher Maclaurin selbst erklärt, sie finde sich bereits in Taylor's *Methodus incrementorum*, womit er eigentlich ein wenig zu weit geht (S. 367—368). Bei unserem Berichte ersetzen wir die Fluxionspünktchen und die Buchstaben $E, \dot{E}, \ddot{E}, \dddot{E} \cdots$, welche die Werthe bezeichnen, die y (eine an sich beliebige Funktion von z) und dessen Ableitungen unter der Voraussetzung $z=0$ annehmen, durch die heute gebräuchliche Schreibweise bestrichelter Functionalzeichen. Wir setzen also in Maclaurin's Geiste, aber abweichend von seiner Bezeichnung, $y = f(z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ und die Ableitungen $f'(z) = B + 2Cz + 3Dz^2 + \cdots$, $f''(z) = 2C + 2\cdot 3Dz + \cdots$, $f'''(z) = 2\cdot 3D + \cdots$. Die Substitution $z=0$ bringt $f(0) = A$, $f'(0) = B$, $f''(0) = 2C$, $f'''(0) = 2\cdot 3D$, $\cdots$ beziehungsweise $A = f(0)$, $B = f'(0)$, $C = \frac{f''(0)}{1\cdot 2}$, $D = \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\cdots$ hervor, und so ist gefunden $f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \cdots$. Von einem Restgliede der Reihe ist, wie man sieht, ebensowenig die Rede, als von der Möglichkeit, dass die entstehende unendliche Reihe nicht brauchbar sein könne, und unbesorgt leitet Maclaurin einige allerdings schon bekannte Entwicklungen als Beispiele für die Anwendung seiner Reihe ab.

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 610—611, § 751.

Noch ein letztes Mal kommt Maclaurin unter Benutzung des Taylor'schen Satzes auf Reihen zurück[1]. Es sei uns abermals gestattet, seinen Gedankengang in die unseren Lesern jedenfalls geläufigere Bezeichnung zu kleiden. Nach dem Taylor'schen Satze ist $f(x+z) = f(x) + f'(x)z + \frac{f''(x)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 \cdots$. Wird mit dz vervielfacht und von 0 bis 1 integrirt, so erhält man

$$1.\quad \int_0^1 f(x+z)\,dz = f(x) + \frac{f'(x)}{1\cdot 2} + \frac{f''(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots.$$

Ersetzt man die Function $f(x)$, beziehungsweise $f(x+z)$ durch deren Ableitungen, so entstehen neue Gleichungen in beliebiger Anzahl:

$$2.\quad \begin{cases} \int_0^1 f'(x+z)\,dz = f'(x) + \frac{f''(x)}{1\cdot 2} + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f^{IV}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \\ \int_0^1 f''(x+z)\,dz = f''(x) + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2} + \frac{f^{IV}(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f^{V}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \\ \int_0^1 f'''(x+z)\,dz = f'''(x) + \frac{f^{IV}(x)}{1\cdot 2} + \frac{f^{V}(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{f^{VI}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Vervielfacht man die Gleichungen des Systems 2., wie sie unter einander stehen, mit $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ und addirt sie dann sämmtlich zu 1., so entsteht:

$$3.\quad \int_0^1 f(x+z)\,dz + \alpha\int_0^1 f'(x+z)\,dz + \beta\int_0^1 f''(x+z)\,dz + \gamma\int_0^1 f'''(x+z)\,dz + \cdots$$
$$= f(x) + f'(x)\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \alpha\right) + f''(x)\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2} + \beta\right)$$
$$+ f'''(x)\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\beta}{1\cdot 2} + \gamma\right) + \cdots.$$

Die an sich beliebigen, also zur Erfüllung irgend eines Wunsches sich eignenden Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ bestimmt man so, dass in 3. alle Glieder rechts vom Gleichheitszeichen mit Ausnahme von $f(x)$ in Wegfall kommen, d. h. mittels des Systems

$$4.\quad \begin{cases} \frac{1}{1\cdot 2} + \alpha = 0 \\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2} + \beta = 0 \\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\beta}{1\cdot 2} + \gamma = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

[1] Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 672—675, § 828—831.

wodurch $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{12}$, $\gamma = 0$, $\delta = -\frac{1}{720}$, $\varepsilon = 0$, $\zeta = \frac{1}{30240}\cdots$ sich berechnet und 3. übergeht in

$$5.\quad f(x) = \int_0^1 f(x+z)\,dz - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x+z)\,dz + \frac{1}{12}\int_0^1 f''(x+z)\,dz$$
$$- \frac{1}{720}\int_0^1 f^{\mathrm{IV}}(x+z)\,dz + \frac{1}{30240}\int_0^1 f^{\mathrm{VI}}(x+z)\,dz + \cdots.$$

Die in 5. geforderten Integrationen lassen sich, so oft Differentialquotienten unter dem Integralzeichen stehen, also von $\int_0^1 f'(x+z)\,dz = f(x+1) - f(x)$ an beginnend, leicht vollziehen, und man erhält demnach

$$f(x) = \int_0^1 f(x+z)\,dz \quad \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x)) + \frac{1}{12}(f'(x+1) - f'(x))$$
$$+ \frac{1}{720}(f''(x+1) - f''(x)) + \frac{1}{30240}(f'''(x+1) - f'''(x)) - \cdots.$$

Man kann ein ganzes System ähnlicher Gleichungen aufstellen, indem man x durch $x+1$, durch $x+2\cdots$ ersetzt. Innerhalb der Klammern erscheint dann in jeder folgenden Gleichung als Subtrahend der Minuend der vorhergehenden Substitution, und bei Addition des Gleichungssystems, so dass man links $f(x) + f(x+1) + f(x+2) + \cdots + f(x+n)$ zu stehen bekommt, bleibt rechts in der ersten Klammer $f(x+n+1) - f(x)$ und Aehnliches in den folgenden Klammern. Die den Klammergrössen vorausgehenden bestimmten Integrale vereinigen sich aber auch, denn es ist $\int_0^1 f(x+1+z)\,dz = \int_1^2 f(x+z)\,dz$ u. s. w., also $\int_0^1 f(x+z)\,dz + \int_0^1 f(x+1+z)\,dz + \cdots + \int_0^1 f(x+n+z)\,dz = \int_0^1 f(x+z)\,dz + \int_1^2 f(x+z)\,dz + \cdots + \int_n^{n+1} f(x+z)\,dz = \int_0^{n+1} f(x+z)\,dz = \int_x^{x+n+1} f(z)\,dz$. Man erhält also endlich

$$f(x) + f(x+1) + \cdots + f(x+n) = \int_x^{x+n+1} f(z)\,dz - \frac{1}{2}(f(x+n+1) - f(x))$$
$$+ \frac{1}{12}(f'(x+n+1) - f'(x)) - \frac{1}{720}(f'''(x+n+1) - f'''(x))$$
$$+ \frac{1}{30240}(f^{\mathrm{V}}(x+n+1) - f^{\mathrm{V}}(x)) - \cdots,$$

und das ist, nur deutlicher geschrieben, die Euler'sche Summen-

formel (S. 635). Die Frage liegt allzunahe, ob Maclaurin die Arbeiten seines Vorgängers auf diesem Gebiete im VI. und im VIII. Bande der Abhandlungen der Petersburger Akademie gekannt habe oder nicht, als dass sie nicht aufgeworfen worden wäre. Man hat sie verneinend beantworten zu müssen geglaubt[1], und wir sind auch zu der gleichen Ueberzeugung gekommen. Es ist ja richtig, dass Maclaurin die Veröffentlichungen der Petersburger Akademie offenbar studirt und benutzt hat. Er führt in seinem *Treatise of fluxions* den I., II., III., V. Band der *Commentarii Academiae Petropolitanae* als Quelle an[2], aber eine Erwähnung späterer Bände ist uns nicht bemerklich gewesen. Schon damit ist wahrscheinlich gemacht, dass Maclaurin den VI. und VIII. Band nicht benutzte. Beachtung des Erscheinungsjahres verstärkt die Wahrscheinlichkeit. Der VIII. Band mit Euler's Herleitung der Summenformel gelangte 1741 zur Ausgabe unmittelbar vor, vielleicht gleichzeitig mit dem Drucke des Treatise of fluxions, von seiner Benutzung kann mithin keine Rede sein. Aber auch der VI. Band, in welchem die Formel ohne Herleitung zu finden war, und der 1738 im Druck erschienen ist, wurde von Maclaurin kaum benutzt. Er beruft sich einmal[3] auf eine Abhandlung von Clairaut, welche er einen *late ingenious essay*, einen jüngst veröffentlichten sinnreichen Versuch nennt. Diese Abhandlung gehört den P. T. von 1737 an, und damit dürfte der Endzeitpunkt der von Maclaurin benutzten Literatur bezeichnet sein. Nimmt man hinzu, dass Maclaurin mit Verweisungen keineswegs geizte, und dass endlich die Art, wie er zur Summenformel gelangte, so gut wie keine Aehnlichkeit mit Euler's Gedankengange besitzt, so ist damit Maclaurin's durchaus unabhängige Nacherfindung in unseren Augen wenigstens sichergestellt.

Bis zu einem gewissen Grade gehört auch die sogenannte Simpson'sche Regel zur Reihensummation und mag daher, wenn auch nicht in strenger Einhaltung der Zeitfolge, hier, wo wir über ein englisches Werk berichteten, eingeschaltet werden. Wir erinnern uns, dass Newton schon in den Principien eine Curve als Parabel zu betrachten lehrte (S. 358), dass er später auf den gleichen Gedanken eine angenäherte Quadratur gründete (S. 361—362). Thomas Simpson führte die Anwendung um einen grossen Schritt weiter, indem er eine sehr bequeme Formel angab, welche seinen Namen behalten hat und denselben bekannter machte als manches andere, welches wissenschaftlich bedeutender ist. Die Formel steht in den

---

[1]) Reiff S. 87. [2]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 441 (§ 523), pag 464 (§ 544), pag. 485 (§ 569), pag 671 (§ 826), pag. 691 Note, wo auf einen Euler'schen Aufsatz des V. Bandes hingewiesen ist. [3]) Ebenda pag. 726 (§ 905).

Mathematical Dissertations on a variety of physical and analytical subjects von 1743 und zwar in der Abhandlung *Of the areas of curves etc. by approximation*[1]. Sei abc (Fig. 108) als Bogen einer gewöhnlichen Parabel gedacht und aA, bB, cC als drei gleichweit von einander abstehende zu AJ senkrechte Durchmesser derselben. Weil bB Durchmesser ist und die Sehne ac in r halbirt, wird die Berührungslinie an die Parabel in b der ac parallel sein. Des Weiteren ist nach einer bekannten Eigenschaft der Parabel jedes Parabelsegment $\frac{2}{3}$ des ihm umschriebenen Parallelogramms, also $abcra = \frac{2}{3}\, aSTc$ $= \frac{2}{3}(ASTC - AacC) = \frac{2}{3}\,\frac{AS + CT}{2} \cdot AC - \frac{2}{3}\,\frac{Aa + Cc}{2} \cdot AC$ $= \frac{AC}{3}(2Bb - Aa - Cc)$. Wird das gradlinige Viereck $AacC$ $= \frac{AC}{3}\left(\frac{3}{2}Aa + \frac{3}{2}Cc\right)$ zum Segmente addirt, so entsteht $AabcC$ $= \frac{AC}{3}\left(2Bb + \frac{1}{2}Aa + \frac{1}{2}Cc\right) = \frac{AB}{3}(Aa + 4Bb + Cc)$. Nun kann fortgesetzt jedes folgende Curvenstück cde, efg, ghi als Parabelbogen betrachtet werden, und ist fortgesetzt $AB = BC = CD = DE = EF$ $= FG = GH = HJ$, so erhält man neben

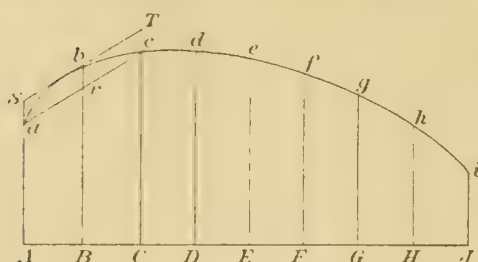


Fig. 108.

$$AabcC = \frac{AB}{3}(Aa + 4Bb + Cc)$$

auch

$$CcdeE = \frac{AB}{3}(Cc + 4Dd + Ee)$$

$$EefgG = \frac{AB}{3}(Ee + 4Ff + Gg)$$

$$GghiJ = \frac{AB}{3}(Gg + 4Hh + Ji)$$

und als Summe $AabcdefghiJ = \frac{AB}{3}[Aa + Ji + 2(Cc + Ee + Gg)$ $+ 4(Bb + Dd + Ff + Hh)]$ und das ist die Simpson'sche Regel. War sie, wie wir oben sagten, auch keineswegs die bedeutendste von Simpson's Leistungen, neu war sie jedenfalls, und nicht jeder Schriftsteller hätte Simpson's Bescheidenheit besessen, der in der Vorrede erklärte[2], sie sei von Newton erfunden, von De Moivre, von Stirling

[1] Simpson, *Mathematical dissertations* pag. 109—119. [2] Ebenda Preface pag. VII.

und anderen vervollkommnet, er nehme für sich nichts in Anspruch als das Recht, den Gegenstand in ein helles und den Leser befriedigendes Licht zu setzen.

Auf das europäische Festland zurückkehrend dürfen wir in aller Kürze auf einen Brief Daniel Bernoulli's an Euler aufmerksam machen, welcher muthmasslich 1741 geschrieben ist, und in welchem wohl erstmals von einem anderen Mathematiker als Euler der Buchstabe e in der Bedeutung der Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems benutzt ist[1].

Euler war seit 1741 in Berlin. Beiträge aus seiner Feder zu dem 1743 gedruckten VII. Bande der *Miscellanea Berolinensia*, wie damals die akademischen Veröffentlichungen dort hiessen, müssen erwähnt werden. Da ist in einem Aufsatze über bestimmte Integrale[2]) die Summe $\sin s + \sin(s+u) + \sin(s+2u) + \cdots + \sin(s+\overline{p-1}\,u)$ gefunden[3]) und nicht minder die Summe $\cos s + \cos(s+u) + \cos(s+2u) + \cdots + \cos(s+(p-1)u)$, welche letztere in doppelter Weise hergeleitet ist[4]), einmal unabhängig von der Formel für die Summe der Sinusse der in arithmetischer Progression wachsenden Bögen, einmal mittels Differentiation dieser ersteren Formel.

Da ist in einer Abhandlung Euler's: *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum*[5]), über die Summen der reciproken Potenzen der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, die frühere Herleitung der gleichen Summe mittels der als Gleichung unendlich hohen Grades betrachteten Sinusreihe (S. 636) bemängelt. Man wisse freilich, dass die Factoren der damals gebildeten Factorenfolge den reellen Wurzeln jener Gleichung entstammen, aber man wisse nicht, ob eben jene Gleichung nicht auch imaginäre Wurzeln besitze, und sei dieses der Fall, so seien alle früheren Folgerungen falsch. In einem Versuche, an die Stelle der als mangelhaft erkannten Gedankenreihe eine einwandfreie zu setzen, ist mit dürren Worten ausgesprochen[6]), dass $e^z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n_{(n=\infty)}$, und dass $\sin s = \frac{e^{s\sqrt{-1}} - e^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Schon 1730 oder 1731 hatte Euler erkannt (S. 633), dass $\left(\frac{1-x^z}{z}\right)_{(z=0)} = -\log x$, und von da an war der Uebergang zur Auffassung der Exponentialgrösse als Grenzwerth angebahnt. Auch der Zusammenhang zwischen trigonometrischen Ausdrücken und Exponentialgrössen mit imaginären Exponenten war Euler nachweis-

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1741—1743. T. XIII, 4. [2]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 129—171. [3]) Ebenda VII, 133. [4]) Ebenda VII, 142—143. [5]) Ebenda VII, 172—192. [6]) Ebenda VII, 177.

lich schon früher nicht entgangen. Er hat 1740 von Formeln Gebrauch gemacht, welche dieses beweisen (S. 655), er hat ein Jahr später, am 9. December 1741, an Goldbach geschrieben[1]: Ich habe letztens auch ein merkwürdiges Paradoxon gefunden, nehmlich, dass der Werth von dieser Expression $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ quam proxime gleich sei $\frac{10}{13}$, und dieser Bruch differirt nur in partibus millionesimis von der Wahrheit. Der wahre Werth aber dieser Expression ist der Cosinus dieses arcus 0,6931471805599, oder des arcus von $39^0\,42'\,51''\,52'''\,9^{IV}$ in einem Circul, dessen Radius = 1. Beide Thatsachen verhindern aber nicht, den Aufsatz von 1743 als erste nicht misszuverstehende deutliche Verkündigung der beiden merkwürdigen Wahrheiten in der Oeffentlichkeit erscheinen zu lassen. Eben dort findet sich[2] die Formel $\cos s = \frac{e^{s\sqrt{-1}} + e^{-s\sqrt{-1}}}{2}$, während $e^{s\sqrt{-1}} = \cos s + \sqrt{-1}\sin s$, eine so naturgemässe Folgerung aus den Werthen von $\sin s$ und von $\cos s$, dass sie einem Euler nicht entgangen sein kann, nicht vorkommt.

Den Jahren 1742 und 1743 gehört ein Briefwechsel an, welcher für die Geschichte der Reihenlehre von Bedeutung ist, der Briefwechsel zwischen Niclaus I Bernoulli und Euler, oder richtiger gesagt, indem wir uns auf das noch Vorhandene beschränken, vier Briefe des Ersteren an den Letzteren[3]. Euler hat die Briefe beantwortet, Bernoulli nimmt auf die Antworten Bezug, aber sie scheinen sich leider nicht erhalten zu haben, sind jedenfalls nicht veröffentlicht. Niclaus I Bernoulli, aus dessen Briefen an Leibniz aus den Jahren 1712 und 1713 wir (S. 355—356) merkwürdig klare Anschauungen über Convergenz und Divergenz von Reihen mitzutheilen hatten, ist in diesen seinen Ansichten in den inzwischen verstrichenen 30 Jahren nur noch mehr befestigt. Er zeigt sich überhaupt in seinen Briefen als einen ungemein ideenreichen Kopf. Schreibt er doch unter dem 13. Juli 1742 in dem ersten der gedruckten Briefe an Euler[4], er habe 1728 seinem Onkel, das ist also Johann Bernoulli, mitgeteilt, er sei bei Untersuchungen über recurrente Reihen zu der Formel $\sin s = \frac{\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}_{(n=\infty)}$ gelangt, und vielleicht bot diese Aeusserung für Euler den Anlass, dass er deutlicher als seither in dem oben erwähnten Aufsatze von 1743 die

[1] *Corresp. math.* Fuss I, 111. [2] *Miscellanea Berolinensia* VII, 179. [3] *Corresp. math.* Fuss II, 681—713. [4] Ebenda II, 683.

Sätze aussprach, zu welchen er, der 1728 erst 21 Jahre alt war, vermuthlich ziemlich viel später als Niclaus I Bernoulli, aber doch auch selbständig gekommen war.

Im zweiten Briefe vom 24. October 1742 giebt Bernoulli zwar zu[1], man könne aus $\sin s = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$ $= s\left(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots$ die Folgerung $\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots$ ziehen, aber die erstere Gleichung erfordre zunächst den Beweis der Convergenz der Reihe $s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \cdots$.

Im dritten Briefe vom 6. April 1743 schreibt Bernoulli[2]: Ich wundre mich, dass Sie mich in einer leichten, Ihnen nicht unbekannten Frage nicht verstehen sollten. Ich kann mir nicht vorstellen, dass Sie annehmen, eine divergente Reihe, welcher, auch wenn sie in's Unendliche fortgesetzt wird, immer Etwas fehlt, gebe den genauen Werth des entwickelten Ausdruckes. Als Beispiel wird angeführt, es sei nicht etwa $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\infty}$, sondern $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\infty} + \frac{x^{\infty+1}}{1-x}$.

Auch im vierten Briefe vom 29. November 1743 kehrt der gleiche Gegenstand wieder[3]. Es heisst dort: Ich halte den Begriff einer Summe oder der Vereinigung vieler Glieder für nicht vereinbarlich mit dem Begriffe endlos weiter gehender Glieder und sehe diese beiden Begriffe als einander widersprechend an. Jener schliesst das Denken sämmtlicher Glieder, des ersten, des letzten, der mittleren ein, in diesem ist das Denken eines letzten Gliedes nicht eingeschlossen; der Geist wird vielmehr von dem Denken eines letzten Gliedes abgezogen und folglich auch von der Zusammenfassung eines Ersten, Mittleren und eines Letzten. Die Unterscheidung zwischen einem absoluten Unendlichen und einem bestimmten Unendlichen gebe ich nicht zu. Ich behaupte, jedes Unendliche, welches in Rechnung tritt, muss als ein Bestimmtes aufgefasst werden, und deshalb meine ich, dass die Eigenschaften abgeschlossener algebraischer Gleichungen, beispielsweise die Gleichheit des negativ genommenen Coefficienten des zweithöchsten Gliedes mit der Summe aller Wurzeln, keine richtige Anwendung auf Gleichungen mit endlos fortschreitenden Gliedern finde, deren keines als das Letzte betrachtet wird, Gleichungen also, bei welchen der Begriff der Anzahl der Wurzeln wie der ihrer Summe

---

[1] *Corresp. math.* (Fuss) II, 691. [2] Ebenda II, 701—702. [3] Ebenda II, 708—710.

fehlt. Bernoulli giebt nun Beispiele divergenter Reihen. Er bedient sich dabei einer Kürze der Ausdrucksweise, welche einem Euler gegenüber gerechtfertigt war, welche aber anderen Lesern im ersten Augenblick Schwierigkeiten bereiten könnte. Wir wollen deshalb nicht einfach übersetzen, sondern den Sinn der Beispiele erläutern. Nimmt man von der Reihe $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots$ erst 1 Glied, dann deren 2, 3, 4 u. s. w., so zeigen sich die Summen $1, -2, 3, -4 \cdots$. Die Summe der unendlichen Reihe $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots$ muss also das unendlich ferne Glied der Reihe $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$ oder $-\infty(-1)^\infty$ sein. Andererseits ist durch Division $\frac{1-x}{1+2x+x^2} = 1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + \cdots$ und mittels $x = 1$ entsteht $\frac{1-1}{1+2+1} = 0 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots$ als unlösbarer Widerspruch. Ein ähnlicher Widerspruch ist folgender: Durch Division ist $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ und $\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$. Setzt man in die erste Entwicklung $x = 2$, in die zweite $x = 1$, so erhält man

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

und

$$-1 = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots.$$

Beide unendliche Reihen müssten also einander gleich sein, während, abgesehen vom Anfangsgliede 1, jedes Glied der ersten Reihe grösser als das ihm entsprechende Glied der zweiten Reihe ist. Ein letztes Beispiel bildet $\frac{1}{1-3x+x^2+2x^3} = 1 + 3x + 8x^2 + 19x^3 + 43x^4 + \cdots$. Setzt man $x = 1$, so entsteht $1 = 1 + 3 + 8 + 19 + 43 + \cdots$ d. h. die ganze Reihe ist gleich ihrem ersten Gliede, das Ganze gleich einem winzig kleinen Theile desselben.

Wir haben schon gesagt, dass Euler's Antworten keine Veröffentlichung gefunden haben, und ebensowenig Bernoulli's weitere Briefe über den Gegenstand, der noch lange nicht abgethan war. Wir müssen uns statt ihrer mit einem Briefe Euler's an Goldbach begnügen, der die noch etwa anderthalbjährige Fortdauer jenes Briefwechsels mit Niclaus I Bernoulli bezeugt. Euler also berichtet an Goldbach[1]) aus Berlin unter dem 7. August 1745:

Ich habe seit einiger Zeit mit dem Herrn Prof. Nicolao Bernoulli zu Basel eine kleine Dispute über die series divergentes, dergleichen diese ist $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 -$ etc. gehabt, indem derselbe geläugnet, dass alle dergleichen series eine determinirte Summ

[1]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 323 flgg.

haben, ich aber das Gegentheil behauptet, weilen ich glaube, dass eine jegliche series einen bestimmten Werth haben müsse. Um aber allen Schwierigkeiten, welche dagegen gemacht werden, zu begegnen, so sollte dieser Werth nicht mit dem Namen der Summ beleget werden, weil man mit diesem Wort gemeiniglich einen solchen Begriff zu verknüpfen pflegt, als wenn die Summ durch eine würkliche Summirung herausgebracht würde: welche Idee bei den seriebus divergentibus nicht Statt findet. Da nun eine jegliche series aus der Evolution einer expressionis finitae entsteht, so habe ich diese neue Definition von der Summ einer jeglichen seriei gegeben: Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur. Der Herr Bernoulli hat diese Definition vollkommen approbirt, zweifelt aber noch, ob nicht öfters eben dieselbe series divergens aus verschiedener expressionum finitarum evolutione entstehen könne, also dass man nach dieser Definition verschiedene Werthe zugeben müsste. Darüber hat er zwar kein Exempel gegeben, ich glaube aber gewiss zu seyn, dass nimmer eben dieselbe series aus der Evolution zweyer wirklich verschiedener expressionum finitarum entstehen könne. Und hieraus folgt dann unstreitig, dass eine jegliche series, sowohl divergens als convergens einen determinirten Werth oder summam haben muss.

Für die am Anfange des Briefes angeführte Reihe $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \cdots$ giebt Euler als Summe den Werth 0,5963475922, welchen er mittels Verwandlung in einen Kettenbruch sich verschafft. Goldbach's Antwort[1]) (vermuthlich vom 25. September 1745) pflichtet Euler in allen Dingen bei und macht dabei einen Vorschlag, wie man eine divergente Reihe in eine convergente verwandeln könne. Wir werden im 112. Kapitel sehen, wie Euler auf Goldbach's Gedanken einging.

Aus einem anderen Briefwechsel Euler's bemerken wir hier, dass Daniel Bernoulli ihm unter dem 20. September 1741 schrieb[2]): Ich habe Ew. meditata über die series gelesen; selbige sind freilich ingenios und profund, aber ich formire mir eine ganz andere Idee von den seriebus. Ich glaube nicht dass man allhier den calculum differentialem und integralem ohne Limitation gebrauchen dürfe, weil es nicht erlaubt ist, eine seriem als quantitates continuas aut fluentes zu betrachten, indem es lauter quantitates discretae sind. Was Sie also de interpolatione terminorum sagen, ist, meiner Meinung nach, nicht proprie und stricte zu verstehen.

Wenn Daniel Bernoulli dann am 7. März 1742 sagte[3]): Die

[1]) *Corresp. math.* Fuss I, 330—331. [2]) Ebenda II, 476. [3]) Ebenda II, 487—488.

methodum series inveniendi summabiles per methodum integrationum et differentiationum hab ich schon gebraucht, ehe ich bin auf Petersburg kommen, so sehen wir keinen Widerspruch zwischen den beiden Stellen. Daniel Bernoulli hat, scheint uns, im September 1741 nicht etwa darüber Scrupel empfunden (wie man einen Augenblick glauben könnte), ob man eine unendliche Reihe differentiiren und integriren dürfe, das war ihm eine selbstverständliche Wahrheit, sondern nur darüber, ob von Reihengliedern mit nicht ganzzahlig positivem Stellenzeiger die Rede sein könne.

In seinem Briefe an Goldbach vom 7. August 1745 hatte Euler, wie wir oben sagten, von der Umwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch gesprochen. Diese Stelle benutzen wir als Brücke, um auf seither von uns Vernachlässigtes, auf die Lehre von den Kettenbrüchen überzugehen. Wir haben allerdings schon früher (zuletzt S. 92—94) derartige Ausdrücke von Mathematikern benutzt gesehen, aber die praktische Benutzung war dabei überall das Hervortretende, eine Theorie der Kettenbrüche war kaum, ein Name für dieselben überhaupt nicht vorhanden. Beides verdankt man Euler, der in zwei Abhandlungen im IX. und XI. Bande der Commentarii Academiae Petropolitanae zeigte, welches die Eigenschaften sind, um deren willen die *fractiones continuae* — das sind eben die Kettenbrüche — eine nähere Betrachtung lohnen.

In dem ersten Aufsatze *De fractionibus continuis*[1]) ist sogleich der unendliche Kettenbruch $a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \text{etc.}}}}$ definirt. Dabei erhalten alle durch griechische Buchstaben bezeichnete Zahlen den Namen Zähler, während die durch lateinische Buchstaben bezeichneten Zahlen insgesammt (auch a mit eingeschlossen) Nenner heissen. Je nachdem man a oder $a + \frac{\alpha}{b}$ oder $a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c}}$ u. s. w. der Ausrechnung unterwirft, erhält man Werthe $\frac{a}{1}$, $\frac{ab + \alpha}{b}$, $\frac{abc + \alpha c + \beta a}{bc + \beta}$, $\frac{abcd + \alpha cd + \beta ad + \gamma ab + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + \gamma b}$ u. s. w., welche abwechselnd einen kleineren und einen grösseren Betrag, als der des ganzen unendlichen Kettenbruches ist, bedeuten. Man kann dem genauen Werthe des Kettenbruches durch Fortsetzung des Verfahrens beliebig nahe kommen[2]).

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 98—137.
[2]) Ebenda T. IX, 102: *Atque hoc modo fractionem continuam successive abrumpendo alternative valores iusto maiores et minores prodibunt; unde quantumvis prope ad verum fractionis continuae valorem accedere licebit.*

Zieht man den ersten so gefundenen Werth vom zweiten, den zweiten vom dritten, den dritten vom vierten u. s. w. ab, so erhält man die abwechselnd positiven und negativen Differenzen $\frac{\alpha}{b}$, $-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}$, $\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$, $-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}$ u. s. w. Diese Differenzen zu a hinzugefügt geben dann selbst wieder den zweiten, dritten, vierten, fünften u. s. w. vorher ermittelten Näherungswerth, oder der Kettenbruch ist $= a + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)} + \cdots$. Hier kann man aber neuerdings zusammenfassen $\frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} = \frac{\alpha c}{1(bc+\beta)}$ und ebenso je zwei aufeinanderfolgende Glieder, deren erstes positiv und deren zweites negativ ist, in eine regelmässig positive Summe. Man erhält dadurch die Umwandlung des Kettenbruches in eine heftig convergirende Reihe von Brüchen, deren Zähler und Nenner einem nach dem Vorhergehenden sich von selbst ergebenden Gesetze gehorchen[1]), nämlich $a + \frac{\alpha c}{1(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma e}{(bc+\beta)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)} + \cdots$. Die Raschheit der Convergenz hängt insbesondere davon ab, dass die Zähler $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ recht klein, die Nenner $a, b, c, d, e \cdots$ recht gross gewählt werden. Sind alle Zähler und Nenner ganze Zahlen, was durch Erweiterung immer hervorgebracht werden kann, so findet die rascheste Convergenz der Reihe, also auch des ihr gleichen Kettenbruches statt, wenn sämmtliche Zähler der Einheit gleich sind. Euler verwandelt nun gegebene Brüche in Kettenbrüche der letzteren Art und sucht aus ihnen wieder Näherungswerthe zum ursprünglichen Bruche in kleineren Zahlen. Als Vorgänger auf diesem Gebiete wird ausschliesslich Wallis genannt[2]), die Arbeiten von Huygens auf diesem Gebiete (S. 93—94) müssen Euler demnach unbekannt geblieben sein.

Periodische Kettenbrüche, für welche allerdings ein besonderer Name nicht angegeben ist, werden dann ausgewerthet. Aus $x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cdots}}$ wird geschlossen[3]), dass $x - a = \frac{1}{b + x - a}$ und

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 105: *cuius numeratorum et denominatorum lex ex superiore sponte se prodit.* [2]) Ebenda T. IX, 112. Vgl. auch T. XI, 39. [3]) Ebenda T. IX, 117.

$x = a - \frac{b}{2} + \sqrt{1 + \frac{b^2}{4}}$, also z. B. $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}} = \sqrt{2}$, und ähnlich erkennt man den Werth eines Kettenbruches, dessen Periodicität sich über mehr als nur je einen Nenner ausdehnt, z. B. $x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ddots}}}} = a - \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{c}{b}}$. Als wahrscheinlich erwähnt Euler bei dieser Gelegenheit[1]) die Kettenbruchentwicklungen $e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}$, $\frac{e^2 - 1}{2} = 3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \ddots}}}$, $\frac{e + 1}{e - 1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ddots}}}$

und manche andere.

Eine Aufgabe, bei welcher gleichfalls verweilt wird, ist die der Umwandlung von Kettenbrüchen, wie der für e angegebene, bei welchem die eine arithmetische Progression bildenden Nenner 2, 4, 6, 8 ··· durch andere periodisch auftretende 1, 1 unterbrochen werden, in Kettenbrüche ohne periodische Unterbrechung des Gesetzes der Nenner, z. B. in[2]) $e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \ddots}}}}}}$. Endlich kommt Euler zu Beziehungen zwischen unendlichen Kettenbrüchen und gewissen Differentialgleichungen[3]).

Euler's zweiter Abhandlung über Kettenbrüche hat derselbe Verfasser eine solche über unendliche Factorenfolgen: *De productis ex infinitis factoribus ortis*[4]) vorausgeschickt, auf die er sich alsdann bezieht. Auch der in dieser Abhandlung untersuchte Gegenstand schliesst sich der Reihenlehre eng genug an, dass wir in diesem Kapitel darüber kurz berichten dürfen, wie wir es ähnlich im vorigen Kapitel gehalten haben. Wir erinnern an Euler's Summirung reciproker Potenzreihen mit Hilfe von Factorenzerlegung (S. 636), wir erinnern insbesondere an die Untersuchungen über eine

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1737. T. IX, 120—122. [2]) Ebenda T. IX, 126. [3]) Ebenda T. IX, 129 sqq. [4]) Ebenda 1739. T. XI, 3—31.

transcendente Reihe (S. 633). Wie Euler in der Abhandlung von 1730 Beziehungen zwischen Factorenfolgen und bestimmten Integralen aufdeckte, damals noch nicht alles enthüllend, was ihm bekannt war, indem er schon unter dem 13. October 1729 die Definition der Gammafunction als unendliche Factorenfolge in einem Briefe an Goldbach ausgesprochen hatte[1], bilden solche Beziehungen auch den wesentlichen Inhalt des Aufsatzes von 1739. Euler entnimmt[2] hier der älteren Veröffentlichung die Formeln $(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng) = \frac{g^{n+1}\int\limits_0^1(-\log x)^n\,dx}{(f+(n+1)g)\int\limits_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n\,dx}$ und $\int\limits_0^1\sqrt{-\log x}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, aus welchen er dann weitere Folgerungen zieht. Wir erwähnen von letzteren[3] die Formeln $\frac{\pi}{2ag} = \int\limits_0^1\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}\cdot\int\limits_0^1\frac{x^{a-g-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$, $\frac{\pi}{2g} = \int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}\cdot\int\limits_0^1\frac{x^g\,dx}{\sqrt{1-x^{2g}}}$, so wie mancherlei Factorenfolgen als Auswerthung bestimmter Integrale von der Gestalt $\int\limits_0^1\frac{x^q\,dx}{\sqrt[r]{1-x^r}}$.

Wir haben gesagt, dass Euler in seiner zweiten Abhandlung über Kettenbrüche: *De fractionibus continuis observationes*[4] sich auf diese Ergebnisse beziehe. Zu Anfang ist allerdings von bestimmten Integralen keine Rede, sondern der Kettenbruch

$$A + \cfrac{B}{C + \cfrac{D}{E + \cfrac{F}{G + \cfrac{H}{I + \cdots}}}}$$

wird als identisch mit der Reihe $A + \frac{B}{1\cdot P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} + \cdots$ erklärt, welche, so oft die $A, B, C, D\cdots$ alle positiv, im Uebrigen aber beliebig abnehmend oder wachsend sind, da $P = C$, $Q = EP + D$, $R = GQ + FP$, $S = IR + HQ\cdots$ ist, als convergent sich erweise, weil jedes folgende Glied kleiner als das ihm vorhergehende werde. Wir bemerken beiläufig, dass die Behauptung der Abnahme der Glieder an sich richtig ist, da z. B. $\frac{BDFH}{RS} : \frac{BDF}{QR} = \frac{HQ}{S} = \frac{HQ}{IR + HQ} < 1$, dass aber sie allein für die

---

[1] *Corresp. math.* Fuss I, 3—4. [2] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 5 und 7. [3] Ebenda T. XI, 10, 11, 27. [4] Ebenda T. XI, 32—80.

Convergenz der betreffenden Reihe trotz des von Glied zu Glied wechselnden Vorzeichens nicht ausreicht. Dazu wäre nothwendig, dass die Glieder beim Abnehmen unter jeden angebbaren Werth sinken, was bei der Allgemeinheit, in welcher $A, B, C, D \cdots$ gewählt werden dürfen, keineswegs sicher ist. Euler kümmert sich darum nicht, sondern zeigt nun rückwärts die Verwandlung der Reihe $\frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS}$ in den Kettenbruch

$$\cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q - D + \cfrac{FPQ}{R - FP + \cfrac{HQR}{S - HQ + \cdots}}}}$$

und der Reihe $\frac{a}{p} - \frac{p}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} - \cdots$ in den Kettenbruch

$$\cfrac{a}{p + \cfrac{bp^2}{aq - bp + \cfrac{acq^2}{br - cq + \cfrac{bdr^2}{cs - dr + \cdots}}}}$$

von welcher Beispiele gerechnet werden. Eine eben solche Reihe ist aber nicht selten das Ergebniss einer bestimmten Integration, und auf diesem Umwege kommt Euler dazu, ein bestimmtes Integral durch einen unendlichen Kettenbruch auszudrücken. Beispielsweise[1] ist $\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{(1-x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}} =$

$$\cfrac{1}{m + \cfrac{\mu n^2}{\nu m + (\nu - \mu)n + \cfrac{\nu(\mu + \nu)(m + n)^2}{(3\nu - \mu) + (\nu - \mu)n + \cfrac{2\nu(\mu + 2\nu)(2m + n)^2}{(5\nu - 2\mu) + (\nu - \mu)n + \cdots}}}}$$

Eine andere Gedankenreihe führt zu folgenden Betrachtungen. Wallis hatte, wo er Brouncker's Kettenbruch für π (Bd. II, S. 698) mittheilte, den Satz ausgesprochen, dass a^2 das Product der beiden unendlichen Kettenbrüche

$$(a-1) + \cfrac{1}{2(a-1) + \cfrac{9}{2(a-1) + \cfrac{25}{2(a-1) + \cdots}}}$$

und

$$(a+1 + \cfrac{1}{2(a+1) + \cfrac{9}{2(a+1) + \cfrac{25}{2(a+1) + \cdots}}}$$

sei, und Euler hatte schon in der ersten Kettenbruchabhandlung an dieses Ergebniss erinnert[2]. Jetzt kam er neuerdings auf den gleichen Satz zurück[3]. Gestatten wir uns (was Euler nicht thut) die abgekürzte Bezeichnung $K_\lambda =$

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 36.
[2]) Ebenda 1737. T. IX, 101. [3]) Ebenda 1739. T. XI, 40.

$(a+\lambda)+\cfrac{1}{2(a+\lambda)+\cfrac{9}{2(a+\lambda)+\cfrac{25}{2(a+\lambda)+\dots}}}$, so heisst der von Wallis ausgesprochene Satz $K_{-1} \cdot K_1 = a^2$, und ihm stehen augenscheinlich beliebig viele ähnliche Sätze zur Seite, welche man erhält, indem man a durch $a+2$, durch $a+4$, durch $a+6$ $\cdots$ ersetzt. So ist demnach

$$\begin{aligned} K_{-1} \cdot K_1 &= a^2 \\ (a+2)^2 &= K_1 \cdot K_3 \\ K_3 \cdot K_5 &= (a+4)^2 \\ (a+6)^2 &= K_5 \cdot K_7 \end{aligned}$$

und durch Multiplication dieser Gleichungen, wie sie unter einander stehen und Weglassung der auf beiden Seiten vorhandenen Factoren K_1, K_3, K_5 findet man $(a+2)^2 \cdot (a+6)^2 K_{-1} = a^2 \cdot (a+4)^2 K_7$, also auch $K_{-1} = a \cdot \frac{a}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+6} \cdot \frac{K_7}{a+6}$.

Euler nimmt nun an, ohne diese Annahme ausdrücklich in Worte zu kleiden, dass man die Schlüsse fortsetze, bis rechts als letzter Factor $\frac{K_{4\mu+3}}{a+4\mu+2}$ erscheint, und dass dieser letzte Ausdruck sich bei wachsendem μ nicht mehr von der Einheit unterscheidet. So erhält er $K_{-1} = a+1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\dots}}} = a \cdot \frac{a}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+6} \cdots$. Den in der Abhandlung über unendliche Factorenfolgen gewonnenen Ergebnissen entnimmt nunmehr Euler, dass

$$\frac{a}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+2} \cdot \frac{a+4}{a+6} \cdot \frac{a+8}{a+6} \cdots = \frac{\int_0^1 x^{a+1}\,dx : \sqrt{1-x^4}}{\int_0^1 x^{a-1}\,dx : \sqrt{1-x^4}},$$

und somit ist der wiederholt von uns definirte Kettenbruch K_{-1} das a-fache des eben angegebenen Quotienten zweier bestimmten Integrale.

Auch an verwandten Kettenbrüchen werden ähnliche Kunstgriffe geübt, so dass der Kettenbruch zunächst in eine Factorenfolge, dann in einen Quotienten zweier bestimmter Integrale umgewandelt erscheint. Durch Einsetzung besonderer Werthe zeigt sich[1])

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI. 48.

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \ddots}}}}$$

Als weitere Aufgabe stellt sich dann vor die Augen, derartige bestimmte Integrale $\int_0^1 P dx$ und $\int_0^1 PR dx$ zu finden, dass ihr Quotient sich als unendlicher Kettenbruch darstellen lasse, eine Aufgabe, welche Euler gleichfalls in ziemlicher Allgemeinheit löst[1]), um alsdann wieder besondere Beispiele der Rechnung zu unterwerfen.

111. Kapitel.

Euler's Introductio, Band I.

Zahlreiche Abhandlungen hatten Euler schon allbekannt gemacht, auch seine als besondere Bände gedruckten *Mechanica* von 1736 und *Methodus inveniendi* von 1744, von welcher letzteren im 117. Kapitel die Rede sein wird, waren in den Händen derjenigen Mathematiker, welche im Stande waren, den damals höchsten Gebieten ihrer Wissenschaft Geschmack abzugewinnen. Da erschien 1748 Euler's *Introductio in analysin infinitorum*[2]), von De Castillon während des in Lausanne stattfindenden Druckes beaufsichtigt (S. 489), und dieses Werk gab erst dem Namen Leonhard Euler's den volksthümlichen Klang, der ihm vermuthlich für alle Zeiten anhaftet.

Ein umfangreiches Vorwort, allzuumfangreich um es hier abzudrucken, was sein Wortlaut eigentlich verdiente, erörtert die Absicht, welche der Veröffentlichung zu Grunde lag. Euler will zusammenstellen, was zu wissen bei Erlernung der Infinitesimalrechnung nothwendig oder wenigstens wünschenswerth sei, man könnte vielleicht sagen was überhaupt ohne Infinitesimalrechnung erworben werden kann, und er geht darin viel weiter, als man es gewohnt war. Er schuf, um eine moderne Benennung anzuwenden, ein Lehrbuch der algebraischen Analysis sowie ein eben solches der analytischen Geometrie.

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1739. T. XI, 59 sqq.
[2]) Eine deutsche Uebersetzung von Johann Andreas Christian Michelsen (Berlin 1788) hat den ursprünglichen 2 Bänden noch einen 3. Band Anmerkungen und Zusätze beigefügt, beziehungsweise 1791 folgen lassen. Eine deutsche Uebersetzung von H. Maser (Berlin 1885) enthält nur den 1. Band der Introductio.

Der I. Band der Introductio oder die algebraische Analysis zerfällt in 13 Kapitel, über welche wir in denkbarer Kürze berichten wollen. Wir bemerken dabei ein für alle Mal, dass Euler es liebt, den Gang seiner Untersuchungen durch geschickt gewählte, lehrreiche Beispiele zu unterbrechen.

Das 1. Kapitel, Von den Functionen überhaupt, erklärt die Function einer veränderlichen Zahlengrösse als einen analytischen Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlengrösse, d. h. einer unbestimmten, allgemeinen Zahlengrösse, welche alle bestimmten Werthe ohne Ausnahme in sich begreift, und aus constanten Zahlengrössen zusammengesetzt ist. Die Function einer Veränderlichen ist wieder eine Veränderliche. Sie zerfällt in verschiedene Unterarten. Algebraische Functionen stehen im Gegensatz zu Transcendenten, unter den algebraischen Functionen werden rationale von irrationalen, unter den rationalen ganze von gebrochenen unterschieden. Eine sich anknüpfende Sonderung betrifft eindeutige und mehrdeutige Functionen[1]. Zur Bezeichnung einzelner eindeutiger Functionen dienen grosse Buchstaben wie P, Q, R, S, T. Des weiteren wird von graden und ungraden Functionen gesprochen. Jene behalten ihren Werth, mag man ihre Veränderliche $= + k$ oder $= - k$ setzen, diese nehmen durch die beiden erwähnten Substitutionen entgegengesetzte Werthe an. Aehnliche Functionen von y und z nennt man Y und Z, wenn Y auf eben die Art durch y und constante Zahlengrössen bestimmt wird, wie Z durch z und constante Zahlengrössen.

Das 2. Kapitel, Von der Umformung der Functionen, unterscheidet zunächst zwei Gattungen von Umformungen, je nachdem dieselbe Veränderliche beibehalten oder eine andere Veränderliche an Stelle der ersten eingeführt wird. Bleibt die Veränderliche, so bleibt auch die Art der Abhängigkeit ihrer Function von derselben, nur können vielleicht in der neuen Gestalt manche Eigenschaften deutlicher hervortreten. In dieser Beziehung ist die Zerlegung einer ganzen algebraischen Function in einfache Factoren von besonderer Wichtigkeit. Eine ganze Function Z von z, in welcher der Exponent der höchsten Potenz von z gleich n ist, wird n einfache Factoren enthalten, was ohne Weiteres daraus gefolgert wird, dass $f + gz + hz^2$ in zwei, $f + gz + hz^2 + iz^3$ in drei einfache Factoren, d. h. in solche zerlegbar sei, in welchen z nur in erster Potenz vorkomme. Man findet die einfachen Factoren von Z, indem man die Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ aufsucht. Aus jedem Wurzelwerthe entspringt ein

[1] *Functiones uniformes, multiformes.*

einfacher Factor der Function Z. Die einfachen Factoren des reellen Productes Z sind theils reell, theils imaginär. Letztere treten immer in grader Anzahl auf, und zwei imaginäre einfache Factoren vereinigen sich dann zu einem reellen Factor 2[ten] Grades, den man auch einen reellen zweifachen Factor nennt. Die ganze Function Z von z ist eindeutig. Wird $Z = A$ bei $z = a$ und $Z = B$ bei $z = b$, d. h. geht Z von A in B über, während z von a in b übergeht, so kann ersterer Uebergang nicht anders als durch alle zwischen A und B gelegene Zwischenwerthe hindurch erfolgen, d. h. es muss einen zwischen $z = a$ und $z = b$ gelegenen Werth $z = c$ geben, der $Z = C$ hervorbringt, wenn C zwischen A und B liegt. Mit anderen Worten, wenn $Z - A = 0$ und $Z - B = 0$ je eine reelle Wurzel besitzt, so muss, wenn $A < C < B$ oder $A > C > B$ ist, auch $Z - C = 0$ eine reelle Wurzel besitzen. Ist beispielsweise Z von ungrader Höhe, d. h. $Z = z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \cdots$, so bewirkt $z = \infty$, dass $Z = \infty$ und $z = -\infty$ dass $Z = -\infty$ wird, mithin haben $Z - \infty$ und $Z + \infty$ je einen bekannten reellen einfachen Factor $z - \infty$ und $z + \infty$. Alsdann muss auch $Z - 0 = Z$ einen reellen einfachen Factor besitzen oder $z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \cdots = 0$ hat mindestens eine reelle Wurzel. Die Gleichung $Z = z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \pm \cdots \pm \nu z - A = 0$ mit positivem A hat mindestens zwei reelle Wurzeln. Die Annahmen $z = -\infty$ und $z = 0$ liefern nämlich $Z = \infty$ und $Z = -A$, zwischen welchen $Z = 0$ liegt, welches durch irgend ein negatives $z = -c$ erzeugt werden muss. Andererseits liefern $z = 0$ und $z = \infty$ die Werthe $Z = -A$ und $Z = \infty$, zwischen welchen abermals $Z = 0$ liegt, welches durch irgend ein positives $z = d$ erzeugt werden muss. Das sind lauter Sätze, auf welche Euler 1749 zurückkam (S. 581). Nun kommt die Zerfällung einer echtgebrochenen Function in Partialbrüche an die Reihe. Der einfachste Fall $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p - qz)S}$, wo S den einfachen Factor $p - qz$ nicht weiter enthält, wird erledigt durch die Annahme $\frac{M}{N} = \frac{A}{p - qz} + \frac{P}{S}$ oder $M = AS + (p - qz)P$, woraus $A = \frac{M - (p - qz)P}{S}$ folgt. Hierein setzt man (weil A eine Constante ist, darf man das) $p - qz = 0$ und erhält $A = \frac{M}{S}_{(p - qz = 0)}$. Der verwickeltere Fall, dass $p - qz$ mehr als einmal als Factor in N vorkomme, und dass also Partialbrüche mit den Nennern $p - qz$, $(p - qz)^2$, $(p - qz)^3 \cdots$ zu ermitteln sind, beschliesst das Kapitel.

Das 3. Kapitel, Von der Umformung der Functionen durch Substitution, hat die Rationalisirung irrationaler Ausdrücke zum

Zweck. So wird $y=(a+bz)^{\frac{m}{n}}$ durch $(a+bz)^{\frac{1}{n}}=x$ in rationale Gestalt übergeführt. Ebenso wird $\left(\frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y}\right)^n=\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^m$ durch rationale Werthe von z und y erfüllt, indem man den beiden Ausdrücken gemeinsamen Werth in die Gestalt x^{mn} kleidet. Bei $y=\sqrt{(a+bz)(c+dz)}$ setzt Euler $\frac{c+dz}{a+bz}=x^2$, $z=\frac{c-ax^2}{bx^2-d}$, worauf $y=(a+bz)x=\frac{(bc-ad)x}{bx^2-d}$ wird. Eine andere Methode der Rationalisirung von $y=\sqrt{p+qz+rz^2}$ besteht darin, dass $y=xz+\sqrt{p}$ oder auch $y=x+\sqrt{r}\,z$ gesetzt wird, je nachdem p oder r positiv ist. Sind beide Constanten p und r negativ, und ist zugleich $q^2<4pr$, so ist y wesentlich imaginär. Ist dagegen p und r negativ, aber $q^2>4pr$, so ist man im Stande $p+qz+rz^2=(a+bz)(c+dz)$ zu setzen, wie vorher gelehrt wurde. Neben dieser ersten Anwendung von Substitutionen lehrt alsdann Euler eine zweite, welche darin besteht, dass er, wenn eine Gleichung zwischen y und z vorliegt, eine dritte Hilfsveränderliche x wählt und Beziehungen zwischen y und x sowie zwischen z und x aufsucht, vermöge deren die ursprüngliche Gleichung erfüllt wird. Sei z. B. $ay^\alpha+bz^\beta+cy^\gamma z^\delta=0$, so setzt Euler zunächst $y=x^m z^n$ und erhält $ax^{\alpha m}z^{\alpha n}+bz^\beta+cx^{\gamma m}z^{\gamma n+\delta}=0$ und es kommt darauf an, n so zu wählen, dass aus der neuen Gleichung z in x gefunden werden kann. Dazu liegen drei Wege vor. Erstens kann $\alpha n=\beta$, $n=\frac{\beta}{\alpha}$ gesetzt werden, dann ist nach Division durch z^β die weitere Behandlung augenscheinlich. Zweitens kann $\gamma n+\delta=\beta$, $n=\frac{\beta-\delta}{\gamma}$ gesetzt und abermals durch z^β dividirt werden. Drittens kann $\alpha n=\gamma n+\delta$, $n=\frac{\delta}{\alpha-\gamma}$ gesetzt und durch $z^{\alpha n}$ dividirt werden. Andere Beispiele erfordern und gestatten andere Kunstgriffe.

Das 4. Kapitel, Von der Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen, ist schon durch den einleitenden Paragraphen, welcher zeigt, wie Euler über Reihenentwicklungen dachte, von höchster Bedeutung. Die Natur transcendenter Functionen, sagt Euler, dürfte sogar besser zu erkennen sein, sobald dieselben in einer solchen, wenn auch ins Unendliche fortlaufenden Form ausgedrückt sind. Denn ebenso wie die Natur einer ganzen Function am besten dann erkennbar ist, wenn sie nach Potenzen von z entwickelt, also auf die Form $A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots$ gebracht ist, so ist auch diese Form, selbst wenn die Anzahl der Glieder unendlich gross ist, am geeignetsten, um sich von der wesentlichen Beschaffenheit aller

anderen Functionen eine klare Vorstellung zu bilden. Wir dürfen bei dieser Gelegenheit an die Bemerkung erinnern, welche wir (S. 447) an Newton's Integration durch unendliche Reihen knüpften. Wenn wir dort eine nur unbewusste Verwandtschaft mit heutigem Denken zu erkennen vermochten, so ist Euler's Aeusserung von ganz anderer Natur. Mag ihm, wie wir mehr als nur einmal gesagt haben und künftig zu wiederholen haben werden, das Gefühl für die Anforderungen, welche die Mathematik an die von ihr zu benutzenden unendlichen Reihen zu stellen hat, mehr abgegangen sein, als dieses bei Newton der Fall war, den analytischen Nutzwerth der Reihen, wenn wir so sagen dürfen, klar ausgesprochen zu haben, ist Euler's Verdienst. Die einfachste Art der Reihenentwicklung ist die der Division bei Umwandlung eines Bruches, und sie erzeugt die recurrente Reihe, deren Namen und erste Untersuchung nach Euler's Aussage De Moivre angehöre. Jene Umwandlung selbst braucht nicht durch Division vollzogen zu werden. Sie erfolgt besser durch Multiplication des Bruchnenners mit einer versuchsweise unter Benutzung unbestimmter Coefficienten aufgestellten unendlichen Reihe. Euler setzt z. B. $\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ und erhält $a = (\alpha + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots) = \alpha A + (\alpha B + \beta A)z + (\alpha C + \beta B)z^2 + (\alpha D + \beta C)z^3 + \cdots$, woraus neben $A = \frac{a}{\alpha}$ die einander vollständig ähnlich gebauten, die Recursion vermittelnden Gleichungen $0 = \alpha B + \beta A$, $0 = \alpha C + \beta B$, $0 = \alpha D + \beta C \cdots$ hervorgehen. In wesentlich übereinstimmendem Verfahren wird sodann $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma z^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ und $a + bz = (\alpha + \beta z + \gamma z^2)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots) = \alpha A + (\alpha B + \beta A)z + (\alpha C + \beta B + \gamma A)z^2 + (\alpha D + \beta C + \gamma B)z^3 + \cdots$ gesetzt, woraus erstlich die zwei Coefficienten $A = \frac{a}{\alpha}$, $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha^2}$ und ferner die unmittelbar nur α, β, γ aber nicht a, b enthaltenden Recursionsgleichungen $0 = \alpha C + \beta B + \gamma A$, $0 = \alpha D + \beta C + \gamma B \cdots$ entstehen. Je mehr Glieder der Nenner $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \cdots$ besitzt, um so zahlreicher sind die Glieder der einzelnen Recursionsgleichungen, und die von den Coefficienten des Zählers $a + bz + \cdots$ abhängenden Zahlen A, $B \cdots$ mehren sich in gleicher Weise. Voraussetzung des Verfahrens ist ein von Null verschiedenes α, da sonst die Entwicklung mit $A = \frac{a}{0} = \infty$ beginnen müsste. Unter der gleichen erfüllten Voraussetzung einer von Null verschiedenen Anfangsconstante des Nenners wird auch der Bruch in eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende recurrente Reihe verwandelt, dessen Nenner die

n^{te} Potenz von $1 - \alpha z$ ist, während im Zähler Glieder bis zur Höhe von z^{n-1} vorkommen. Setzt man nach vollzogener Entwicklung $\alpha = z = 1$, so geht die Reihe in eine arithmetische Progression $n - 1^{ter}$ Ordnung über, welche somit auch eine recurrente Reihe ist. Euler geht alsdann zur Entwicklung von Ausdrücken über, deren Nenner eine Potenz des Polynoms $1 - \alpha z - \beta z^2 - \cdots$ ist, ferner zu dem bis dahin ausgeschlossenen Falle, dass die Anfangsconstante des Nenners Null wird, und den er dadurch erledigt, dass er z, oder welche Potenz z^u von z dem wirklich vorhandenen Anfangsgliede des Nenners angehört, als Factor heraussetzt. Dann ist die ohne Berücksichtigung dieses Factors entwickelte Reihe noch durch z^u zu dividiren. Sie behält dabei ihren Charakter als eine nach steigenden Potenzen von z fortschreitende Entwicklung, beginnt aber mit $\frac{A}{z^u}$. Nun folgen die Reihen für $(P + Q)^{\frac{m}{n}}$ und allgemeiner für die $\frac{m}{n}^{te}$ Potenz von Polynomen. Von einem Beweise ihrer Richtigkeit ist keine Rede. Der Binomialsatz und Polynomialsatz tritt bei gebrochenem Exponenten in Anwendung, als wenn es sich von selbst verstände.

Im 5. Kapitel, Von den Functionen zweier oder mehrerer Veränderlichen, fällt das Hauptgewicht auf die homogenen Functionen, deren Name 1726 von Johann Bernoulli[1]) eingeführt worden war. Ist V eine homogene Function n^{ter} Dimension von y und z, so wird die Substitution $y = uz$ zu dem Producte von z^n in eine Function von u führen. Ist $n = 0$, d. h. ist V eine Function nullter Dimension von y und z, so wird, wegen $z^0 = 1$, die Substitution $y = uz$ dahin führen, dass V als Function von u allein erscheint.

Das 6. Kapitel, Von den Exponentialgrössen und den Logarithmen, schildert das Wesen der genannten Functionen, wobei die Behauptung auftritt, ausser den Potenzen der Basis a gebe es keine Zahl b mit rationalem Logarithmus, nebst dem unbewiesenen Zusatze, der Logarithmus von b könne auch keine irrationale Zahl sein und müsse deshalb zu den Transcendenten gerechnet werden.

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae* T. I, abgedruckt in Joh. Bernoulli *Opera* III, 108—124: *De integrationibus aequationum differentialium.* In § IX dieser Abhandlung heisst es: . . . *p et q designant functiones rationales et homogeneas indeterminatarum x et y utcumque inter se complicatarum atque permixtarum, modo indeterminatae in singulis terminis eandem habeant exponentium summam propter quod functiones, quae ita sunt comparatae, . . . voco homogeneas.*

Von den zur Anwendung der Logarithmen eingeschalteten Beispielen nennen wir zwei. Einmal fragt Euler, wie gross nach 100 Jahren die Bevölkerung eines Landes sein werde, welche jetzt aus 100 000 Menschen bestehe und sich jährlich um ihren dreissigsten Theil vermehre. Wir erkennen hier einen Vorläufer der schon (S. 346) erwähnten Untersuchungen Euler's von 1760 über Bevölkerungsverhältnisse. Ein andermal fragt Euler nach der Anzahl x der Jahre, welche zur Tilgung einer mit p Procent verzinslichen Schuld a erforderlich sei, wenn jährlich für Zins und Rückzahlung die Summe b verwandt werde. Unter Benutzung der Abkürzung $\frac{100+p}{100} = n$ findet Euler die Gleichung $n^x a = \frac{n^x b - b}{n-1}$, welche man neuerdings die Amortisationsgleichung zu nennen liebt, und folgert aus ihr $x = \frac{\log b - \log (b-(n-1)a)}{\log n}$.

Das 7. Kapitel, Von der Darstellung der Exponentialgrössen und der Logarithmen durch Reihen, giebt seinen Inhalt durch die Ueberschrift aufs Deutlichste an. Der Gedankengang ähnelt sehr dem, welchen Halley 1695 eingeschlagen hatte (S. 81), ohne dass auf diesen Schriftsteller verwiesen wäre. Wir haben dieses Schweigen wohl weniger daraus zu erklären, dass Euler Halley's Abhandlung nicht gekannt hätte, als wahrscheinlicher daraus, dass er Dinge, welche seit mehr als fünfzig Jahren der Oeffentlichkeit angehörten, als wissenschaftliches Gemeingut betrachtete, von welchem Jeder ohne Quellenangabe Gebrauch machen dürfe. Sei a, die Basis des zu wählenden Logarithmensystems, grösser als 1, sei ferner ω eine unendlich kleine positive Zahl, so wird $a^\omega = 1 + \psi$, wo ψ gleichfalls positiv unendlich klein ist und etwa $= k\omega$ gesetzt werden darf. Ist $a^\omega = 1 + k\omega$, so ist $\omega = \log(1 + k\omega)$ in dem Logarithmensysteme von der Basis a. Erhebt man $a^\omega = 1 + k\omega$ auf die i^{te} Potenz mit vorläufig beliebigem i, so wird $a^{\omega i} = (1 + k\omega)^i = 1 + ik\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2} k^2\omega^2 + \cdots$. Ist aber $i = \frac{z}{\omega}$ und z endlich, so wird $i = \infty$, zugleich aber auch $\omega i = z$ und $\omega = \frac{z}{i}$. Diese Substitutionen liefern $a^z = 1 + kz + \frac{i-1}{1\cdot 2\cdot i} k^2 z^2 + \frac{(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot i^2} k^3 z^3 + \cdots$. Bei $i = \infty$ streichen sich die in den Zählern und Nennern auftretenden i enthaltenden Factoren gegen einander, und man erhält $a^z = 1 + kz + \frac{k^2 z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3 z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ mit endlichen a, k, z. Wird vollends $z = 1$, so zeigt sich der zwischen a und k obwaltende Zusammenhang $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$. Der Ausdruck

$a^{\omega i} = (1 + k\omega)^i$, welcher, wie wir sahen, den Werth 1 übersteigt, kann als $1 + x$ bezeichnet werden. Alsdann ist einerseits $\omega i = \log(1 + x)$, andererseits $1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$, $k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$, $\omega i = \frac{i}{k}\left[(1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right] = \frac{i}{k}\left[\frac{1}{i}x - \frac{i-1}{1\cdot 2\cdot i^2}x^2 + \frac{(i-1)(2i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot i^3}x^3 - \cdots\right]$ $= \frac{1}{k}\left[x - \frac{x^2}{1\cdot 2}\,\frac{i-1}{i} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{(i-1)(2i-1)}{i^2} - \cdots\right]$. Bei $i = \infty$ vereinfachen sich wieder die i im Zähler und im Nenner mit sich führenden gebrochenen Coefficienten, und mit Benutzung von $\omega i = \log(1 + x)$ erhält man $\log(1 + x) = \frac{1}{k}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)$. Diese Reihe verhilft alsdann zur Ermittelung von k aus a, was aus $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ nicht zu erreichen war. Sei nämlich $1 + x = a$, $x = a - 1$, $\log(1 + x) = \log a = 1$, so geht die Reihe über in $1 = \frac{1}{k}\left[\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots\right]$, beziehungsweise in $k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \cdots$. Bei $a = 10$ wird $k = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \cdots$ eine Reihe, von welcher Euler in fast naiver Weise sagt, es sei schwer einzusehen, wie sie den Werth 2,30258 haben könne[1]). Dazu gelangt er durch folgende Schlüsse. Neben $k\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ wird bei negativ gewähltem x auch $k\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$ sein, und Subtraction führt zu $\frac{k}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$. Jetzt setzt Euler $\frac{1+x}{1-x} = a$, wodurch $\log\frac{1+x}{1-x} = 1$ und $x = \frac{a-1}{a+1}$ wird. Dann zeigt sich $\frac{k}{2} = \frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots$ und bei $a = 10$ die rasch zur Ermittelung des entsprechenden k führende Reihe $\frac{k}{2} = \frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \cdots$. Wird aber k als bekannt angenommen, z. B. $k = 1$, so geht $1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ in $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ über, einen Werth, der durch e bezeichnet die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen heisst, und den Euler auf 23 Decimalstellen berechnet angiebt. Durch $a = e$, $k = 1$ geht $a^{\omega i} = (1 + k\omega)^i$ über in $e^{\omega i} = (1 + \omega)^i$, und da bei $\omega i = z$, $\omega = \frac{z}{i}$ war, so hat man $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i_{(i = \infty)}$. Wir bemerken

[1]) Euler, *Introductio* I, § 120 am Schlusse.

dabei beiläufig, dass der Sonderfall $\left(1+\frac{1}{A}\right)^A_{(A=\infty)} = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ schon am 30. Januar 1728 im Besitze von Daniel Bernoulli war, der ihn damals brieflich Goldbach mittheilte[1]).

Das 8. Kapitel, Von den transcendenten Zahlengrössen, welche aus dem Kreise entspringen, nimmt die auf 127 Decimalstellen angegebene Zahl π und die trigonometrischen Functionen in Untersuchung. Mittels der bekannten Formeln für den Sinus und den Cosinus zusammengesetzter Winkel kommt Euler leicht zu den Gleichungen

$$\sin(2y+z) = 2\cos y \sin(y+z) - \sin z$$
$$\cos(2y+z) = 2\cos y \cos(y+z) - \cos z,$$

welche Recursionen darstellen, deren Fortgang einleuchtet, wenn z durch $y+z$ ersetzt wird, was beliebig oft geschehen kann. Auch bei Ausführung der Multiplication $(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) + \sqrt{-1}\sin(y+z)$ bedient sich Euler der Formeln $\cos y\cdot\cos z - \sin y\cdot\sin z = \cos(y+z)$; $\cos y\cdot\sin z + \sin y\cdot\cos z = \sin(y+z)$. Die fortgesetzte Multiplication führt allmälig zu $(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz$, mit n als ganzer positiver Zahl, was Euler allerdings zu betonen unterlässt, und dann weiter zu $2\cos nz = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n$ und zu $2\sqrt{-1}\sin nz = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n$. Die Binominalentwicklung der hier vorkommenden n^{ten} Potenzen liefert Werthe von $\cos nx$ und von $\sin nx$ ausgedrückt durch Producte von Potenzen von $\cos z$ und von $\sin z$

$$\cos nz = \cos z^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos z^{n-2}\sin z^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos z^{n-4}\sin z^4 - \cdots$$
$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos z^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos z^{n-3}\sin z^3$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{1\cdot 2\cdots 5}\cos z^{n-5}\sin z^5 - \cdots.$$

Ist $nz = v$ und dabei n unendlich gross, z unendlich klein, so kann $\cos z = 1$, $\sin z = z = \frac{v}{n}$ gesetzt werden nebst denjenigen Veränderungen der auftretenden Brüche in Bezug auf n, welche im vorhergehenden Kapitel benutzt waren. Man erhält die Reihen $\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$, $\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$.

1) *Corresp. math.* (Fuss) II, 246.

Werden diese Reihen benutzt, um die Sinus und Cosinus von Bögen unterhalb $\frac{\pi}{6} = 30^0$) zu berechnen, so findet man, da $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ und somit $\sin(30^0 + z) = \cos z - \sin(30^0 - z)$ nebst $\cos(30^0 + z) = \cos(30^0 - z) - \sin z$, von den Functionen der kleineren Winkel aus mit Leichtigkeit die der grösseren. Die gleiche Substitution $nz = v$ mit $n = i$ (*infinitum*, unendlichgross), $z = \frac{v}{i}$ lässt die für $2\cos nz$ und für $2\sqrt{-1}\sin nz$ gefundenen Formeln in folgende übergehen: $2\cos v = \left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$ und $2\sqrt{-1}\sin v = \left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$. Nun war aber $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$, mithin ist auch $e^{v\sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$, $e^{-v\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i$ und $\cos v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$, $\sin v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $e^{\pm v\sqrt{-1}} = \cos v \pm \sin v\sqrt{-1}$. Ferner war im natürlichen Logarithmensysteme $\log(1 + x) = i\left((1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right)$. Ersetzt man $1 + x$ zuerst durch $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, dann durch $\cos z - \sqrt{-1}\sin z$ und zieht beide Ergebnisse von einander ab, so entsteht $\log(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) - \log(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \log\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z} = i\left[(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}} - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}\right]$. Wiewohl vorhin die Herleitung der Formel $2\sqrt{-1}\sin nz = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n$ die Nothwendigkeit eines positiven ganzzahligen n mit sich führte, welche wir deshalb besonders hervorhoben, nimmt Euler nicht den geringsten Anstand $n = \frac{1}{i}$ zu setzen, und er gelangt damit zu $2\sqrt{-1}\sin\frac{z}{i} = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}} - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}$ beziehungsweise zu $\log\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z} = 2\sqrt{-1}\cdot i\cdot\sin\frac{z}{i}$. Wird $i = \infty$, so geht $i\sin\frac{z}{i}$ in $i\cdot\frac{z}{i} = z$ über, und man erhält $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z}$ oder eine Gleichung, welche den Logarithmen einer imaginären Zahl auf einen Kreisbogen zurückführt. Der logarithmirte Bruch kann auch durch $\cos z$ gekürzt werden, worauf $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1 + \sqrt{-1}\,\mathrm{tng}\,z}{1 - \sqrt{-1}\,\mathrm{tng}\,z}$ entsteht. Im 7. Kapitel war $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$ gefunden worden. Einsetzung

von $x = \sqrt{-1}\,\operatorname{tng} z$ liefert $\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{-1}\,\operatorname{tng} z}{1-\sqrt{-1}\,\operatorname{tng} z} = \sqrt{-1}\left(\frac{\operatorname{tng} z}{1} - \frac{\operatorname{tng} z^3}{3} + \frac{\operatorname{tng} z^5}{5} + \cdots\right)$, also auch $z = \frac{\operatorname{tng} z}{1} - \frac{\operatorname{tng} z^3}{3} + \frac{\operatorname{tng} z^5}{5} + \cdots$ beziehungsweise mittels $\operatorname{tng} z = t$, $z = \operatorname{arctg} t$ auch $\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots$. Diese zahlreichen Ergebnisse des 8. Kapitels sind, wie kaum hervorgehoben zu werden braucht, weder in einwandfreier Weise erworben, noch einzeln genommen neu. Johann Bernoulli hatte 1702 den Zusammenhang zwischen einem Arcustangens und dem Logarithmen einer imaginären Zahl erkannt (S. 348), James Gregory besass 1671 die Reihe für $\operatorname{arctg} t$ (S. 72), Leibniz hat deren besonderen Fall $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ gefunden (S. 75). Machin hat 1706 eine zur praktischen Anwendung vortheilhaftere Reihe für $\frac{\pi}{4}$ veröffentlicht (S. 350). Euler selbst hat 1737 eine Anzahl von Reihen zur Berechnung von π in den Druck gegeben (S. 646). Jetzt kam er in der Introductio auf die Umformung der Arcustangensreihe zurück. Ausgehend von $\operatorname{tng}(a+b) = \frac{\operatorname{tng} a + \operatorname{tng} b}{1 - \operatorname{tng} a \cdot \operatorname{tng} b}$ und von $\operatorname{tng}\frac{\pi}{4} = 1$ findet er, dass, wenn $a + b = \frac{\pi}{4}$ ist, $1 = \frac{\operatorname{tng} a + \operatorname{tng} b}{1 - \operatorname{tng} a \cdot \operatorname{tng} b}$ sein muss und $\operatorname{tng} b = \frac{1 - \operatorname{tng} a}{1 + \operatorname{tng} a}$. Mithin ergiebt sich aus $\operatorname{tng} a = \frac{1}{2}$ ein $\operatorname{tng} b = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ und $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, worauf zweimalige Anwendung der Arcustangensreihe eintritt.

Das 9. Kapitel, Untersuchung der trinomischen Factoren, kehrt zu dem Gegenstande des 2. Kapitels zurück. Dort war von den reellen einfachen Factoren und von den paarweise auftretenden imaginären Factoren einer ganzen reellen algebraischen Function die Rede, welche letztere einander zu einem reellen trinomischen Factor vervielfachen, und auf sie wendet Euler nunmehr sein Augenmerk. Das Trinom $p - qz + rz^2$ besteht aus zwei imaginären einfachen Factoren, wenn $4pr > q^2$ oder $\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1$ ist. Jede Zahl, welche kleiner als 1 ist, kann als ein Cosinus gedacht werden, z. B. $\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \cos\varphi$ als Merkmal, dass $p - qz + rz^2$ aus imaginären einfachen Factoren entstand. Das Trinom heisst alsdann $p - 2\cos\varphi\sqrt{pr}\,z + rz^2$ oder wenn p durch p^2 und r durch q^2 ersetzt wird, $p^2 - 2pqz\cos\varphi$

$+ q^2z^2 = [qz - p(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]\cdot[qz - p(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)]$, und die ganze algebraische Function $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \cdots$, auf deren Zerlegung es ankommt, muss verschwinden, sowohl wenn $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ als auch wenn $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$ eingesetzt wird, was unter Benutzung von $(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi$ zu geschehen hat. Diese allgemeinen Vorbemerkungen leiten über zur Zerlegung von $a^n + z^n$, bei welcher die beiden Fälle eines ungraden und eines graden n unterschieden werden. Ist n ungrad, so hat $a^n + z^n$ ausser dem Factor $a + z$ noch $\frac{n-1}{2}$ trinome Factoren, ist n grad, so sind ausschliesslich trinome Factoren $\frac{n}{2}$ an der Zahl vorhanden. Aehnliches gilt für die Zerlegung von $a^n - z^n$. Bei ungradem n ist der Factor $a - z$ neben $\frac{n-1}{2}$ trinomen Factoren vorhanden, bei gradem n vereinigen sich die beiden ein fachen Factoren $a - z$ und $a + z$ mit $\frac{n-2}{2}$ trinomen Factoren. Sodann sind die einzelnen Factoren von $a^n + z^n$ und von $a^n - z^n$ wirklich gebildet. Letztere heissen $a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2$, wo k alle positiven ganzen Zahlenwerthe von 0 anfangend erhält, bis das Product der Factoren die nöthige Dimension erreicht. Es war $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ und ebenso $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i_{(i=\infty)}$. Folglich muss, unter der Voraussetzung $i = \infty$, auch sein $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 1$. Der Ausdruck rechts ist aber von der Form $a^n - z^n$, wenn $a = 1 + \frac{x}{i}$, $z = 1$, $n = i$, und die Factoren desselben werden $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k\pi}{i} + 1$. Bei $k = 0$ erscheint $\left(1 - \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos 0 + 1 = \left(1 + \frac{x}{i} - 1\right)^2 = \left(\frac{x}{i}\right)^2$, welches aber durch $\frac{x}{i}$ ersetzt werden muss, weil $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ sich nur durch x (beziehungsweise $\frac{x}{i}$), aber nicht durch x^2 (beziehungsweise $\frac{x^2}{i^2}$) als theilbar erweist. Bei $k > 0$ tritt für $\cos\frac{2k\pi}{i}$ seine Reihenentwicklung $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2k\pi}{i}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{2k\pi}{i}\right)^4 - \cdots$, welche aber wegen $i = \infty$ auf die beiden Anfangsglieder $1 - \frac{2k^2\pi^2}{i^2}$ beschränkt werden darf.

So wird das Trinom $\left(1+\frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1+\frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k\pi}{i} + 1 = \frac{x^2}{i^2} + \frac{4k^2\pi^2}{i^2} + \frac{4k^2\pi^2 x}{i^3} = \frac{4k^2\pi^2}{i^2}\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)$, wobei der constante Factor $\frac{4k^2\pi^2}{i^2}$ unberücksichtigt bleiben darf. Somit zerfällt $e^x - 1$ in unendlich viele jetzt bekannte Factoren, d. h. man erhält $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = x\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\cdots$. Euler setzt ausdrücklich die Bemerkung hinzu[1]): Obwohl hierin die einzelnen Factoren den unendlich kleinen Theil $\frac{x}{i}$ enthalten, so darf derselbe doch nicht weggelassen werden, weil sich aus ihm nach ausgeführter Multiplication aller $\frac{i}{2}$ trinomen Factoren das Glied $\frac{x}{2}$ ergeben wird; Euler nennt das eine Unbequemlichkeit, der er aus dem Wege gehen will, und dazu bedient er sich einer anderen Factorenzerlegung. Neben $e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ ist $e^{-x} = \left(1-\frac{x}{i}\right)^i = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ und $\left(1+\frac{x}{i}\right)^i - \left(1-\frac{x}{i}\right)^i = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right]$. Nun setzt Euler $\left(1+\frac{x}{i}\right)^i - \left(1-\frac{x}{i}\right)^i = a^n - z^n$, d. h. $a = 1 + \frac{x}{i}$, $z = 1 - \frac{x}{i}$, $n = i$. Hierdurch wird $a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2 = 2 + \frac{2x^2}{i^2} - 2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k\pi}{i}$. Man kann wieder $\cos\frac{2k\pi}{i} = 1 - \frac{2k^2\pi^2}{i^2}$ schreiben und erhält dann $a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi}{n} + z^2 = \frac{4x^2}{i^2} + \frac{4k^2\pi^2}{i^2} - \frac{4k^2\pi^2x^2}{i^4} = \frac{4k^2\pi^2}{i^2}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{i^2}\right)$, oder $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{6} + \cdots$ ist durch $1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{i^2}$ theilbar. Hiervon aber, fährt Euler fort, kann man sicher den Theil $\frac{x^2}{i^2}$ weglassen, weil derselbe auch mit i multiplicirt immer noch unendlich klein bleibt. Somit ist also ermittelt: $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \cdots = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$. Diese Gleichung dient selbst wieder als Ausgangspunkt neuer Zerlegungen. So lässt $x = z\sqrt{-1}$ links die Sinusreihe entstehen, rechts Factoren $1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} = \left(1-\frac{z}{k\pi}\right)\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)$, und daher hat man die Zerlegung

[1]) Euler, *Introductio* I, § 156 am Anfang.

$\sin z = z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\cdots$ Wieder eine neue Betrachtung beginnt mit $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$ $= \frac{\left(1+\frac{x}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i}{2}$ mit $a = 1 + \frac{x}{i}$, $z = 1 - \frac{x}{i}$, $n = i$. Man erhält eine Factorenzerlegung von $1 + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$, welche mittels $x = z\sqrt{-1}$ in $\cos z = \left(1 - \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi}\right)\cdots$ übergeht. Auch die Ausdrücke $\left(1 + \frac{b+x}{i}\right)^i \pm \left(1 + \frac{c-x}{i}\right)^i$ besitzen die Gestalt $a^n \pm z^n$ und führen Factorenzerlegungen herbei. Die trinomen Factoren sind, nachdem der auftretende Cosinus durch die beiden ersten Glieder der ihm gleichen Reihe ersetzt und ein constanter Factor unberücksichtigt geblieben ist, von der Form $1 + \frac{4(b-c)x + 4x^2}{m^2\pi^2 + (b-c)^2}$ mit ungradem, beziehungsweise gradem m, je nachdem die Summe oder die Differenz der beiden Potenzgrössen zu zerlegen war. Auch bei $e^{b+x} \pm e^{c-x}$ muss, damit eine wirkliche Gleichung entstehe, ein Divisor hinzutreten, und zwar $e^b \pm e^c$, weil $\frac{e^{b+x} \pm e^{c-x}}{e^b \pm e^c}$ durch $x = 0$ in 1 übergeht, wie alle Factoren der Zerlegung durch $x = 0$ zu 1 werden. Besondere Annahmen wie $b = 0$, $c = -c$, $x = \frac{y}{2}$ werden gemacht und mittels $c = g\sqrt{-1}$, $y = v\sqrt{-1}$ noch weiter ausgebeutet. Schliesslich entstehen Factorenzerlegungen für $\cos z + \operatorname{tng}\frac{g}{2}\sin z$ und für $\cos z - \operatorname{cotg}\frac{g}{2}\sin z$. Es lohnt, die frühere Herleitung von Factorenfolgen (S. 636) zu vergleichen, um den Fortschritt zu erkennen, so ungenügend uns vom gegenwärtigen Zustande der Mathematik aus auch die Schlüsse in der Introductio noch vorkommen mögen.

Das 10. Kapitel, Von dem Gebrauche der gefundenen Producte bei der Bestimmung der Summen unendlicher Reihen, erinnert gleichfalls an Euler's Abhandlung von 1734. Genau nach denselben Grundsätzen wie damals folgert Euler aus $1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^6}{5040} + \cdots = \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$, welche Gleichung mittels $x^2 = \pi^2 z$ in $1 + \frac{\pi^2}{6}\cdot z + \frac{\pi^4}{120}\cdot z^2 + \frac{\pi^6}{5040}\cdot z^3 + \cdots = \left(1 + \frac{z}{1}\right)\left(1 + \frac{z}{4}\right)\left(1 + \frac{z}{9}\right)\cdots$ übergeht, dass $\frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^4}{120}, \frac{\pi^6}{5040}\cdots$ die Summe der in den einzelnen zweigliedrigen Factoren auftretenden Coefficienten von z, ihrer Producte zu je zweien, zu je dreien $\cdots$

sein muss, und nennt man $P, Q, R, S, T \cdots$ die Summe der 1ten, 2ten, 3ten, 4ten, 5ten $\cdots$ Potenzen jener Coefficienten, welche mittels des Girard'schen Satzes aus $\frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^4}{120}, \frac{\pi^6}{5040}$ hergeleitet werden, so entsteht $P = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$, $Q = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$, $R = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$, und allgemein zeigt sich $\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots$ als summirbar. Die Summe ist $\frac{2^{2n-2}\pi^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n+1)}$ vervielfacht mit Constanten, welche, wie Euler bei dieser Gelegenheit sagt[1], eine beim ersten Anblick ziemlich unregelmässige Reihe von Brüchen $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{691}{105}, \frac{35}{1} \cdots$ bilden, die bei sehr vielen Gelegenheiten gebraucht werden. Jacob Bernoulli ist nicht erwähnt und ebenso wenig wird der Beziehungen gedacht, welche zwischen den von Jenem beobachteten Zahlen (S. 333) und den hier genannten obwalten. Euler leitet dann aus der Factorenzerlegung von $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \cdots$ ähnliche Reihensummirungen ab, bei welchen wir uns nicht aufhalten wollen, und ebenso gehen wir über die Herleitung von Reihen für die Tangente hinweg[2].

Das 11. Kapitel, Von anderen unendlichen Ausdrücken für die Bögen und die Sinus, setzt den Gegenstand fort. Euler hat den Wallis'schen Ausdruck (Bd. II, S. 827) $\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}$ selbständig hergeleitet. Er hat ihn durch Zusammenfassung von je zwei Factoren des Zählers und des Nenners $\frac{2n(2n+2)}{(2n+1)(2n+1)} = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}$ in die Gestalt $\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right)\left(1 - \frac{1}{49}\right) \cdots$ gebracht und hat auch mittels $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ unter Anwendung der Factorenzerlegung der Sinusreihe $\sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdots}$ gefunden. Logarithmirung giebt ihm $\log\frac{\pi}{4} = \log\left(1 - \frac{1}{9}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{25}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{49}\right) + \cdots$, wo jeder der rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Logarithmen sich vermöge $\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$ in Reihengestalt anschreiben lässt. So wird, wenn man die mit den Coefficienten $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots$ vervielfachten Glieder

---

[1] Euler, *Introductio* I, § 168 am Ende. [2] Ebenda I, § 181.

sämmtlicher Reihen vereinigt, $\log \pi = \log 4 - 1 \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right)$ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \cdots\right) - \cdots$ und alle in Klammern befindlichen Summen sind dem Leser des 10. Kapitels bekannt, wenn auch unser Bericht, um nicht über Gebühr sich auszudehnen, sie übergehen musste. Euler berechnet mit deren Hilfe $\log \pi$ im natürlichen Logarithmensysteme auf 23 Decimalstellen[1]). Dass auch die Logarithmen eines Sinus, eines Cosinus von der Factorenzerlegung der Sinus-, der Cosinusreihe aus ermittelt werden, liegt in der Natur der Untersuchung. Den Schluss des Kapitels bilden weitere Reihen für die Tangente, welche aus denen im 10. Kapitel dadurch gewonnen werden, dass in ihnen auftretende Brüche abermals in Reihenform gebracht werden.

Das 12. Kapitel, Von der Entwicklung der gebrochenen Functionen in reeller Form, kehrt zu der im 2. Kapitel begonnenen Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche zurück. Dort war auf das Reell- oder Imaginärsein der in den Nennern der Partialbrüche auftretenden Factoren des ursprünglichen Nenners keinerlei Gewicht gelegt; jetzt vereinigt Euler wieder je zwei Partialbrüche imaginären Nenners zu einem einzigen, in dessen Nenner ein reelles Trinom zweiten Grades erscheint, d. h. es handelt sich um die Ermittlung der Brüche von der Gestalt $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a} z}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k}$. Heisst der zu zerlegende Bruch $\frac{M}{N}$, ist zunächst $N = (p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)Z$, wo Z durch das erwähnte Trinom nicht weiter theilbar sein soll, und setzt man $\frac{M}{N} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a} z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2} + \frac{Y}{Z}$, so zeigt sich $Y = \frac{M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}$, welches aber eine ganze Function sein muss. Mithin muss der Ausdruck $M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz$ durch den trinomen Nenner theilbar sein oder gleichzeitig mit $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ verschwinden, beziehungsweise verschwinden, wenn $z = \frac{p}{q}(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)$ ist. Die Vollziehung der beiden Substitutionen für z in $M - \mathfrak{A}Z - \mathfrak{a}Zz$ unter Anwendung von $z^n = \left(\frac{p}{q}\right)^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi)$ liefert zwei Gleichungen, denen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ zu entnehmen sind. Im weiteren Verlaufe des Kapitels wird alsdann der allgemeinere Fall erörtert, dass N das Trinom k-mal als Factor enthält und die ganze positive Zahl $k > 1$ ist.

Das 13. Kapitel, Von den recurrenten Reihen, kehrt zu dem Gegenstande des 4. Kapitels zurück. Dort war die recurrente Reihe

[1]) Euler, *Introductio* I, § 190 am Ende.

aus einem ihr gleichen Bruche unter Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten hergestellt, während die Division als Entwicklungsmittel verschmäht wurde. Jetzt tritt grade die Division in ihre Rechte. Zugleich kann aber der erzeugende Bruch in seine Partialbrüche zerlegt werden. Jeder Partialbruch gibt für sich eine recurrente Reihe, und die Summe dieser Reihen muss gleich der aus dem unzerlegten Bruche hervorgegangenen Reihe sein, wobei der Satz in Anwendung kommt, der die eigentliche Grundlage der Methode der unbestimmten Coefficienten bildet, dass aus der Gleichheit der Reihen $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \cdots$ mit Nothwendigkeit die Gleichheit der Coefficienten gleich hoher Potenzen von z in beiden Reihen folge. Euler war der Erste gewesen, der diesen Satz unmittelbar aussprach (S. 654), er war auch der Erste, der die Empfindung der Nothwendigkeit einer Rechtferti gung des Satzes besass. Sein Beweis[1]) besteht darin, dass er mittels $z = 0$ zeigt, dass $A = \mathfrak{A}$ sein müsse, dass er alsdann durch Weglassung dieser einander gleichen Grössen aus der anfänglichen Gleichung und darauf folgende Division durch z sich die neue Gleichung $B + Cz + Dz^2 + \cdots = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D}z^2 + \cdots$ verschafft, aus welcher er mittels $z = 0$ auf $B = \mathfrak{B}$ schliessen kann u. s. w. Der Nutzen der von uns als Grundgedanke des Kapitels bezeichneten Betrachtung liegt darin, dass die vorhergegangene Zerlegung in Partialbrüche es vielfach ermöglicht, das an sich undurchsichtige allgemeine Glied einer recurrenten Reihe deutlich zu erkennen. Eine solche Undurchsichtigkeit herrscht z. B. bei den Coefficienten von $\frac{1-z}{1-5z+6z^2} = 1 + 4z + 14z^2 + 46z^3 + 146z^4 + 454z^5 + \cdots$, während $\frac{1-z}{1-5z+6z^2} = \frac{-1}{1-2z} + \frac{2}{1-3z} = (-1 - 2z - 2^2z^2 - \cdots) + (2 + 2\cdot 3z + 2\cdot 3^2z^2 + \cdots)$ zeigt, dass das allgemeine Glied $(2\cdot 3^n - 2^n)z^n$ heisst. Verwickelter, aber keineswegs unlösbar wird die Aufgabe, das allgemeine Glied der einer Division entstammenden recurrenten Reihe zu finden, wenn die reellen Nenner der gebildeten Partialbrüche Trinome zweiten Grades oder deren Potenzen sind.

Das 14. Kapitel, Von der Vervielfachung und Teilung der Winkel, ist die Fortbildung der dem 8. Kapitel angehörenden Recursionsformeln

$$\sin(2y + z) = 2\cos y \cdot \sin(y + z) - \sin z$$
$$\cos(2y + z) = 2\cos y \cdot \cos(y + z) - \cos z.$$

Wie im 8. Kapitel wird der Sinus und der Cosinus des n-fachen

[1]) Euler, *Introductio* I, § 214.

Winkels aus den Functionen des einfachen Winkels gefunden, aber auch umgekehrt ist der Sinus oder Cosinus des einfachen Winkels als Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades aufzufassen, welcher eine Function des n-fachen Winkels als Gleichungsconstante dient. Dem algebraischen Nachweise, dass eine solche Gleichung n Wurzeln besitze, steht die Thatsache zur Seite, dass $\sin s = \sin(\pi - s)$ $= \sin(2\pi + s) = \sin(3\pi - s) = \cdots$ und dass, wenn $z = \frac{s}{n}$ ist, auch $z = \frac{\pi - s}{n}$, $z = \frac{2\pi + s}{n}$, $z = \frac{3\pi - s}{n} \cdots$ gewählt werden darf, wodurch $\sin z$ und $\cos z$ jedes so viele verschiedene Werthe erhält, als die Zahl n angiebt. Jede zum voraus zu erkennende Gleichungswurzel entspricht einem Factor des Gleichungspolynoms, und nun ergiebt sich die Zerfällung des Gleichungspolynoms in Factoren, ergiebt sich die Vergleichung der Gleichungscoefficienten mit den Coefficienten des Productes aus den erkannten Factoren, ein Verfahren, welches im 9. Kapitel nicht angewandt worden war. Die erwähnten Recursionsformeln für Sinus und Cosinus von in arithmetischer Progression fortschreitenden Kreisbögen führen[1] zu $\sin a + z \cdot \sin(a + b)$ $+ z^2 \cdot \sin(a + 2b) + \cdots = \frac{\sin a + z(\sin(a+b) - 2\sin a \cdot \cos b)}{1 - 2z\cos b + z^2}$ und mittels $z = 1$ zur Summirung der unendlichen Reihe $\sin a + \sin(a + b)$ $+ \sin(a + 2b) + \cdots = \frac{\sin a + \sin(a+b) - 2\sin a \cdot \cos b}{2 - 2\cos b} = \frac{\sin a - \sin(a-b)}{2(1 - \cos b)}$ $= \frac{2\cos\left(a - \frac{b}{2}\right)\sin\frac{b}{2}}{4\sin\frac{b^2}{2}} = \frac{\cos\left(a - \frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}$. Ganz ähnlich muss die unendliche Reihe $\sin(a + (n+1)b) + \sin(a + (n+2)b) + \sin(a + (n+3)b)$ $+ \cdots = \frac{\cos\left(a + \left(n + \frac{1}{2}\right)b\right)}{2\sin\frac{b}{2}}$ sein, und durch Subtraction der beiden unendlichen Reihen von einander entsteht die endliche Reihe $\sin a +$ $\sin(a+b) + \sin(a+2b) + \cdots + \sin(a+nb) = \frac{\cos\left(a - \frac{b}{2}\right) - \cos\left(a + \left(n + \frac{1}{2}\right)b\right)}{2 \cdot \sin\frac{b}{2}}$ $= \frac{\sin\left(a + \frac{nb}{2}\right) \cdot \sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$. Es ist geradezu merkwürdig, wie Euler hier auf dem Umwege über zwei ganz unzulässige Summirungen divergenter Reihen zu einer durchaus richtigen Summe einer endlichen

[1]) Euler, *Introductio* I, § 258.

Reihe gelangte. Wie für den Sinus verfuhr Euler auch für den Cosinus. Er gelangte[1]) zu dem unrichtigen $\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots = -\frac{\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\frac{b}{2}}$ und von da aus zu dem richtigen $\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cdots + \cos(a+nb) = \frac{\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)\cdot\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$.

Das 15. Kapitel, Von den Reihen, welche aus der Entwicklung von Producten entspringen, enthält Untersuchungen, welche man Anwendungen der Reihenlehre auf die Zahlentheorie zu nennen versucht wäre, indem, wo seither alle ganzen Zahlen der Reihe nach gewählt wurden, um das Gesetz einer Reihe zu verwirklichen, jetzt ausschliesslich Primzahlen an deren Stelle treten. Schon im Briefwechsel Euler's mit Goldbach von 1739 traten solche Dinge auf[2]). Bei Annahme gleichen Werthes für die beiden unendlichen Ausdrücke $(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\cdots = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots$ zeigt sich A als Summe der einzelnen Zahlen $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots$, $B, C, D \cdots$ als Summe ihrer Producte zu je 2, 3, 4 .... Ist nun $\alpha = \frac{1}{2^n}$, $\beta = \frac{1}{3^n}$, $\gamma = \frac{1}{5^n}$, $\delta = \frac{1}{7^n}\cdots$, d. h. hat man die reciproken n^{ten} Potenzen der Primzahlen gewählt, so ist A deren Summe u. s. w., und das ganze Product wird bei $z=1$ zu $P = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\cdots = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \cdots$ und die Nenner der addirten Brüche sind die n^{ten} Potenzen aller Zahlen, welche weder Potenzen, noch durch irgend eine Potenz theilbar sind. Wird $z = -1$ angenommen, so sind die Glieder der aus dem Producte entstandenen Reihe absolut betrachtet die gleichen wie vorher, nur mit derart wechselnden Vorzeichen, dass bei ungrader, beziehungsweise bei grader Factorenzahl derjenigen Zahl, deren n^{te} Potenz im Nenner steht, das Minuszeichen, beziehungsweise das Pluszeichen auftritt. $P = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\cdots = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \cdots$. Dann kommt $\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\cdots} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots$ an die Reihe. Hier sind offen-

[1]) Euler, *Introductio* I, § 260. [2]) *Corresp. math.* (Fuss) I, 82 sqq.

bar, sagt Euler[1]), die $A, B, C, D \cdots$ aus den $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ so zusammengesetzt, dass A die Summe dieser Zahlen einzeln genommen, $B, C, D \cdots$ die Summe der Producte aus je $2, 3, 4 \cdots$ ist, jedoch so, dass bei der Bildung dieser Summen diejenigen Producte, welche zwei oder mehrere gleiche Factoren enthalten, nicht ausgeschlossen werden dürfen. Euler dachte sich muthmasslich die Herleitung mittels auf einander folgender Division durch die einzelnen Nennerfactoren. So bekam er $\frac{1}{1-\alpha z} = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z^3 + \cdots$, dann $\frac{1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \alpha^3 z^3 + \cdots}{1 - \beta z} = 1 + (\alpha + \beta) z + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) z^2 + (\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) z^3 + \cdots$, ferner $\frac{1 + (\alpha+\beta) z + (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) z^2 + (\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3) z^3 + \cdots}{1 - \gamma z}$ $= 1 + (\alpha + \beta + \gamma) z + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2) z^2 + (\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 + \alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \gamma^3) z^3 + \cdots$, und ähnlich muss jede folgende Division wirken, wenn man sich mit der rein formalen Bildung der Quotienten in Gestalt unendlicher Reihen begnügt. Auch hier setzt Euler $z = 1$ und wählt für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ die reciproken Primzahlen mit Ausschluss der 1. Die Reihenentwicklung muss sämmtliche Stammbrüche liefern, deren Nenner Primzahlen oder aus solchen durch Multiplicationen entstanden sind, d. h. überhaupt alle Stammbrüche, und es muss daher sein $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdots}$ $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$. Nach dem gleichen Verfahren gelangt man zu $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\cdots} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ $+ \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots$. Kenntniss des Werthes des im Nenner links vom Gleichheitszeichen auftretenden Productes führt also zur Kenntniss der Reihensumme rechts und umgekehrt. Ferner kann auch rechts und links die Logarithmirung vorgenommen werden. Links entstehen Summen von Logarithmen, deren jeder durch eine unendliche Reihe ersetzt werden kann, und so kommen wieder neue Reihen mit neu bekannt werdenden Summen, beziehungsweise neue Producte zu Stande.

Das 16. Kapitel, Von der Zerlegung der Zahlen in Theile, setzt die zahlentheoretischen Betrachtungen fort und zwar an einer Aufgabe, welche, wie wir wissen (S. 597), vor 1743 von Philip Naudé dem Jüngeren gestellt worden war. Euler bringt sie in Verbindung mit Productenbildungen, wie das 15. Kapitel sie gelehrt hatte. Wird $(1 + x^\alpha z)(1 + x^\beta z)(1 + x^\gamma z) \cdots = 1 + Pz + Qz^2$

[1]) Euler, *Introductio* I, § 270.

$+ Rz^3 + \cdots$ gesetzt, so ist $P = x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + \cdots$. Die nach folgenden Coefficienten sind: Q die Summe derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Summen je zweier verschiedener Zahlen aus der Reihe $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ sind, R die Summe derjenigen Potenzen von x, deren Exponenten die Summe je dreier verschiedener unter den genannten Zahlen sind u. s. w. Kann ein Exponent auf mehrere verschiedene Arten durch Addition hervorgebracht werden, so erhält das betreffende Glied einen Zahlencoefficienten. Das Auftreten von $Nx^n z^m$ in dem gebildeten Producte bedeutet also, dass n in N verschiedenen Arten aus m unter einander verschiedenen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ additiv hergestellt wurde, oder N ist die Zerlegungszahl von n in m verschiedene Theile. Die Bedingung der Verschiedenheit der Theile fällt weg, sobald der Quotient $\frac{1}{(1-x^\alpha z)(1-x^\beta z)(1-x^\gamma z)\cdots}$ in die Reihe $1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \cdots$ verwandelt wird. Die Aufgabe der Zahlen zerlegung ist damit auf eine andere Aufgabe zurückgeführt. Zu ihrer Lösung genügt die Möglichkeit, in den beiden vorerwähnten Hauptfällen die Coefficienten $P, Q, R \cdots$ leicht ermitteln zu können. Ist $Z = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\cdots$, so ist $\frac{Z}{1+xz} = (1+x^2z)(1+x^3z)\cdots$. Das ist aber das gleiche Product, welches entsteht, wenn in $(1+xz)(1+x^2z)\cdots$ der Buchstabe z durch xz ersetzt wird. Das Z genannte Product heisst als Reihe $1 + Pz + Qz^2 + \cdots$. Ersetzt man in ihr z durch xz, so entsteht $1 + Pxz + Qx^2z^2 + \cdots$ und man erhält die Gleichung $\frac{Z}{1+xz} = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + \cdots$, woraus $Z = (1+xz)(1 + Pxz + Qx^2z^2 + \cdots) = 1 + (1+P)xz + (P+Q)x^2z^2 + \cdots$ folgt. Durch Gleichsetzung der gleiche Potenzen von z in sich schliessenden Glieder der beiden Reihenformen für Z entsteht $P = (1+P)x$, $Q = (P+Q)x^2$, $R = (Q+R)x^3 \cdots$ und $P = \frac{x}{1-x}$, $Q = \frac{Px^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$, $R = \frac{Qx^3}{1-x^3} = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ u. s. w. Der allgemeine Ausdruck für den m^{ten} Coefficienten heisst $\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$. Da nun der Bruch $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ in eine Reihe entwickelt genau dieselben Reihenglieder liefert wie derjenige, welcher $x^{\frac{m(m+1)}{2}}$ im Zähler besitzt, wenn man auf die Coefficienten allein achtet, während freilich der Unterschied der Exponenten von x in einander der Rangordnung und den Coefficienten nach entsprechenden Gliedern stets $\frac{m(m+1)}{2}$ ist, da ferner die Coefficienten die Zerlegungszahlen sind, so folgt der Satz: Die Zahl $n + \frac{m(m+1)}{2}$

lässt sich auf ebensoviele Arten in m ungleiche Theile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, \cdots m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann. Wird das dem Sinne nach gleiche Verfahren auf den anderen Fall angewandt, wo $Z = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)\cdots}$ $= 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \cdots$ war, so findet sich als allgemeiner Ausdruck für $P, Q, R \cdots$ der Bruch $\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ und daraus der Satz: Die Zahl $n + m$ lässt sich auf ebensoviele Arten in m gleiche oder ungleiche Theile zerlegen, als die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, \cdots m$ durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Das 17. Kapitel, Von dem Gebrauch der recurrenten Reihen bei der Berechnung der Wurzeln der Gleichungen, hat uns schon (S. 621) den Anlass zu einer Verweisung gegeben. Euler verspricht nämlich in den Einleitungsworten des Kapitels eine sorgfältigere Auseinandersetzung der von Daniel Bernoulli im IV. Bande der Petersburger Commentarien über denselben Gegenstand enthaltenen Untersuchungen. Unser Bericht wird sich auf die ersten Paragraphe des Kapitels beschränken dürfen, welche den grundlegenden Gedanken erörtern. Sei in dem Bruche $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots}$ der Nenner das Product lauter von einander verschiedener reeller einfacher Factoren $(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)\cdots$, und sei der Bruch ebensowohl in Gestalt einer recurrenten Reihe $A + Bz + Cz^2 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + \cdots$, als in seiner Zerlegung in Partialbrüche $\frac{\mathfrak{A}}{1-pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1-qz} + \frac{\mathfrak{C}}{1-rz} + \cdots$ bekannt. Jeder Partialbruch giebt selbst wieder eine recurrente Reihe wie $\frac{\mathfrak{A}}{1-pz} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}pz + \mathfrak{A}p^2z^2 + \cdots + \mathfrak{A}p^nz^n + \cdots$, und setzt man die Summe dieser partiellen recurrenten Reihen gliedweise gleich der aus dem ursprünglichen Bruche hervorgegangenen Reihe, so zeigt sich $P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n + \cdots$ und $Q = \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1} + \mathfrak{C}r^{n+1} + \cdots$. Ist nun p am grössten, oder $\frac{1}{p}$ die kleinste Wurzel der Gleichung $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots = 0$ und n eine grosse Zahl, so dass p^n über q^n, $r^n \cdots$ und p^{n+1} über q^{n+1}, $r^{n+1} \cdots$ weit überwiegt, so ist annähernd $P = \mathfrak{A}p^n$, $Q = \mathfrak{A}p^{n+1}$ und demzufolge $p = \frac{Q}{P}$ ein Werth, der um so richtiger ist, je grösser n gewählt wurde. Zugleich ist aber p die grösste Wurzel derjenigen Gleichung, welche aus $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \cdots = 0$ mittels der Substitution $z = \frac{1}{x}$ entsteht. Die Zählercoefficienten $a, b, c, d \cdots$ sind dabei vollkommen willkürlich, können somit so gewählt werden, dass die Rechnung so wenig Mühe als möglich macht.

Das 18. Kapitel, Von den Kettenbrüchen, endlich beruht auf den beiden Abhandlungen im IX. und XI. Bande der Petersburger Commentarien (S. 670—676). Neues ist so gut wie nicht hinzugetreten, vielmehr ist nur der Inhalt jener Abhandlungen, soweit er elementarer Natur ist, klar und einfach dargestellt.

112. Kapitel.

Reihen 1749—1754. Die Grundlagen der Differentialrechnung.

In der Introductio war der umfassendste Gebrauch von Exponentialgrössen mit complexen Exponenten gemacht. De Moivre (S. 624) hatte 1730 einen für jene Grössen grundlegenden Satz ausgesprochen. D'Alembert (S. 566) hatte 1746 erörtert, dass jede Function einer imaginären Zahl sich auf die Form $A + B\sqrt{-1}$ bringen lassen müsse. Euler (S. 580) bestätigte in dem auf das Erscheinen der Introductio folgenden Jahre 1749 D'Alembert's Behauptung. Euler's Bestätigung wurde in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie gedruckt und in einer anderen Abhandlung ebendesselben Bandes wandte sich Euler einer verwandten Frage zu, die schon lange theils in dem Drucke übergebenen Abhandlungen von Johann Bernoulli (S. 348) und Leibniz (S. 353) angedeutet, theils in dem Briefwechsel Beider erörtert war (S. 357). Dieser Briefwechsel war aber seit 1745 in allen Händen, und damit war der Aufmerksamkeit der Zeitgenossen ein Gegenstand empfohlen, welchen endgiltig zu erledigen der Augenblick gekommen war. Der Titel von Euler's Abhandlung[1]) lautet: Ueber die Meinungsverschiedenheit von Leibniz und Bernoulli bezüglich der Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen.

Euler beginnt damit, über Bernoulli's Meinung, man müsse $\log(-x) = \log x$ setzen, zu berichten und die von ihrem Urheber angegebenen Gründe zu prüfen. Wenn Johann Bernoulli anführe, die nach x genommenen Differentialquotienten von $\log(-x)$ und von $\log x$ seien einander gleich, oder, was eigentlich dasselbe nur in geometrischer Form besage, die Differentialgleichung der Curve $ydx = dy$ bleibe unverändert, wenn y durch $-y$ ersetzt werde, und daraus folge, dass jene Curve auch unterhalb der Abscissenaxe einen Ast besitzen müsse (vergl. Fig. 48 auf S. 357), so könne dem entgegen gehalten werden, die Gleichheit der Differentialquotienten bedinge die

[1]) *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les Logarithmes des nombres négatifs et imaginaires par M. Euler* in der *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. T. V. 139—179.

Gleichheit ihrer Integrale nur unter Zuziehung einer Constanten. Finde doch auch die Gleichung $\frac{d\log nx}{dx} = \frac{d\log x}{dx}$ statt, und doch sei nicht $\log nx = \log x$, sondern $\log nx = \log x + \log n$, und ähnlicherweise sei $\log(-x) = \log x + \log(-1)$. Wenn Bernoulli sich für die Zusammensetzung der logarithmischen Curve aus zwei Aesten weiterhin darauf stütze, die Differentialgleichung $dx = \frac{dy}{y^n}$ gehöre, so oft n eine ganze ungrade Zahl sei, stets zu einer symmetrisch zur Abscissenaxe zweiästig verlaufenden Curve, und $n = 1$ könne keinen Ausnahmefall darstellen, so erinnert Euler daran, das sei höchstens wahr, so lange es sich um algebraische Curven handle, und auch bei diesen könne das Einsetzen bestimmter Werthe den Charakter der Curve wesentlich ändern. Aus $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$ entstehe z. B. durch Rationalisirung eine Gleichung 8ten Grades, in welcher y nur grade Exponenten besitze, die Curve habe also zwei zur Abscissenaxe symmetrische Aeste. Werde der besondere Fall $b = 0$ ins Auge gefasst, und rationalisire man $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$, so entstehe $y^4 - 2axy^2 - 4a^2xy + a^2x^2 - a^3x = 0$, und das in dieser Gleichung vorkommende Glied $-4a^2xy$ beweise, dass von einer Symmetrie zur Abscissenaxe nicht die Rede sein könne. Wenn Bernoulli endlich sage, wegen $(-a)^2 = (+a)^2$ sei $\log[(-a)^2] = \log[(+a)^2]$ oder $2\log(-a) = 2\log(+a)$, also $\log(-a) = \log(+a)$, so könne man mit genau gleichem Rechte aus $(a\sqrt{-1})^4 = (+a)^4$ und aus $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = (+a)^3$ auch folgern $\log a = \log(a\sqrt{-1}) = \log\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)$. Dass aber $\log(\sqrt{-1})$ nicht 0 sei, habe grade Johann Bernoulli einst selbst gelehrt, wo er den Zusammenhang zwischen den Logarithmen imaginärer Grössen und der Rectification des Kreises in einer Weise erkannte (S. 348), welche auf die Behauptung $\log(\sqrt{-1}) = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ hinausläuft.

Auf der anderen Seite führe die Bestreitung der Bernoulli'schen Meinung zu grossen Schwierigkeiten. Ist z. B. $\log(-a)$ von $\log a$ verschieden, also $\log(-1)$ nicht $= 0$, so sei $\log(-1) = \omega$. Nun ist $(-1)\cdot x = \frac{x}{-1}$ und durch Logarithmirung $\log x + \omega = \log x - \omega$, oder $\omega = -\omega$, was einen Widerspruch gegen die Behauptung, ω sei von 0 verschieden, enthält.

Euler geht sodann zur Prüfung der Leibniz'schen Meinung vom Imaginärsein von $\log(-1)$ über. Die logarithmische Reihe $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ zeige bei $x = 0$, dass

$\log 1 = 0$ sein müsse[1]). Setze man $x = -2$, so komme man zu $\log(-1) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \cdots$ und die Summe dieser divergenten Reihe könne nicht 0 sein, also sei $\log(-1)$ von Null verschieden. Aber warum, wirft Euler sich selbst ein, sollte $-2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \cdots$ von 0 verschieden sein müssen? Setze man in $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ zuerst $x = -3$, dann $x = 1$, so erhalte man $-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots$, $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, und die Addition beider Entwicklungen führe zu $0 = 2 + 2 + 10 + 26 + \cdots$, was nicht weniger Schwierigkeit besitze, als die Annahme $0 = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \cdots$. Einen anderen Beweis dafür, dass $\log(-1)$ nicht $= 0$ sein könne, erhalte man von der Reihenentwicklung $e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ aus, welche immer convergire, eine wie grosse Zahl man auch für y wähle, so dass die aus der Natur der divergenten Reihen entnommenen Gegengründe nicht Platz greifen[2]). Wenn $e^y = -1$, $y = \log(-1)$ sein solle, liefere diese Reihe $-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ und dieser Gleichung könne nicht durch $y = 0$ genügt werden, weil sonst $-1 = 1$ sein müsste. Aber auch hier weiss Euler einen Einwand, der sich dahin ausspricht, dass die Function, welche einer Reihe als Ursprung diene, Werthe besitzen könne, welche in der Reihe nicht ihren Ausdruck finden. So sei z. B. $(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots$, und die Reihe gebe einen eindeutigen Werth, während die Function zweideutig sei und ebensowohl positiv als negativ genommen werden dürfe[3]).

Nachdem Euler so die unleugbaren Schwierigkeiten hervorgehoben hat, welche sich ergeben, mag man nun für Bernoulli oder für Leibniz Partei ergreifen, fragt er nach dem tieferen Grunde aller dieser Schwierigkeiten und findet ihn in der bis dahin von Niemand bemerkten Unendlichvieldeutigkeit der Logarithmen. Ist $y = \log x$ und $x = (1 + \omega)^n$, wo n unendlich gross, ω unendlich klein, so ist bekannt, dass $y = n\omega$. Aber aus $x = (1 + \omega)^n$ folgt $\omega = \sqrt[n]{x} - 1$,

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. T. V, 149 schreibt hier infolge eines offenbaren Druckfehlers die Substitution $x - 1$ anstatt $x = 0$ vor. Auf andere Druckfehler, die nicht gar selten sind, machen wir nicht besonders aufmerksam. [2]) Ebenda T. V, 150. [3]) Ebenda T. V, 152.

$n\omega = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ oder $\log x = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)_{(n=\infty)}$. Wie eine Quadratwurzel 2, eine Kubikwurzel 3 von einander verschiedene Werthe hat, so muss es bei einer n^{ten} Wurzel n dergleichen geben. In dem der Aufsuchung von $\log x$ zu Grunde liegenden Falle ist $n = \infty$, folglich giebt es hier unendlich viele $\sqrt[n]{x}$ und ebensoviele $\log x$. Ist insbesondere $x = 1$, so findet sich $y = \log 1 = \infty\left(\sqrt[\infty]{1} - 1\right)$ oder $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$, aus welcher Gleichung die n Werthe von y hervorgehen, indem man $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1$ in n einfache Factoren zerlegt, deren jeder für sich $= 0$ zu setzen ist, deren zwei sich aber auch zu einem reellen trinomen Factor vereinigen. Nun weiss man, dass ein reeller trinomer Factor von $p^n - q^n$ die Gestalt $p^2 - 2pq\cos\frac{2\lambda\pi}{n} + q^2$ besitzt, wo λ beliebig ganzzahlig ist, und dass $p^2 - 2pq\cos\frac{2\lambda\pi}{n} + q^2 = 0$ zu $p = q\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right)$ führt. In dem besonderen Falle von $p = 1 + \frac{y}{n}$, $q = 1$ wird also $1 + \frac{y}{n} = \cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{n}$. Dabei ist $n = \infty$, folglich $\cos\frac{2\lambda\pi}{n} = 1$, $\sin\frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n}$, mithin $1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \sqrt{-1}\cdot\frac{2\lambda\pi}{n}$ und $y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ als unendlichvieldeutiger Logarithmus von 1, indem λ jeden ganzzahligen Werth annehmen kann. Die Annahme $\lambda = 0$ liefert den einzigen reellen $\log 1 = 0$. Um $\log(-1)$ mit seinen unendlichvielen Werthen zu finden, hat man $y = \log(-1) = n\left(\sqrt[n]{-1} - 1\right)$ zu setzen, beziehungsweise $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = -1$, und der in n Factoren zu zerlegende Ausdruck heisst $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1$. Die trinomen Factoren von $p^n + q^n$ sind $p^2 - 2pq\cos\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} + q^2$, und setzt man diese allgemeine Form des Trinoms $= 0$, so wird $p = q\left(\cos\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}\right)$. Gegenwärtig ist $p = 1 + \frac{y}{n}$, $q = 1$, also $1 + \frac{y}{n} = \cos\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n} = 1 \pm \sqrt{-1}\cdot\frac{(2\lambda - 1)\pi}{n}$ und $y = \log(-1) = \pm(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}$. Nun bleiben noch die Logarithmen imaginärer Zahlen zu bestimmen. Jede imaginäre Zahl kann auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ gebracht werden. Man kann $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\varphi$ setzen, und das entsprechende φ trigonometrischen Tabellen entnehmen. Setzt man ferner $\sqrt{a^2 + b^2} = c$, so ist $a + b\sqrt{-1} = c(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$

$= e^C (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$. Demzufolge ist $\log(a + b\sqrt{-1}) = C + \log(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ und es kommt auf die Auffindung von $y = \log(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ an, zu welcher die Gleichung $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = 0$ führen müsste, wenn man im Stande wäre, ihr die Gestalt $p^n - q^n = 0$ zu geben. Nun ist $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1\cdot 2} + \frac{\varphi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$, $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\varphi^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$, $\left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n_{(n=\infty)} = 1 + \varphi\sqrt{-1} - \frac{\varphi^2}{1\cdot 2} - \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$, d. h. die Umwandlung $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n$ ist erfolgt, und $p = 1 + \frac{y}{n}$, $q = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}$. Die einzelnen Factoren ergeben sich, wenn fortwährend $n = \infty$ berücksichtigt und deshalb der Cosinus eines durch n geteilten Bogens durch 1, sein Sinus durch den Bogen ersetzt wird, mittels $p = q\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right) = q\left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$, d. h. $1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\varphi}{n}\sqrt{-1}\right)\left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right) = 1 \mp \frac{2\lambda\varphi\pi}{n^2} + \frac{\varphi \pm 2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$ und $y = \log(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = (\varphi \pm 2\lambda\pi)\sqrt{-1}$, beziehungsweise $\log(a + b\sqrt{-1}) = C + (\varphi \pm 2\lambda\pi)\sqrt{-1}$, wo $C = \log\sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Die Lehre von den imaginären Zahlen war damit plötzlich um ein Wesentliches gefördert, so wenig man vergessen darf, dass der erzielte Fortschritt allmälig und seit geraumer Zeit von Cotes, von De Moivre, von Euler selbst vorbereitet war. Aber in einem Punkte war noch keine Klarheit geschaffen. Das Imaginäre galt nach wie vor als unmögliche Schöpfung einer ungezügelten Einbildungskraft. Man hatte gelernt, alle ersinnlichen Rechnungsarten an imaginären Zahlen auszuüben, aber man hatte nicht gelernt, sie selbst zu versinnlichen. Den ersten Versuch dieser Art machte Heinrich Kühn[1] (1690—1769), der, in Königsberg geboren, seit 1733 am Gymnasium in Danzig wirkte, auch 1743 an der Begründung der Danziger naturforschenden Gesellschaft theilnahm. Die Abhandlung *Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis*, um derenwillen wir Kühn zu nennen haben, ist von der Petersburger Akademie veröffentlicht[2]. Kühn's Gedanken

[1] Allgemeine deutsche Biographie XVII, 341. Artikel von S. Günther.
[2] *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, 170—223.

über die Construction imaginärer Grössen und über die Nachweisung imaginärer Wurzeln sind folgende. Seien (Fig. 109) vier congruente Rechtecke α, β, γ, δ aus den Seiten a, b hergestellt und um den Punkt P herumgelegt, eine Annahme, deren erster Theil fast unmittelbar dahin abgeändert wird, dass die Rechtecksseiten als gleich gedacht und die Rechtecke dadurch zu Quadraten werden. Die entgegengesetzte Richtung der Seiten zwingt dazu, wenn $PQ = +a$, $PR = +b$ ist, $Pq = -a$, $Pr = -b$ zu setzen. Die Flächen der einzelnen Rechtecke sind demnach $\alpha = +a \cdot +b = +ab$, $\beta = -b \cdot +a = -ba$, $\gamma = -a \cdot -b = +ba$, $\delta = -a \cdot +b = -ab$.

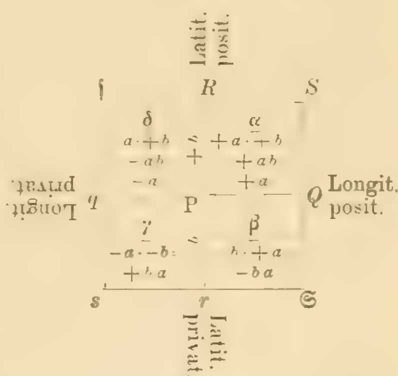


Fig. 109.

Man erkennt $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$. Die formell verschiedene Anordnung der Factoren ab, ba in den Producten ist nur gewählt, um äusserlich zwischen α und γ, zwischen β und δ zu unterscheiden. Ist die absolute Länge von $a = b = 3$, so haben die Quadrate α und γ jeweils die Fläche 9, die Quadrate β und δ jeweils die Fläche -9, und $\pm\sqrt{9}$, $\pm\sqrt{-9}$ müssen die Seiten jener Quadrate sein. Es ist unthunlich, dagegen den Einwand zu erheben, eine Grösse wie $\pm\sqrt{-9}$ sei nur imaginär, unmöglich und unangebbar[1]), weil aus $-a^2$ in keiner Weise eine Quadratwurzel gezogen werden könne, da sowohl $+a \cdot +a = +a^2$ als auch $-a \cdot -a = +a^2$ sei; denn einestheils könne eine Rechnung, welche von möglichen oder reellen gegebenen Grössen ausgehe und in Uebereinstimmung mit unzweifelhaften Grundsätzen behandelt sei[2]), auf keinerlei Weise zu Unmöglichem, oder Nichtreellem, oder Unangebbarem führen, und anderntheils lasse die vorgeschriebene Construction erkennen, dass die Voraussetzung, alle reellen Quadrate seien positiv, nicht zu Recht bestehe[3]). Auch auf quadratische Gleichungen, denen das Glied ersten Grades nicht fehlt, geht Kühn in fast zu ausführlicher Darstellung ein, um die Fälle zu unterscheiden, in welchen deren Wurzeln imaginär werden, dann auf die Gleichungen dritten Grades, zu deren Versinnlichung er acht

[1] *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751 T. III. 176: *esse mere imaginarias, impossibiles et inassignabiles.* [2] *Calculus ex datis possibilibus aut realibus profectus, et axiomatibus indubiis convenienter tractatus.* [3] *, minus recte etiam supponi videtur, omnia quadrata realia esse positiva*

um einen Punkt des Raumes herumgelagerte Würfel benutzt, deren Rauminhalt absolut genommen gleich, dem Vorzeichen nach verschieden ist. Es sind das Untersuchungen, welche, wenigstens so weit quadratische Gleichungen in Frage treten, auch Wallis im 66. bis 69. Kapitel seiner Algebra beschäftigten. Eine Frage stellte Wallis, stellte Kühn nie und nirgend, auf deren Beantwortung es grad am meisten ankäme: wenn das in Fig. 109 gezeichnete Quadrat β einen negativen Flächeninhalt besitzt, wo liegt dessen zur Versinnlichung der imaginären Zahl geeignete Seite? Und ganz ähnlich fehlt die entsprechende Frage bei der Untersuchung über die cubische Gleichung. Mag der Verfasser der dem III. Bande der neuen Petersburger Commentarien vorausgeschickten Einleitung, in welcher über den Inhalt der einzelnen Abhandlungen mehr oder weniger genügende Andeutungen gegeben sind, an Kühn's Arbeit mit den Worten vorbeigegangen sein: Diese Abhandlung ist so werthvoll, dass wegen der Art der Auseinandersetzung nichts zu sagen ist, und wir vorzögen, dass die Leser die Abhandlung selbst in Augenschein nähmen[1]), so hindert das von ihm ausgesprochene überschwängliche Lob doch nicht den Eindruck, als ob jenes Lob eine Art von Verlegenheitsredensart gewesen sei, hinter welcher ein gewisses Nichtverstehen sich verbarg. Alles in allem wird man es begreiflich finden, dass Kühn's Verdienst, die Frage nach dem sinnlichen Vorhandensein des Imaginären auf die Tagesordnung gesetzt zu haben, nachmals höher geschätzt wurde, als die Art, in welcher er selbst sich mit der unleugbaren Schwierigkeit abzufinden suchte.

Der Band Petersburger Akademieschriften, in welchem Kühn's Erläuterungsversuch des Imaginären der Oeffentlichkeit übergeben wurde, enthält auch zwei Euler'sche Aufsätze, in welchen der Lehre von den Reihen eine neue Seite abgewonnen ist. Deren erster, *De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum*[2]), oder Bestimmung von Reihen und neue Methode, das allgemeine Reihenglied zu finden, beleuchtet eine Schwierigkeit der Interpolationsaufgabe. Man sei, sagt Euler, geneigt anzunehmen, dass der Verlauf einer Reihe bekannt sei, wenn man beliebig viele Glieder derselben kenne, aber dem sei nicht so. Denke man sich die einzelnen Reihenglieder als Ordinaten zu Abscissen, deren Länge die Ordnungszahl des betreffenden Reihengliedes angiebt, so kann durch die Endpunkte jener Ordinaten eine unbegrenzte Anzahl von Curven gezogen werden, welche alle unter einander verschieden darin allein

[1]) *Novi commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751 T. III, Einleitung pag. 18. [2]) Ebenda T. III, 36—85.

übereinstimmen, dass sie bei ganzzahlig positiver Abscisse die gleiche Ordinate besitzen. Für die Interpolation der vorgelegten Reihe, für die Auffindung eines Reihengliedes mit nicht ganzzahlig positiver Ordnungszahl, oder geometrisch gesprochen für den Verlauf der Curve zwischen den gegebenen Punkten sei gar nichts gewonnen. Soll z. B. bei jedem ganzzahligen Werthe von x die Ordinate $y = x$ sein, so wird dieses erreicht, wenn y die Summe von x und solchen Ausdrücken ist, welche bei ganzzahligem x zu Null werden, wie z. B. $\sin n\pi x$ bei irgend ganzzahligem n. Man kann also jedes Reihenglied ansetzen als $y = x + P \cdot \sin \pi x + Q \cdot \sin 2\pi x + R \cdot \sin 3\pi x + \cdots$, wo $P, Q, R \cdots$ beliebige Functionen von x bedeuten. Euler geht dann zu Betrachtungen über, welche zu tief in die Lehre von den Differentialgleichungen eingreifen, als dass sie hier besprochen werden könnten. Wir werden im 118. Kapitel in Kürze darauf zurückkommen.

Euler's zweiter Aufsatz in dem betreffenden Bande, *Consideratio quarumdam serierum quae singularibus proprietatibus sunt praeditae*[1], geht von einer besonderen Reihe aus, nämlich von

$$\frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6} + \cdots + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)\cdots(a^{n-1}-x)}{a^{\frac{1}{2}n(n-1)} - a^{\frac{1}{2}n(n+1)}} + \cdots,$$

deren Summe $= n$ ist, wenn $x = a^n$, wie durch Induction sich ergiebt, wenn nach einander $x = a^0 = 1$, $x = a^1$, $x = a^2$, $x = a^3$ u. s. w. eingesetzt wird. Aber diese Summenbestimmung hört auf richtig zu sein, wenn x einer Potenz von a mit nicht ganzzahlig positivem Exponenten gleich gesetzt wird, anders ausgesprochen: s als Summe der genannten Reihe ist nicht immer der Logarithmus von x für die Basis a, sondern nur dann, wenn x eine Potenz von a mit ganzem positivem Exponenten ist. Euler schreitet dann weiter zu Umwandlungen der Reihe fort, aus welchen vielfältige Folgerungen gezogen werden, deren wir nicht näher gedenken, weil sie nicht das Wesen der Reihen überhaupt betreffen.

Anders steht es mit zwei Aufsätzen Euler's im V. Bande der neuen Abhandlungen der Petersburger Akademie. Der Aufsatz *Subsidium calculi sinuum*[2]) bildet eine Ergänzung zum 8. Kapitel des I. Bandes der Introductio (S. 684). Dort war der Cosinus beziehungsweise der Sinus eines vielfachen Bogens durch Potenzen der Functionen des einfachen Bogens dargestellt, jetzt wurden Formeln abgeleitet, welche Potenzen der trigonometrischen Functionen einfacher Bögen auf Functionen vielfacher Bögen zurückführen. Die Grundlage bildet

[1] *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, 86—108. [2]) Ebenda 1754 *et* 1755. T. V, 164—204.

die mittels fortgesetzter Multiplication bewiesene und demgemäss n als ganze positive Zahl voraussetzende Formel $(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi\sqrt{-1}$. Wird abkürzend $\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1} = u$, $\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1} = v$ gesetzt, so ist $\cos\varphi = \frac{u+v}{2}$ und $2^n \cdot \cos\varphi^n = (u+v)^n = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-2}v^2 + \cdots$. Offenbar kann man auch $2^n \cdot \cos\varphi^n = (v+u)^n = v^n + nv^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}v^{n-2}u^2 + \cdots$ schreiben und beide Gleichungen addiren. Man erhält $2^{n+1}\cos\varphi^n = (u^n + v^n) + n(u^{n-2} + v^{n-2})uv + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(u^{n-4} + v^{n-4})u^2v^2 + \cdots$. Leicht ersichtlich ist $uv = u^2v^2 = \cdots = 1$, sowie $u^n + v^n = 2\cos n\varphi$ u. s. w. Man gewinnt dadurch $2^n \cdot \cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n\varphi - 2\varphi) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n\varphi - 4\varphi) + \cdots$. Die Reihe bricht ab, sobald der Binomialcoefficient, der in jedem Gliede auftritt, den Werth 0 annimmt. Tritt vorher ein $\cos(n\varphi - m\varphi)$ mit $m > n$ auf, so ist zu erwägen, dass $\cos(n\varphi - m\varphi) = \cos(m\varphi - n\varphi)$. Nachdem die Untersuchung so weit mit genügender Strenge geführt war, setzt Euler plötzlich und ohne die geringste Rechtfertigung seines Verfahrens n als negative ganze Zahl, so dass die entstehende Reihe nicht von selbst abbricht, sondern ins Unendliche fortläuft. Mit verblüffender Sorglosigkeit schreibt er $\frac{1}{2\cos\varphi} = \cos\varphi - \cos 3\varphi + \cos 4\varphi - \cos 5\varphi + \cdots$, $\frac{1}{4\cos\varphi^2} = \cos 2\varphi - 2\cos 4\varphi + 3\cos 6\varphi - 4\cos 8\varphi + \cdots$, $\frac{1}{8\cos\varphi^3} = \cos 3\varphi - 3\cos 5\varphi + 6\cos 7\varphi - 10\cos 9\varphi + \cdots$ u. s. w. In beiden Entwicklungsgruppen, bei positivem wie bei negativem n, geht Euler vom Cosinus zum Sinus über, indem er $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ schreibt. Dadurch wird $\cos\varphi = \sin\psi$, $\cos 2\varphi = -\cos 2\psi$, $\cos 3\varphi = -\sin 3\psi$, $\cos 4\varphi = \cos 4\psi$ u. s. w. Zunächst treten Gleichungen für $2^{n-1}\sin\psi^n$ auf, in welchen wegen positiv ganzzahligem n rechts vom Gleichheitszeichen die Reihe abbricht und vorher bei ungradem n nur Sinus, bei gradem n nur Cosinus enthält, z. B. $\sin\psi = \sin\psi$, $4\sin\psi^3 = -\sin 3\psi + 3\sin\psi$, $2\sin\psi^2 = -\cos 2\psi + 1$, $8\sin\psi^4 = \cos 4\psi - 4\cos 2\psi + 3$ u. s. w. Neben diesen gesicherten Ergebnissen steht in grösster Unbefangenheit $\frac{1}{2\sin\psi} = \sin\psi + \sin 3\psi + \sin 5\psi + \sin 7\psi + \cdots$, $\frac{1}{4\sin\psi^2} = -\cos 2\psi - 2\cos 4\psi - 3\cos 6\psi - 4\cos 8\psi - \cdots$ u. s. w. War bis dahin nur $\cos\varphi = \frac{u+v}{2}$ unmittelbar benutzt und der Uebergang zu Sinusformeln vom Cosinus aus gewonnen worden, so liefert auch $\sin\varphi =$

$\frac{u+r}{2(u-1)}$ Stoff zu weiteren Untersuchungen. Will man etwa $\sin\varphi^m \cdot \cos\varphi^n$ in Reihengestalt ansetzen, so genügt dazu die Erwägung, dass $\sin\varphi^m \cdot \cos\varphi^n = \frac{(u-r)^m (u+r)^n}{2^{m+n}(u-1)^{m+n}} = \frac{u^{m+n}}{2^{m+n}(u-1)^{m+n}}\left(1-\frac{r}{u}\right)^m\left(1+\frac{r}{u}\right)^n$. Zur Reihenentwicklung des Ausdruckes $S = \left(1-\frac{r}{u}\right)^m \cdot \left(1+\frac{r}{u}\right)^n$ benutzt Euler, nachdem er $\frac{r}{u} = z$ gesetzt hat, die logarithmische Differentiation. Er schreibt $\log S = m\log(1-z) + n\log(1+z)$, dann $\frac{dS}{S} = -\frac{m\,dz}{1-z} + \frac{n\,dz}{1+z} = \frac{(n-m)\,dz - (m+n)\,z\,dz}{1-z^2}$ und $(1-z^2)\frac{dS}{dz} - fS + gSz = 0$, wo die Abkürzungen $f = n-m$, $g = m+n$ bedeuten. Wird nach der Methode der unbestimmten Coefficienten $S = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots$ angenommen und in die gewonnene Differentialgleichung eingesetzt, so entsteht $(A-f) + (2B - fA + g)z + (3C - A - fB + gA)z^2 + (4D - 2B - fC + gB)z^3 + \cdots = 0$, woraus die einzelnen Coefficienten der Reihe für S folgen, welche die Gleichungen erfüllen müssen $A = f$, $2B = fA - g$, $3C = fB - (g-1)A$, $4D = fC - (g-2)B$ u. s. w. Bei der Wahl der Exponenten m und n lässt Euler sich wieder den weitesten Spielraum. Er setzt unter anderen $n = -m$, so dass eine Reihendarstellung von $\frac{\sin\varphi^m}{\cos\varphi^m} = \operatorname{tng}\varphi^m$ in Frage kommt. Am Schlusse des Aufsatzes wird von der Differentiation sowie von der Integration unendlicher trigonometrischer Reihen ganz beliebige Anwendung gemacht. Euler hatte gefunden $\cos\varphi + a\cos 2\varphi + a^2\cos 3\varphi + \cdots = \frac{\cos\varphi - a}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi}$, $\sin\varphi + a\sin 2\varphi + a^2\sin 3\varphi + \cdots = \frac{\sin\varphi}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi}$. Einsetzung von $a = 1$, dann von $a = -1$ liefert ihm $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cdots = -\frac{1}{2}$, $\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cdots = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \cdots = \frac{1}{2\operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}}$, $\sin\varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi - \cdots = \frac{1}{2}\operatorname{tng}\frac{\varphi}{2}$. Differentiation der zweiten Reihe führt zu $\sin\varphi - 2\sin 2\varphi + 3\sin 3\varphi - \cdots = 0$, wiederholte Differentiation zu $\cos\varphi - 4\cos 2\varphi + 9\cos 3\varphi - \cdots = 0$. Dagegen führt die Reihe $\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cdots = \frac{1}{2}$ durch Integration zu

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots = \frac{\varphi}{2},$$

einem Ergebnisse, welches unter die vielen falschen Angaben, man möchte fast sagen, sich verirrt hat. Die an dieser Stelle zuerst auftretende Reihenentwicklung von $\frac{\varphi}{2}$ wurde in späterer Zeit vielfach

bestätigt. Wiederholte Integration führt alsdann zu $\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos 2\varphi + \frac{1}{9}\cos 3\varphi - \cdots = \alpha - \frac{\varphi^2}{4}\cdot$ Die Constante α wird gefunden, indem $\varphi = 0$ eingesetzt wird. Alsdann entsteht $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots = \alpha$ und da die Summe $\frac{\pi^2}{12}$ der mit wechselndem Vorzeichen versehenen reciproken Quatratzahlen bekannt ist, $\alpha = \frac{\pi^2}{12}\cdot$

Euler war (S. 667—669) seit 1743 von Niclaus I Bernoulli wegen seines Gebrauches divergenter Reihen zur Rede gestellt worden, und niemals hat er mehr Missachtung der ihm gemachten Vorstellungen an den Tag gelegt als in dem Aufsatze, über welchen wir soeben berichtet haben. Vielleicht war dieser Umstand die Veranlassung, dass Euler in unmittelbarem Anschlusse an den betreffenden Aufsatz die allgemein wichtige Streitfrage öffentlich zu behandeln beschloss, und so entstand vermuthlich die Abhandlung *De seriebus divergentibus*[1]). Im ersten Paragraphen erklärt Euler convergente Reihen als solche, deren Glieder fortwährend abnehmen und schliesslich verschwinden; Reihen, deren Glieder nicht schliesslich verschwinden, sondern entweder von endlicher Grösse bleiben oder ins Unendliche wachsen, müssen, weil sie nicht convergiren, zu den divergenten Reihen gerechnet werden. Unter ihnen sind wieder zwei Abarten zu unterscheiden, je nachdem alle Glieder gleichen Vorzeichens sind oder von Glied zu Glied abwechselnd bald positiv bald negativ auftreten. Bei divergenten Reihen mit durchweg positiven Gliedern kann nach Euler's im zweiten Paragraphen vorgetragener Meinung ein Zweifel nicht bestehen. Ihre Summe wird immer durch einen Ausdruck $\frac{a}{0}$ dargestellt werden. Um so bestrittener ist der Summenwerth divergenter Reihen mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern. Euler berichtet hier mit grosser Unparteilichkeit über die Gründe und Gegengründe, welche geltend gemacht wurden, seit Leibniz gewagt hatte $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$ zu setzen. Die Gegner dieser Meinung stützen sich wesentlich darauf, dass $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - \cdots \pm a^n \mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ und dass $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$ sei, und dass die Mantisse (Euler versteht darunter das, was man heute Restglied nennt) nur dann weggelassen werden dürfe, wenn a einen

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1754 *et* 1755. T. V, 205—237.

echtgebrochenen Werth besitze. Nur in diesem Falle dürfe also die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen als eine unendliche in Rechnung gezogen werden. Dagegen sei $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$ und $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$, wovon das erste Ergebniss aus der Reihe für $\frac{1}{1+a}$ durch $a = 1$, das zweite aus der Reihe für $\frac{1}{1-a}$ durch $a = 2$ hervorgehe, gleich unstatthaft. Die Anhänger der divergenten Reihen behaupten ihrerseits theils mit Leibniz (S. 352), die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ an und für sich ins Auge gefasst habe bei grader Gliederzahl die Summe 0, bei ungrader Gliederzahl die Summe 1, im Unendlichen gebe es weder Grades noch Ungrades, folglich müsse dort der mittlere Werth zwischen 0 und 1 oder $\frac{1}{2}$ auftreten, theils berufen sie sich zur Erklärung der Möglichkeit von $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ darauf, dass zum Negativen der Durchgang durch das Unendlichgrosse nicht minder führe, als der Durchgang durch 0. Sie schliessen sich also an Wallis (Bd. II, S. 825) an. Brüche, sagen sie, wachsen mit Abnahme des Nenners; wenn aber $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0}$, so müsse dieses Gesetz auch Geltung haben, wenn der Nenner unter 0 herabsinke, so müsse $\frac{1}{0} < \frac{1}{-1}$ d. h. $\infty < -1$ sein. Jetzt lässt Euler wieder die Gegner der divergenten Reihen zum Worte kommen. Es gebe überhaupt keine Summe derselben. Wenn man $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ setze, so sei es zulässig von einer Summe 2 zu reden, denn je mehr Glieder der Reihe man durch gewöhnliche Addition vereinige, um so näher komme man an die 2 heran, bei divergenten Reihen dagegen sei, je mehr Glieder man durch Addition vereinige, um so weniger eine Annäherung an einen bestimmten Werth vorhanden, im Gegentheil unterscheide sich jede Summe beliebig vieler Glieder um so mehr von der nächsten, eine je grössere Gliederzahl man in ihr zusammenfasse. Merkwürdig findet Euler[1]), dass trotz dieses Gegensatzes der Meinungen niemals ein durch Anwendung divergenter Reihen hervorgebrachter eigentlicher Fehlschluss habe nachgewiesen werden können! Wo immer man z. B. die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ durch $\frac{1}{2}$ ersetzt habe, sei Fehlerloses hervorgetreten. Es gewinne daher den Anschein, als ob es sich nur um einen Wortstreit handle, und in Wirklichkeit verhalte sich die Sache so. Wenn man in der Analysis zu einem

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1754 *et* 1755. T. V, 211, § 10.

gebrochenen oder zu einem transcendenten Ausdrucke gelange, so pflege man ihn in eine geeignete Reihe zu verwandeln, mittels deren die weiteren Rechnungen leichter ausgeführt werden können: unendliche Reihen finden dem entsprechend in der Analysis nur in so weit eine Stelle, als sie aus der Entwicklung irgend eines geschlossenen Ausdrucks hervorgegangen sind, und deshalb kann auch rückwärts an Stelle der unendlichen Reihe allemal die Formel gesetzt werden, aus deren Entwicklung sie entstand. Der Fruchtbarkeit der Regeln zur Verwandlung geschlossener Ausdrücke in unendliche Reihen steht der grosse Nutzen solcher Regeln gegenüber, mit deren Hilfe man dem geschlossenen Ausdruck auf die Spur kommt, aus welchem eine vorgelegte Reihe zu entstehen vermag, und da dieser Ausdruck immer ohne Fehler an Stelle der unendlichen Reihe gesetzt werden kann, so muss der Werth beider derselbe sein. Es giebt also keine unendliche Reihe von der Art, dass nicht ein gleichartiger geschlossener Ausdruck gedacht werden könnte[1]. Alle Schwierigkeiten verschwinden folglich, wenn man den hergebrachten Begriff einer Summe dahin abändert, dass man sagt: Summe einer jeden Reihe sei der geschlossene Ausdruck, aus welchem sie durch Entwicklung hervorgebracht werden kann. Nach diesen einleitenden Bemerkungen glaubt Euler berechtigt zu sein, mit divergenten Reihen ganz beliebig umzuspringen und irgend welche Kunstgriffe anzuwenden, welche zu einer zweckmässig erscheinenden Umformung verhelfen. Ist z. B. $s = a - b + c - d + e - f + \cdots$ eine umzuwandelnde Reihe, so kann man die aufeinanderfolgenden Differenzenreihen bilden, deren jede entsteht, indem man, absehend von den den Reihengliedern vorstehenden alternirenden Vorzeichen, mit welchen verbunden sie s bilden, jedes vorhergehende Reihenglied von dem nachfolgenden abzieht. Die erste Differenzenreihe besteht also aus $b - a$, $c - b$, $d - c$, $e - d$, $f - e \cdots$. Die zweite besteht aus $c - 2b + a$, $d - 2c + b$, $e - 2d + c$, $f - 2e + d \cdots$. Die dritte lautet $d - 3c + 3b - a$, $e - 3d + 3c - b$, $f - 3e + 3d - c \cdots$ u. s. w. Heissen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots$ die Anfangsglieder der aufeinander folgenden Differenzenreihen, d. h. ist $\alpha = b - a$, $\beta = c - 2b + a$, $\gamma = d - 3c + 3b - a$, $\delta = e - 4d + 6c - 4b + a$ u. s. w., so ist: $\frac{a}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} - \frac{\gamma}{16} + \frac{\delta}{32} = \frac{31}{32}a - \frac{13}{16}b + \frac{1}{2}c - \frac{3}{16}d + \frac{1}{32}e$. Bleibt man aber

---

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1754 *et* 1755. T. V, 212: *et cum haec expressio semper sine errore loco seriei infinitae substitui possit, necesse est, ut utriusque idem sit valor; ex quo efficitur, nullam dari seriem infinitam, quin simul expressio finita illi aequivalens concipi queat.*

nicht bei δ stehen, sondern führt die neue Reihe nach dem in den angeschriebenen Gliedern auftretenden Gesetze endlos weiter, so erhält man einen mehr und mehr mit s zusammenfallenden Werth, d. h. man erhält:

$$s = \frac{a}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} - \frac{\gamma}{16} + \frac{\delta}{32} - \cdots$$

und diese Reihe convergirt ausserordentlich viel rascher als die ursprüngliche. Auch eine Umwandlung einer Reihe in einen Kettenbruch wird gelehrt, bei deren Erörterung wir uns die den Grundgedanken zur Erscheinung bringende Aenderung gestatten, dass wir die Coefficienten durch mit Stellenzeigern versehene Buchstaben bezeichnen, während Euler seine Rechnung mit bestimmten Zahlencoefficienten führt. Sei also in dieser Beziehung über Euler hinausgehend $A = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \cdots$. Setzt man $A = \frac{1}{1+B}$, so wird $B = \frac{1}{A} - 1 = \frac{-(A-1)}{A} = \frac{a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - \cdots}{1 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \cdots} = \frac{a_1 x}{1+C}$, beziehungsweise $\frac{1}{1+C} = \frac{1 - \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_3}{a_1} x^2 - \cdots}{1 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots}$ und $C = \frac{(1 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots) - \left(1 - \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_3}{a_1} x^2 - \cdots\right)}{1 - \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_3}{a_1} x^2 - \cdots} = \frac{\frac{a_2 - a_1^2}{a_1} x - \frac{a_3 - a_1 a_2}{a_1} x^2 + \cdots}{1 - \frac{a_2}{a_1} x + \frac{a_3}{a_1} x^2 \cdots}$.

Nun kann man durch weitere Anwendung des gleichen Gedankens $C = \frac{\frac{a_2 - a_1^2}{a_1} x}{1+D}$ setzen und so fort. Man erhält $A = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_1 x}{1 + \cfrac{\frac{a_2 - a_1^2}{a_1} x^2}{1 + \cdots}}}$.

Beide Umwandlungsverfahren und Abarten derselben werden an bestimmten divergenten Reihen in Anwendung gebracht.

Etwa gleichzeitig mit der Einreichung von Euler's Abhandlung über divergente Reihen bei der Petersburger Akademie erschien 1754 in Paris der I. Band eines dreibändigen Werkes von D'Alembert: *Recherches sur differens points importans du système du monde.* Schon der Titel zeigt, dass wir nicht eingehender davon zu reden haben, nur eine einzige Stelle[1]) fordert unser Verweilen. D'Alembert gab nämlich dort seine später so berühmt gewordene Herleitung der Taylor'schen Reihe mittels partieller Integration. Taylor selbst wird dabei nicht genannt. Sei $\varphi(z)$ eine Function von z, so

[1]) D'Alembert, *Recherches sur differens points importans du système du monde* I, 50.

beginnt D'Alembert unter Benutzung eines Functionalzeichens, welches, wie wir im 118. Kapitel sehen werden, etwa 20 Jahre früher gleichzeitig von Euler und von Clairaut erfunden worden war. Die aufeinander folgenden Differentialquotienten von $\varphi(z)$ nach z nennt D'Alembert alsdann $\Delta(z)$, $\Gamma(z)$, $\Psi(z)$ mit systemloser und dadurch wenig durchsichtiger Auswahl der Functionalbuchstaben, wie denn überhaupt Klarheit der Darstellung niemals eine hervorstechende Eigenschaft D'Alembert's gewesen ist. Man wird uns gestatten, zur leichteren Uebersicht uns der späteren Bestrichelung der Differentialquotienten bedienen zu dürfen, also $\Delta(z) = \varphi'(z)$, $\Gamma(z) = \varphi''(z)$, $\Psi(z) = \varphi'''(z)$ zu setzen. D'Alembert nimmt weiter ζ als eine sehr kleine Grösse an, eine Annahme, deren Nutzen er zwar in keiner Weise begründet, welche ihm jedoch vielleicht die Berechtigung gewähren sollte, sich einer nach steigenden Potenzen von ζ fortschreitenden unendlichen Reihe zu bedienen. Nun setzt D'Alembert $\varphi(z+\zeta) = \varphi(z) + u$ und differentirt diese Gleichung nach ζ, während z constant bleibt, was gestattet sei[1]. Er erhält $\varphi'(z+\zeta)\,d\zeta = du$ und $u = \int \varphi'(z+\zeta)\,d\zeta$, mithin $\varphi(z+\zeta) = \varphi(z) + \int \varphi'(z+\zeta)\,d\zeta$. Weiter sei, fährt er fort, $\varphi'(z+\zeta) = \varphi'(z) + \int \varphi''(z+\zeta)\,d\zeta$, ferner $\varphi''(z+\zeta) = \varphi''(z) + \int \varphi'''(z+\zeta)\,d\zeta$ u. s. w. Durch allmälige Einsetzung dieser Werthe entstehe: $\varphi(z+\zeta) = \varphi(z) + \int \varphi'(z)\,d\zeta + \int d\zeta \int \varphi''(z)\,d\zeta + \int d\zeta \int d\zeta \int \varphi'''(z)\,d\zeta + \cdots = \varphi(z) + \zeta\varphi'(z) + \frac{\zeta^2\varphi''(z)}{2} + \frac{\zeta^3\varphi'''(z)}{2\cdot 3} + \cdots$. Eine Integrationsconstante fügt D'Alembert nirgend hinzu, sagt aber auch nicht, dass er von 0 bis ζ integrire, und dass deshalb jene Constante $= 0$ sei.

Die nächsten Untersuchungen Euler's über Reihen sind in seiner Differentialrechnung von 1755 enthalten. Wollen wir diesem hochbedeutenden Werke, ähnlich wie wir es mit dem I. Bande der Introductio hielten, einen ausführlichen Bericht widmen, so dürfte es gerathen sein, uns zuvor umzuschauen, was inzwischen im Laufe der Jahre aus der Differentialrechnung überhaupt geworden war, und zwar ist es wesentlich England, wohin wir unsere Blicke zu richten haben.

Mochte auch die Verfehmung Leibnizens und seiner Schule, eine Frucht des Prioritätsstreites, über Newton's Tod hinaus manchen Engländer vom Studium und noch mehr von der Würdigung festländischer Werke zurückhalten, so ganz absperren konnte auch die englische Mathematik sich nicht, und Edmund Stone[2]), jener Gärtnersohn, der 1725 zum Mitgliede der Royal Society gewählt,

[1]) *ce qui nous est permis.* [2]) Poggendorff II, 1018.

1742 oder 1743 aus ihren Listen wieder gestrichen wurde, gab 1730 *A method of fluxions* heraus, deren erster Theil nichts anderes war, als eine Uebersetzung von L'Hospital's *Analyse des infiniment petits.*

Auch in anderer Weise äusserte sich eine Art von Gegenwirkung gegen die unbedingte Verhimmelung Newton's und aller seiner Leistungen auf mathematischem Gebiete. George Berkeley[1]) (1685—1753), aus einer hohen englischen Beamtenfamilie in Irland geboren, erhielt seine Ausbildung im Trinity College in Dublin, dem er zuerst als Schüler, dann als Unterlehrer (*fellow*) bis 1713 angehörte. Dort liess er schon 1707 eine *Arithmetica absque Algebra aut Euclide demonstrata* gefolgt von *Miscellanea mathematica* erscheinen, eine herzlich unbedeutende Schrift, welche wir im vorigen Abschnitte mit Fug und Recht übergehen durften. In Dublin gab er auch 1709 den *Essay towards a new Theory of Vision*[2]) heraus, welcher mehr die Physiologie als die Physik des Sehens zum Gegenstande hat, in Dublin ferner 1710 die *Principles of Human Knowledge* und von Dublin aus wenigstens 1713 die *Dialogues between Hylas and Philonous.* Die beiden letztgenannten Schriften, besonders die über die Grundlagen der menschlichen Erkenntniss, enthalten Berkeley's philosophisches Glaubensbekenntniss, ein vollendetes Leugnen der Materie. Sie ist nicht vorhanden. Es giebt keine an und für sich ausserhalb des Geistes bestehende Körperwelt. Nur dem Menschen und Gebilden innerhalb seines Geistes kommt wirkliches Dasein zu. Im Jahre 1713 beginnen Berkeley's Wanderjahre, welche ihn sieben Jahre in verschiedenen Eigenschaften in Frankreich und Italien umherführten. Von 1721 bis 1728 war er wieder in England, dann bis 1731 in Amerika, wohin seine neu angetraute Gemahlin ihn begleitete. Schriftstellerische Thätigkeit füllte nach Berkeley's abermaliger Rückkehr nach England drei Jahre aus, 1734 wurde ihm der Bischofssitz zu Cloyne in Irland übertragen. Dort verweilte er bis 1752. Er zog sich alsdann nach Oxford zurück, wo er nach einigen Monaten starb. Seine letzten Schriften waren medicinischen Inhaltes zum Lobe des Theerwassers, welchem er die grösste Heilkraft nachrühmte. Dem Jahre 1734 gehört Berkeley's Schrift *The Analyst* an, deren Veröffentlichung mit seiner Uebersiedelung nach Cloyne nahezu zu-

[1]) *George Berkeley's Works.* 3 Bände. London 1820. — Berkeley, Die Principien der menschlichen Erkenntniss, übersetzt und mit einer Einleitung über Berkeley's Leben und Schriften versehen von F. Ueberweg. Berlin 1869 [12. Band von Kirchmann's Philosophischer Bibliothek]. — Friedrich Clausen, Kritische Darstellung der Lehren Berkeley's über Mathematik und Naturwissenschaften. Halle 1889. [2]) Im Jahre 1733 folgte *Theory of vision vindicated and explained.*

sammenfällt, und um derenwillen namentlich wir Berkeley hier zu erwähnen haben.

Schon in den Grundlagen der menschlichen Erkenntniss von 1710 hatte Berkeley im 118. bis 130. Paragraphen von der Mathematik gesprochen, insbesondere von den die Infinitesimalbetrachtungen einschliessenden Kapiteln derselben. Als ein Widerspruch erscheint ihm[1] die Annahme einer aus unendlich vielen Theilen bestehenden endlichen Ausdehnung, und die Lösung des Widerspruchs verlangt er von dem Bewusstwerden[2], dass die einzelnen Linien in den zur Unterstützung geometrischer Untersuchungen gezeichneten Figuren nur so betrachtet werden dürfen, dass man ihre Grösse ausser Acht lässt. Es giebt nichts derartiges, sagt er, wie der zehntausendste Theil eines Zolles, wohl aber einer Meile oder des Erddurchmessers, welche durch jenen Zoll dargestellt werden können. Wenn ich also ein Dreieck auf Papier zeichne und eine Seite, die z. B. nicht über einen Zoll lang ist, als Radius eines Kreises wähle, so kann ich diesen als in 10 000 oder in 100 000 oder mehr Theile getheilt mir vorstellen. Die Linie sei dann, meint er, ein blosses Zeichen für grössere Ausdehnungen, bei welchen so viele oder mehr Theile thatsächlich genommen werden können. In der jüngsten Zeit, fuhr Berkeley in dem Buche von 1710 fort[3], sind die Speculationen über unendliche Grössen so weit getrieben worden und haben so seltsame Vorstellungen erzeugt, dass dadurch nicht geringe Zweifel und Widerstreit der Meinungen unter den Geometern der Gegenwart veranlasst worden sind. Berkeley bezieht sich dabei darauf, dass man sich nicht damit begnügt habe, endliche Längen in eine unendliche Zahl von Theilen zu zerlegen, sondern dass man jeden dieser unendlich kleinen Theile selbst wieder in eine unendliche Zahl unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung zerlegbar sein lasse und so fort selbst ins Unendliche.

Diesem frühen Geplänkel folgte 1734 ein ernster Angriff. Ein Freund Berkeley's hatte auf dem Krankenbette geistlichen Zuspruch abgelehnt, weil Halley, der so gewandte Handhaber von Beweisen, ihn der Unbegreifbarkeit der Lehren des Christenthums versichert habe. Das erfuhr Berkeley, und nun schrieb er seinen *Analyst* oder Rede an einen ungläubigen Mathematiker — gemeint war Halley — in welcher geprüft wird, ob Gegenstand, Grundlage und Folgerungen der modernen Analysis deutlicher zu erfassen oder augenscheinlicher herzuleiten sind, als religiöse Geheimnisse und Glaubenssätze.

---

[1] Berkeley. *Principles of Human Knowledge* § 124. [2] Ebenda § 126 bis 127. [3] Ebenda § 130.

Er beginnt mit der Anrede: Persönlich sind Sie mir fremd, aber nicht fremd ist mir der Name, den Sie in dem Wissenszweige, welcher Ihr besonderes Studium bildet, erworben haben, und ebensowenig die Machtfülle, welche Sie in Ihrem Berufe ganz fremden Dingen beanspruchen, noch auch der Missbrauch, welchen Sie und nur zu viele Ihresgleichen bekanntermassen mit einer ihnen nicht zukommenden Machtfülle treiben, um unachtsame Persönlichkeiten bei Fragen von höchster Bedeutung irre zu leiten, bei denen Ihr mathematisches Wissen keineswegs ausreicht, Ihnen die Eigenschaft eines berufenen Richters zu gewähren.

Mit ähnlich scharfen Worten fährt Berkeley fort, schickt er im § 2 sich an, Zweifel zu erheben, ob denn der Mathematiker als solcher über ganz besonders scharfe Denkweise verfüge, welche ihn befähige ein Richteramt auszuüben, und prüft er von § 3 an die Grundlagen der Fluxionsmethode als des Schlüssels, mittels dessen die modernen Mathematiker die Geheimnisse der Geometrie und in deren Gefolge die der Natur erschliessen. Ein Haupteinwurf geht gegen die Fluxionen, beziehungsweise die Differentiale höherer Ordnung. Wenn Newton die Fluxion als die Geschwindigkeit bezeichne, mittels deren Grössen erzeugt werden, so möge das gestattet sein; aber was sei denn die zweite, die dritte Fluxion und so fort ins Unendliche? Was bedeute Geschwindigkeit einer Geschwindigkeit u. s. w.? An anderen Stellen erkläre Newton die erste Fluxion als Zuwachs *in statu nascendi*. Dadurch sei der Schwierigkeit, einen Begriff mit den höheren Fluxionen zu verbinden, ebensowenig abgeholfen. Leibniz und die Mathematiker des europäischen Festlandes, welche, sich deutlicher ausdrückend, geradezu die unendlich kleinen Theile einer Grösse als deren Differentiale erklären[1]), lassen ziemlich gleichlautende Gegenbemerkungen unbeantwortet. Ungemein wichtig sei es, die Fluxion eines Rechtecks zu finden, und Newton mache das im 2. Lemma des II. Buches der Principien folgendermassen[2]). Er sage, A möge die eine, B die andere Rechtecksseite, a und b deren momentane Zuwächse sein. Ein dem Rechteck AB in der Entstehung vorhergehendes Rechteck sei $\left(A-\frac{a}{2}\right)\left(B-\frac{b}{2}\right)=AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. Ein auf AB folgendes Rechteck sei $\left(A+\frac{a}{2}\right)\left(B+\frac{b}{2}\right)=AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA$

[1]) Wir dürfen hier aufmerksam machen, dass Berkeley über die Entstehung der Differentialrechnung als Engländer denkt. Im § 18 des *Analyst* stellt er Fluxionstheorie und Calculus differentialis einander gegenüber, *which method is supposed to have been borrowed from the former with some alterations.*
[2]) Berkeley, *The Analyst* § 9.

$+ \frac{1}{4} ab$. Ziehe man das vorhergehende Rechteck von dem nachfolgenden ab, so bleibe $aB + bA$ als Fluxion des Rechteckes. Aber Newton gestatte sich da ein unerlaubtes Kunststück. Man müsse A und B um ihre ganzen Zuwächse, nicht um halbe sich ändern lassen, und dann erscheine $(A + a)(B + b) - AB = aB + bA + ab$. Nachmals habe Newton die Fluxion von x^n durch ein anderes Kunststück hergeleitet[1]. Er habe $(x+o)^n - x^n = nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2 + \cdots$ zu $(x + o) - x = o$ in Verhältniss gesetzt und $nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o + \cdots$ gefunden, welches bei $o = 0$ in nx^{n-1} übergehe. Das sei wieder unerlaubt. Wenn x beim Fliessen den Zuwachs o erhalte, so müsse dieser Zuwachs als solcher bestehen bleiben und dürfe nicht nachher $= 0$ gesetzt, d. h. als gar nicht vorhanden betrachtet werden.

Allerdings verwahrt sich Berkeley dagegen, selbst missverstanden zu werden. Er beabsichtige keineswegs die mathematischen Thatsachen anzuzweifeln, welche die Anhänger der neuen Methoden beweisen. Er untersuche nur die Rechtmässigkeit ihrer Darlegungen, deren Klarheit oder Dunkelheit, ob sie den Werth der Wissenschaftlichkeit oder nur den eines Umhertastens besitzen, und er wolle dabei zeigen, wie Irrthum Wahrheit, wenn auch nicht Wissenschaft hervorzubringen vermöge[2]. Sei[3] z. B. (Fig. 110) ABN eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ und TBL deren Berührungslinie im Punkte B. Sei ferner $AP = x$, $PM = dx$, $PB = y$, $RN = dy$. In der Infinitesimalrechnung nimmt man an, das Differentialdreieck BRN sei dem Dreiecke TPB ähnlich, weil die Curve als Unendlichvieleck mit geradlinigen Seiten gedacht wird, deren eine BN mit der Berührungslinie zusammenfalle. Aus jener Dreiecksähnlichkeit folgt $RN : RB = PB : PT$, also $PT = \frac{y \cdot dx}{dy}$. Das ist aber falsch, denn

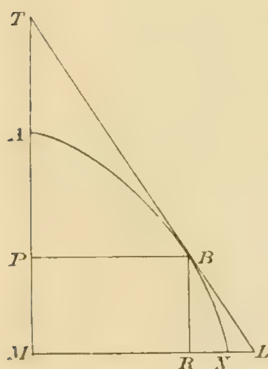


Fig. 110.

nicht das Dreieck BRN, sondern BRL ist dem TPB ähnlich, und ist $NL = z$, so müsste es richtig heissen $PT = \frac{y \cdot dx}{dy + z}$, und der vorige Nenner war zu klein. Die Differentialrechnung folgert ferner

[1] Berkeley, *The Analyst* § 13—14. [2] Ebenda § 20. [3] Ebenda § 21—22.

aus $y^2 = px$, dass $dy = \frac{p\,dx}{2y}$. Das ist abermals falsch, denn $(y + dy)^2 - y^2 = px + p\,dx - px$ liefert $2y\,dy + dy^2 = p\,dx$ und $dy = \frac{p\,dx}{2y} - \frac{dy^2}{2y}$. Setzt man also in $PT = \frac{y\,dx}{dy}$ für den Nenner den Werth $\frac{p\,dx}{2y}$, so wird derselbe zu gross. Man hat zwei Fehler begangen, hat einen Nenner erst zu klein, dann zu gross gewählt, und die beiden Fehler heben einander auf, so dass ein richtiges Ergebniss $PT = \frac{2y^2}{p} = 2x$ herauskommt. Dass in der That die Fehler einander aufheben können, dass $z = \frac{dy^2}{2y}$, beweist Berkeley wie folgt. Gemäss der Eigenschaften der Parabel ist $y^2 = px$, $PT = 2x$, und oben war $PT = \frac{y\,dx}{dy + z}$. Demnach ist $2x = \frac{y\,dx}{dy + z}$, $dy + z = \frac{y\,dx}{2x} = \frac{yp\,dx}{2px} = \frac{yp\,dx}{2y^2} = \frac{p\,dx}{2y}$, also $p\,dx = 2y\,dy + 2yz$. Die Parabelgleichung liefert ferner, wie oben gezeigt, $2y\,dy + dy^2 = p\,dx$ und die Vergleichung der beiden Werthe von $p\,dx$ lässt erkennen, dass $2yz = dy^2$ oder $z = \frac{dy^2}{2y}$. Nun wirft sich Berkeley selbst Folgendes ein[1]. Sei (Fig. 111) die Curve ARS gegeben, deren Gleichung $y = x^2$. Sei MRS eine Secante der Curve, LR deren Berührungslinie in R, $MN = s$ die Subsecante, LN die Subtangente der Curve. Man setze $NR = y$, $AN = x$, $NO = v$, $PS = z$. Dreiecksähnlichkeit lässt erkennen, dass $\frac{z}{v} = \frac{y}{s}$, also $s = \frac{vy}{z}$. Wie $y = x^2$, ist auch $y + z = (x + v)^2$ und daher $z = 2xv + v^2$. Mithin ist $s = \frac{vx^2}{2xv + v^2} = \frac{x^2}{2x + v}$.

Fig. 111.

Bei unendlich kleinem v geht die Subsecante in die Subtangente mit dem ganz richtigen Werthe $\frac{x}{2}$ über, und hier scheint doch nur einmal ein Unendlichkleines weggelassen zu sein. Aber es scheint nur so! Eine Secante wird niemals Tangente, eine Subsecante niemals Subtangente. Der Irrthum des Weglassens von v wird durch den zweiten Irrthum, MN und LN als gleich anzusehen, aufgehoben.

---

[1] Berkeley, *The Analyst* § 24.

Berkeley zeigt dann noch an anderen Beispielen, wie die Annahme verschwindender Zuwächse stets an dem Mangel leide, dass jede Berechtigung fehle, eine Grösse o, aus deren Vorhandensein man eben erst Schlüsse gezogen hatte, plötzlich $= 0$ werden zu lassen. Zum Schlusse kommt er wiederholt auf die Schwierigkeiten zu reden, welche das Verständniss der Fluxionen höherer Ordnung bereite.

Kaum war *The Analyst* erschienen, so traten Kämpfer für die Fluxionsrechnung auf, zunächst zwei Professoren der Universität Cambridge, Conyers Middleton und Robert Smith, welche sich aber nicht nannten, sondern ihrer gemeinsam verfertigten Schrift den Titel beilegten: *Geometry no friend to infidelity by Philalethes Cantabrigiensis*, dann ein Dubliner Professor Walton, der Verfasser einer *Vindication of Sir Isaac Newton's Principles of Fluxions.*

Wir kennen keine der beiden Schriften aus eigenem Augenschein, wohl aber neue Entgegnungen Berkeley's, und wenn diese nur einigermassen ehrlich geschrieben sind, was bei dem Charakter ihres Verfassers keinem Zweifel unterliegen kann, so muss man gestehen, dass die Vertheidigung der Fluxionsrechnung nicht leicht von ungeschickteren Händen hätte geführt werden können. Scheint es doch, dass insbesondere der pseudonyme Philalethes, wie schon aus der gewählten Ueberschrift erhellt, es namentlich darauf abgesehen hatte, den Vorwurf des Unglaubens von den Mathematikern abzuwenden, der ihnen gar nicht im Allgemeinen gemacht war. Einzelne Mathematiker, das hatte Berkeley im Analyst behauptet, und das wiederholte er in der *Defence of freethinking in mathematics*, missbrauchten ihren Einfluss auf Freunde, um diese zu Zweiflern an Glaubenssätzen, die nicht streng beweisbar seien, zu machen. Dem gegenüber zeige er, dass die Sätze der modernen Infinitesimalrechnung noch weniger als jene Glaubenssätze beweisbar seien. Er denke nicht daran, ein Ketzergericht gegen Mathematiker heraufzubeschwören, er wolle nur zeigen, wie wenig grade diese berufen seien, strenge Beweisführung für das zu fordern, woran man glaube. Und nun kehren die im Analyst erhobenen Einwendungen wieder[1]), eine Fluxion sei etwas Unverständliches, eine zweite, dritte, vierte Fluxion sei noch unverständlicher, es sei nicht möglich, sich einen Begriff von einem einfach Unendlichkleinen zu machen, noch weniger von dem Unendlichkleinen eines Unendlichkleinen. Berkeley fordert[2]) für Leser ohne mathematische Vorbildung, aber mit gesundem Menschenverstand das Recht, darüber zu urtheilen, ob er sich eine Geschwindigkeit ohne Bewegung, eine Bewegung die keinen Raum durchmesse, ob er sich

---

[1]) Berkeley, *Defence of freethinking in mathematics* § 17. [2]) Ebenda § 20.

Grössen denken könne, die weder endlich noch unendlich seien, oder ein Ding ohne Grösse, welches noch theilbar sei, eine Figur ohne Raumausdehnung, ein Verhältniss von Nichts zu Nichts, ein wirkliches Produkt aus Nichts vervielfacht mit Etwas. Die letzterwähnten Worte zielen auf Newton's im Analyst bekämpfte Herleitung der Fluxion eines Rechtecks. Sind, sagt Berkeley etwas später[1], a und b wirkliche Grössen, dann ist ab ein Etwas und bringt einen wirklichen Unterschied hervor, sind beide Nichts, dann werden auch die Rechtecke zu Nichts, in welchen sie als Seiten auftreten, und das ganze *momentum* oder *incrementum* ist gar Nichts. Berkeley versäumt nicht, von dem Meinungswechsel in Newton's Schriften Gebrauch zu machen, den er allerdings nicht als solchen, sondern als Widerspruch gegen sich selbst vorführt:

Sagen Sie mir doch, scharfsichtiger Herr! ob Newton's *momentum* eine endliche Grösse ist, oder ein Unendlichkleines, oder nur eine Grenze? Sagen Sie eine endliche Grösse, so heben Sie gefälligst den Widerspruch gegen das Scholium des 2. Lemma des 1. Abschnittes des I. Buches der Principien auf: *Cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.* Sagen Sie ein Unendlichkleines, so heben Sie den Widerspruch gegen die Einleitung der Quadratura auf: *Volui ostendere quod in methodo fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in geometriam introducere.* Sagen Sie eine blosse Grenze, so versöhnen Sie das mit dem Ausspruche des 1. Falles des 2. Lemma des II. Buches der Principien: *Ubi de lateribus A et B durant momentorum dimidia*, wo eine Theilung der Momente vorgenommen ist[2]).

Wir sehen, wie Berkeley im Analyst das Erscheinen richtiger Sätze trotz Anwendung der Infinitesimalrechnung aus dem Vorkommen zweier entgegengesetzter Fehler erklärte. Seine Gegner nannten diese Erklärung alt und längst von Newton im 1. Abschnitte des I. Buches der Principien vorweggenommen. Das konnte Berkeley leicht bestreiten. Erstens, sagt er[3]), habe er mit diesem Bruchstücke seiner Kritik sich gar nicht gegen Newton, sondern gegen den Marquis de l'Hôpital gewandt, und zweitens sei es unwahr und ein Zeichen der unerreichbaren Wahrheitsmissachtung des Philalethes, dass Aehnliches bei Newton sich vorfinde. Philalethes wird öffentlich herausgefordert, die von ihm behauptete Thatsache zu beweisen; er werde dazu nicht im Stande sein.

Dem zweiten Gegner, Walton, widmete Berkeley zunächst nur

[1]) Berkeley, *Defence of freethinking in mathematics* § 32. [2]) Ebenda § 36. [3] Ebenda § 38—39.

einen kurzen Anhang zur *Defence of freethinking in mathematics.* Darauf scheint Walton unter dem Titel *Full answer* erwidert zu haben, und ihm neuerdings Berkeley mit einem Briefe: *Reason for not replying to Mr. Walton's full answer.* Das Hauptgewicht ist auf die Frage gelegt, ob Geschwindigkeit ohne Bewegung, Bewegung ohne Ausdehnung, Ausdehnung ohne Grösse gedacht werden könne. Walton sage Ja. Die Geschwindigkeit, welche einem Körper durch eine stetig wirkende Kraft beigelegt werde, sei nicht die gleiche in irgend zwei Punkten des durchlaufenen Weges, ändere sich vielmehr bei dem geringsten Platzwechsel. Berkeley spottet über diese Beweisführung, die nicht ernst gemeint sein könne[1]. Wie? Wenn in zwei Punkten nicht die gleiche Geschwindigkeit stattfinden kann, so soll daraus folgen, dass in einem Punkte eine Geschwindigkeit stattfindet? Ist das nicht ein Schluss von der gleichen Art, wie wenn man sagte: ein und derselbe Mann kann sich nicht in zwei Nussschalen befinden, also kann er sich in einer Nussschale befinden? Auf Berkeley's Bemängelung der Fluxion des Rechtecks AB hatte Walton geantwortet, in $Ab + Ba$ bedeuteten b und a keine ausgedehnten Grössen, sondern nur Geschwindigkeiten. Was ist, fragt Berkeley neuerdings[2], ein Product aus einer Linie in eine Geschwindigkeit? Der Zuwachs eines Rechtecks kann nur wieder ein Rechteck sein, ein Product zweier Linien, also müssen b und a Linien sein oder Zuwächse von Linien, was dasselbe ist. Gegen die Bemängelung der Fluxionen höherer Ordnung hatte Walton sich auf das Beispiel eines Würfels berufen, der sich vergrössert zeige, möge man nur eine oder zwei oder alle drei in einem Eckpunkte zusammentreffende Kanten als einer Vergrösserung unterworfen denken. Wo, entgegnet Berkeley[3], ist bei Newton die Rede davon, dass bei höheren Fluxionen ihm Würfel vorschweben? Jede Grösse, auch eine Länge, muss zweite, dritte, vierte Fluxionen der Auffassung zugänglich machen, und wie kann dieses geschehen?

Es lässt sich nicht leugnen, dass Berkeley's Angriffe, wenn auch nicht durchweg neu (S. 245), nicht durchweg vernichtend, immerhin den Grundlagen der noch immer verhältnissmässig neuen Methoden gefährlich waren, und das von Berkeley erfundene Hilfsmittel der sich gegenseitig aufhebenden Fehler wurde nachmals 1797 von Lazare Carnot zum Ausgangspunkte für eine Rechtfertigung der Infinitesimalrechnung genommen.

In England fühlte sich Maclaurin als der berufene Vertheidiger.

---

[1] Berkeley, *Reason for not replying to Mr. Walton's full answer* § 4. [2] Ebenda § 9. [3] Ebenda § 15.

Sein 1742 erschienenes Lehrbuch (S. 655) *A treatise of fluxions* wurde, wie es ausdrücklich in dessen Einleitung ausgesprochen ist, durch den Analyst von 1734 hervorgerufen, durch die dort sich kundgebenden Angriffe auf die Fluxionsrechnung, deren falsche Schlüsse und Geheimnisse. Der grösste Theil des I. Buches von Maclaurin's Lehrbuch war schon 1737 gedruckt, wenn auch das Werk erst 1742 in den Handel kam. Wir sprechen nicht neuerdings von den Kapiteln, welche wir in unserem 110. Kapitel benutzt haben, wohl aber müssen wir, wie wir dort zusagten, über Anderes berichten. Maclaurin greift auf die Exhaustionsmethode der Alten zurück, deren Wesen er in folgendem Satze kennzeichnet[1]): Wenn zwei veränderliche Grössen AP und AQ, welche fortwährend in unveränderlichem Verhältnisse zu einander stehen, sich gleichzeitig zwei bestimmten Grössen AB und AD in der Weise nähern, dass sie sich von ihnen um weniger als irgend ein Angebbares unterscheiden, so muss das Verhältniss dieser Grenzen AB und AD das gleiche sein, wie das unveränderliche Verhältniss der AP und AQ. Erst nachdem er sich länger mit diesen Begriffen beschäftigt hat, kommt Maclaurin zur Erzeugung von Grössen mittels Bewegung. Zwei Principien, sagt er[2]), sind grundlegend. Das erste besteht darin, dass, wenn erzeugte Grössen einander fortwährend gleich sind, auch die erzeugenden Bewegungen fortwährend gleich sein müssen. Das zweite Princip ist die Umkehrung des ersten: sind erzeugende Bewegungen einander fortwährend gleich, so müssen auch die in gleicher Zeit erzeugten Grössen einander fortwährend gleich sein. Das erste Princip bildet die Grundlage der directen, das zweite die der inversen Fluxionsmethode. Der Berkeley'sche Vorwurf einer Bewegung oder Geschwindigkeit ohne Raum oder Zeit wird alsdann entkräftet. Setzen wir voraus[3]), dass ein Körper in irgend einem Augenblicke der Zeit, während welcher er sich bewegt, eine Geschwindigkeit besitze, so ist damit keineswegs vorausgesetzt, Bewegung könne in einem Endpunkte, einer Grenze, einem Augenblicke der Zeit oder in einem untheilbaren Punkte des Raumes stattfinden. Wir werden vielmehr diese Geschwindigkeit stets durch den Raum messen, welcher durchlaufen werden würde, wenn die Geschwindigkeit gleichförmig während einer gegebenen endlichen Zeit anhielte, und so wird sicherlich nicht gesagt werden, wir erhöben den Anspruch, eine Bewegung oder Geschwindigkeit ohne Beachtung von Raum oder Zeit denken zu müssen. Fluxionen verschiedener Ordnung erläutert Maclaurin mit Hilfe der Bewegungslehre[4]),

---

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 6. [2]) Ebenda pag. 55. [3]) Ebenda pag. 56, § 8. [4]) Ebenda pag. 99—103, § 66—70.

und hier tritt der Begriff der Beschleunigung zu dem der Geschwindigkeit. Maclaurin vernachlässigt überhaupt keine Betrachtungsweise, welche sich dazu eignet, die Fluxionslehre dem Verständnisse näher zu bringen, und deshalb erinnert er auch an Neper und seine Logarithmenerklärung (Bd. II, S. 671). Deren Natur und Entstehung, sagt er[1]), ist von dem Erfinder nach einer Methode hergestellt, welche derjenigen ähnelt, die in der Fluxionstheorie zur Erklärung der Entstehung von Grössen jeglicher Art dient, und er beschrieb diese Methode nahezu mit den gleichen Ausdrücken. Zu der Lehre von dem Unendlichkleinen leitet die Bemerkung hinüber[2]), es wäre unverantwortlich, den Geometern nicht gestatten zu wollen, sich eine gegebene, beispielsweise einen Zoll lange, und in der Entfernung von zehn Fuss sichtbare Strecke in mehr Theilchen getheilt zu denken, als in dieser Entfernung unterschieden werden können, da bei Näherbringung der Strecke eine grössere Anzahl von Theilchen thatsächlich unterschieden werden. Dann heisst es an einer anderen Stelle[3]), die Infinitesimalbetrachtungen seien nur andere Ausdrucksweisen für die Auffassung sich bewegender Grössen. Das Gleiche gelte für die ersten und letzten Verhältnisse. Allerdings sei Vorsicht unerlässlich; bei Infinitesimalbetrachtungen müsse man namentlich darauf achten, dass man nicht über die Ordnung des Unendlichkleinen strauchle; bei Uebung der nöthigen Vorsicht aber seien die vorgeworfenen Irrthümer in der Infinitesimalrechnung wie in der Fluxionsmethode gegenstandlos.

Neben diesen der Begründung der Infinitesimalmethoden gewidmeten Stellen enthält Maclaurin's Treatise of fluxions noch sehr viel Lesenswerthes. Wir heben hier nur zweierlei hervor, werden auf ein Drittes im 118. Kapitel zu reden kommen.

Die Lehre von den grössten und kleinsten Werthen war früher nur so weit geführt, dass man das Verschwinden der ersten Ableitung und das Vorzeichen der zweiten Ableitung derjenigen Function, die auf ein Maximum oder ein Minimum untersucht werden sollte, beachtete. Sie erhielt jetzt die Weiterbildung[4]), dass unter Umständen noch die folgenden Ableitungen hergestellt wurden, und dass Maclaurin zeigte, dass, wenn ein Werth der unabhängigen Veränderlichen x sämmtliche Ableitungen der Function y von der 1ten anfangend bis zuletzt zur n^{ten} verschwinden lasse, ein Maximum oder Minimum nur dann stattfinde, wenn n ungrad ist, bei gradem n da-

---

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 158, § 151. [2]) Ebenda pag. 243, § 291. [3]) Ebenda pag. 413—423, § 495—505. [4]) Ebenda pag. 226, § 261 und pag. 659, § 859.

gegen nicht stattfinde, und dass im ersteren Falle das negative, beziehungsweise positive Vorzeichen der $n+1^{ten}$ Ableitung das Kennzeichen eines Maximum, beziehungsweise eines Minimum bilde.

Das Zweite, was wir hier zu erwähnen nicht unterlassen wollen, ist der später sogenannte Maclaurin'sche Satz von der Anziehung confocaler Ellipsoide[1]). Schon der Begriff der diesem Satze zu Grunde liegenden Körper, ja der der entsprechenden ebenen Figuren war neu, und uns wenigstens ist keine frühere Erwähnung concentrischer und zugleich confocaler Ellipsen erinnerlich, als wenn Maclaurin sagt[2]): Seien ADP, Pdp zwei Halbellipsen, welche den gleichen Mittelpunkt C und den gleichen Brennpunkt F besitzen. Maclaurin hat nun nach einander folgende Sätze bewiesen: 1. Die Kräfte, mit denen confocale Rotationsellipsoide — Maclaurin nennt sie durchweg Sphäroide — denselben auf ihrer verlängerten Rotationsaxe liegenden Punkt anziehen, verhalten sich wie ihre Massen. 2. Die Kräfte, mit denen confocale Rotationsellipsoide denselben in der verlängerten Ebene ihres Aequators liegenden Punkt anziehen, verhalten sich wie ihre Massen. 3. Die Kräfte, mit denen dreiaxige confocale Ellipsoide denselben auf ihrer verlängerten Axe liegenden Punkt anziehen, verhalten sich wie ihre Massen. Die Beweise der beiden ersten Sätze sind synthetisch-geometrischer Natur und genau durchgeführt. Der Beweis des dritten wesentlich allgemeineren Satzes überlässt dem Leser die Ausfüllung einiger weniger Lücken, schliesst sich aber so eng an die vorhergehenden Beweise an, dass es keinem Leser, der bis dahin verständnissvoll folgte, schwer fallen konnte, jene kleinen Ergänzungen vorzunehmen.

Was wir übrigens von der Natur der Beweise zu den Sätzen über Anziehung sagten, das gilt von dem ganzen Werke. Maclaurin hat sich fast überall bemüht, synthetisch geometrische Beweise zu liefern. Nicht allein, dass er dadurch in einen gewissen Einklang mit Newton's Principien kam, er konnte auch der niemals angezweifelten Exhaustionsmethode der Alten sich nähern und dadurch um so sicherer den Zweck erfüllen, den er (S. 721) sich als eigentliche Aufgabe gestellt hatte, die Infinitesimalmethode gegen Angriffe zu vertheidigen.

Möglicherweise wäre an dieser Stelle ein Eingehen auf Georg Wolfgang Krafft's 1752 in Petersburg gedruckte Schrift *De infinito mathematico ejusque natura* geboten, doch kennen wir dieselbe nur dem Titel nach.

---

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 540, § 649; pag. 541, § 651; pag. 543, § 653. Vergl. F. Grube in der Zeitschr. Math. Phys. XIV, 261—266. [2]) Ebenda pag. 539, § 648.

113. Kapitel.

Euler's Differentialrechnung.

Wir sind bei Euler's *Differentialrechnung*[1]) von 1755 angelangt. Es ist schwer, so beginnt Euler seine Vorrede, die Differentialrechnung und die Analysis des Unendlichen, wovon jene ein Theil ist, denen zu erklären, die darin noch gar keine Kenntniss besitzen. Die Verhältnisse der Zuwächse einer Veränderlichen und ihrer Function, heisst es dann ungefähr, sollen unter der Voraussetzung beiderseitigen Nullseins untersucht werden, und die Differentialrechnung ist nichts anderes als die Methode, das Verhältniss der verschwindenden Zuwächse oder Incremente zu bestimmen, welche die Functionen veränderlicher Grössen erhalten, wenn die veränderliche Grösse, deren Functionen sie sind, um ein verschwindendes Increment vermehrt werden[2]). Die Integralrechnung ist dann die Methode, aus dem Verhältnisse der verschwindenden Incremente die Functionen zu finden, von welchen sie dergleichen Incremente sind[3]). Um jene Verhältnisse bezeichnen zu können, hat man für die verschwindenden Incremente Symbole eingeführt und hat sie Differentiale genannt, nur muss man dabei beständig vor Augen haben, dass man daraus, weil sie im strengen Verstande Null sind, nichts weiter ableite, als das Verhältniss derselben zu einander, welches man allerdings im Stande ist, durch endliche Grössen anzugeben[4]). Dass die Differentiale nicht etwa unendlich klein, sondern streng Null sind, folgt aus der Richtigkeit der Ergebnisse, welche aus dem Weglassen von Differentialen in der Differentialrechnung gewonnen werden; es müsste sonst irgend ein Fehler entstehen, es sei denn, dass man den begangenen Fehler durch einen entgegengesetzten verbessert hätte, und das ist nicht der Fall[5]).

So hat Euler sein Glaubensbekenntniss gleich in der Vorrede niedergelegt. Er entfernt sich von Leibniz, indem er von dem Unendlichkleinen nichts wissen will, er nimmt auch nicht mit Berkeley einander aufhebende Irrthümer an, er verschmäht Newton's Grenzwerthe, er sieht in den Differentialen wirkliche Nullen, in den Differentialquotienten Brüche mit Nullen im Zähler und Nenner, welche aber gleichwohl einen endlichen Werth besitzen.

Die Vorrede ist, wie es meistens geschieht, für solche Leser ge-

---

[1]) Wir bedienen uns der sehr verbreiteteten deutschen Uebersetzung von Michelsen (1790), auf welche sich die Seitenzahlen unserer Anführungen beziehen. Die gleichfalls angegebene Paragraphennummer vermittelt die Vergleichung des lateinischen Originals. [2]) Euler, Differentialrechnung I, S. LIV. [3]) Ebenda I, S. LVI—LVII. [4]) Ebenda I, S. LXIII. [5]) Ebenda I, S. LXXV.

schrieben, welche den im Werke behandelten Gegenstand schon mehr oder weniger beherrschen. Die Ausführung der dort angedeuteten Gedanken giebt die Differentialrechnung selbst.

Das 1. Kapitel, Von den Differenzen, entwickelt folgende Begriffe. Ist y eine Function von x und ersetzt man in ihr x durch $x+\omega$, durch $x+2\omega$, durch $x+3\omega$, $\cdots$ durch $x+n\omega$, so entstehen aus y die Werthe y^{I}, y^{II}, y^{III}, $\cdots y^{(n)}$, deren Differenzen man bildet. Man erhält[1]) $y^{I}-y=\Delta y$, $y^{II}-y^{I}=\Delta y^{I}$, $y^{III}-y^{II}=\Delta y^{II}$ u. s. w. mit erstmaliger Einführung des Differenzenzeichens. Wir müssen nämlich einen (S. 358 und S. 439) begangenen Irrthum verbessern, auf welchen wir aufmerksam gemacht worden sind[2]). So richtig es ist, dass Johann Bernoulli sich 1706 des Zeichens Δ bediente und dabei sagte: *en prenant Δ pour le signe ou la charactéristique des différences des fonctions*, so hat er doch damit keine endlichen Differenzen, sondern Differentialquotienten gemeint, und Euler tritt wieder als derjenige in den Vordergrund, welcher die gebräuchlich gebliebene Bezeichnung in Uebung gebracht hat. Auch die höheren Differenzen hat Euler eingeführt und symbolisch dargestellt[3]): $\Delta\Delta y=\Delta y^{I}-\Delta y$, $\Delta\Delta y^{I}=\Delta y^{II}-\Delta y^{I}$, $\Delta^3 y=\Delta\Delta y^{I}-\Delta\Delta y$ u. s. w. Die nächstliegenden Aufgaben bestehen darin: zu gegebenen Functionen ihre Differenzen, zu gegebenen Differenzen ihre Functionen zu ermitteln. Die erste dieser Aufgaben wird stufenweise gelöst. Differenzen jeder Ordnung einer Summe von Functionen bestehen aus der Summe der Differenzen der einzelnen Functionen. Differenzen einer Constanten sind Null. Differenzen des Productes einer Function in einen constanten Coefficienten bestehen aus dem Producte jenes Coefficienten in die entsprechende Differenz der Function. Die erste Differenz des Productes pq zweier Functionen[4]) ist $p\cdot\Delta q+q\cdot\Delta p+\Delta p\cdot\Delta q$. Dann kommen die Differenzen aller Ordnungen der Potenz x^n an die Reihe und bei ihrer Bildung erweist sich eine kleine Tabelle als nützlich, welche in ihren Anfängen folgendermassen aussieht[5]):

y	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Δy	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\Delta^2 y$	0	0	2	6	14	30	62	126	254
$\Delta^3 y$	0	0	0	6	36	150	540	1806	5796
$\Delta^4 y$	0	0	0	0	24	240	1560	8400	40824
$\Delta^5 y$	0	0	0	0	0	120	1800	16800	126000
$\Delta^6 y$	0	0	0	0	0	0	720	15120	191520
$\Delta^7 y$	0	0	0	0	0	0	0	5040	141120

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 5, § 4. [2]) Eneström in der *Bibliotheca mathematica* 1896, pag. 21. [3]) Euler, Differentialrechnung I, 6—7, § 6. [4]) Ebenda I, 10—11, § 12. [5]) Ebenda I, 16, § 14.

und deren Entstehung der Art ist, dass jede ihrer Zahlen gefunden wird, indem man die vorhergehende Zahl ebenderselben Zeile zu der darüber stehenden Zahl addirt und die Summe mit dem Ordnungszeiger des vorn stehenden Differenzenzeichens multiplicirt, z. B. $5(1800+1560)=16800$. Führt man ferner, woran Euler noch nicht dachte, Abkürzungszeichen für die Binomialcoefficienten ein, schreibt z. B. $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}=\binom{n}{k}$, so entstehen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
y &= x^n \\
\Delta y &= \binom{n}{1}\omega x^{n-1}+\binom{n}{2}\omega^2 x^{n-2}+\binom{n}{3}\omega^3 x^{n-3}+\cdots \\
\Delta^2 y &= 2\binom{n}{2}\omega^2 x^{n-2}+6\binom{n}{3}\omega^3 x^{n-3}+14\binom{n}{4}\omega^4 x^{n-4}+\cdots \\
\Delta^3 y &= 6\binom{n}{3}\omega^3 x^{n-3}+36\binom{n}{4}\omega^4 x^{n-4}+150\binom{n}{5}\omega^5 x^{n-5}+\cdots \\
\Delta^4 y &= 24\binom{n}{4}\omega^4 x^{n-4}+240\binom{n}{5}\omega^5 x^{n-5}+1560\binom{n}{6}\omega^6 x^{n-6}+\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

wo jede Reihe fortgesetzt wird, bis sie von selbst abbricht, was bei ganzzahlig positivem n stets der Fall sein muss. Auch die allgemeine Formel für $\Delta^m(x^n)$ ist Euler nicht entgangen[1], und er geht so weit, von allen diesen Formeln auch noch Gebrauch zu machen, wenn n keine ganze positive Zahl ist. Dann brechen freilich die für die einzelnen Differenzen sich ergebenden Reihen nicht ab, sondern laufen ins Unendliche fort. Die gleichen unendlichen Reihen z. B. für $\Delta(x^{-2})$ ergeben sich auch folgendermassen. Ist $y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, so ist $y^{\mathrm{I}}=\frac{1}{(x+\omega)^2}$ und $\Delta y=\frac{1}{(x+\omega)^2}-\frac{1}{x^2}$. Verwandelt man dann $\frac{1}{(x+\omega)^2}$ durch Division in eine nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende unendliche Reihe, deren Anfangsglied $\frac{1}{x^2}$ durch $-\frac{1}{x^2}$ vernichtet wird, so entsteht, wie aus der allgemeinen Formel, $\Delta(x^{-2})=-\frac{2\omega}{x^3}+\frac{3\omega^2}{x^4}-\frac{4\omega^3}{x^5}+\cdots$. Eine dem letztgelehrten Verfahren nachgebildete Entwicklung führt zu den Differenzen transcendenter Functionen. Der Zusammenhang der auf einander folgenden $y, y^{\mathrm{I}}, \cdots y^{(n)}$ mit Δy, $\Delta^2 y\cdots$ wird erörtert[2] und $y^{(n)}=y+\binom{n}{1}\Delta y+\binom{n}{2}\Delta^2 y+\binom{n}{3}\Delta^3 y+\cdots$ ermittelt. So oft n ganzzahlig positiv ist, bricht der Reihenausdruck für $y^{(n)}$, d. h. für den Werth, welchen y annimmt, wenn x durch

[1] Euler, Differentialrechnung I, 17, § 15. [2] Ebenda I, 25, § 23.

$x + n\omega$ ersetzt wird, von selbst ab, allein auch hier wird die Formel mit grösster Unbefangenheit als unendliche Reihe benutzt, um $y^{(-n)}$ zu ermitteln, d. h. den Werth, welchen y in Folge des Ueberganges von x in $x - n\omega$ annimmt. Als zweite Hauptaufgabe bezeichneten wir es, die Function aus ihrer Differenz zu finden, eine Operation, welcher das Summenzeichen $\sum$ dient[1]. Wenn $z = \Delta y$, so ist $y = \sum z$, genauer $y = \sum z + C$, da die hinzutretende additive Constante bei der Differenzenbildung wegfällt. Das $\sum$ einer Summe besteht aus der Summe der $\sum$. Ein constanter Coefficient hinter dem $\sum$ kann vor dasselbe gesetzt werden. Beide Regeln vereinigt führen zur Kenntniss von $\sum(x^n)$. Da nämlich $\Delta(x^1) = \omega$, $\Delta(x^2) = 2\omega x + \omega^2$, $\Delta(x^3) = 3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3$ u. s. w., so ist $\sum(\omega) = x$, $\sum(2\omega x + \omega^2) = x^2 = \sum(2\omega x) + \sum(\omega^2) = 2\omega \sum x + \omega x$ und $\sum x = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}$. Ferner $\sum(3\omega x^2 + 3\omega^2 x + \omega^3) = x^3 = \sum(3\omega x^2) + \sum(3\omega^2 x) + \sum(\omega^3) = 3\omega \sum(x^2) + 3\omega^2 \sum x + \omega^2 x = 3\omega \sum(x^2) + \frac{3\omega}{2} x^2 - \frac{3\omega^2}{2} x + \omega^2 x = 3\omega \sum(x^2) + \frac{3\omega}{2} x^2 - \frac{\omega^2}{2} x$ und $\sum(x^2) = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}$ u. s. w. Die allgemeine Formel[2] zeigt $\sum(x^n)$ als eine Summe von Gliedern beginnend mit x^{n+1}, x^n, x^{n-1}, dann aber umschichtig auftretenden Potenzen von x, als x^{n-3}, $x^{n-5} \cdots$. Auch bei negativem n wendet Euler mit grösster Gemüthsruhe die Formel an, ausser in dem einzigen Falle $n = -1$. Das Glied der Entwicklung, welches x^{n+1} enthält, heisst nämlich immer $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega}$ und würde bei $n = -1$ in $\frac{x^0}{0 \cdot \omega}$ übergehen. Wesentlich bequemer findet sich das $\sum$ gewisser Producte[3]. Aus $\Delta[(x+\omega)\cdot(x+2\omega)] = 2\omega(x+2\omega)$ folgt $\sum(x+2\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+\omega)(x+2\omega)$, beziehungsweise $\sum(x+n\omega) = \frac{1}{2\omega}(x+(n-1)\omega)(x+n\omega)$. Aus $\Delta[(x+(n-1)\omega)\cdot(x+n\omega)\cdot(x+(n+1)\omega)] = 3\omega(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)$ folgt $\sum[(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)] = \frac{1}{3\omega}(x+(n-1)\omega)\cdot(x+n\omega)\cdot(x+(n+1)\omega)$ u. s. w. Auch bei den Differenzen gebrochener Functionen erweist dieser Weg sich gangbar. $\Delta\left(\frac{1}{x+n\omega}\right) = \frac{1}{x+(n+1)\omega} - \frac{1}{x+n\omega} = \frac{-\omega}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$ und deshalb

---

[1] Euler, Differentialrechnung I, 27, § 26. [2] Ebenda I, 31, § 29. [3] Ebenda I, 33—35, § 32—34.

$\sum\left(\frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}\right) = -\frac{1}{\omega}\,\frac{1}{x+n\omega}$. Aehnlicherweise ist $\sum\left(\frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)(x+(n+2)\omega)}\right) = -\frac{1}{2\omega}\,\frac{1}{(x+n\omega)(x+(n+1)\omega)}$ u. s. w. Ist die Function, deren $\sum$ gesucht wird, eine echtgebrochene, aber mit nicht constantem Zähler, so ist der Bruch in seine Partialbrüche zu zerlegen und für jeden derselben die Bildung des $\sum$ vorzunehmen. Wir haben einen sehr ausführlichen Auszug aus dem 1. Kapitel veranstaltet, weil in ihm erstmalig ein Lehrbuch der Differentialrechnung eine leichtverständliche, wenn auch nicht immer gründliche Lehre von den endlichen Differenzen und Summen zum Ausgangspunkte nahm. Wir glauben wenigstens trotz des Vorausgehens von Taylor's *Methodus incrementorum* diesen Ausspruch rechtfertigen zu können, da jenes Werk kaum als leichtverständlich und noch weniger als Lehrbuch der Differentialrechnung wird bezeichnet werden wollen.

Das 2. Kapitel, Von dem Nutzen der Differenzen in der Lehre von den Reihen. Es giebt Reihen, bei denen in Folge von so oft als nöthig wiederholter Differenzenbildung zwischen den einzelnen Gliedern irgend einmal lauter Nulldifferenzen auftreten, und andere Reihen, bei denen dieses nie der Fall ist. Zu den letzteren gehört die geometrische Reihe, deren Differenzen stets auf's Neue geometrische Reihen bilden, zu den ersteren gehören die arithmetischen Reihen verschiedener Ordnung, und von ihnen will Euler handeln. Bei ihnen ist das allgemeine Glied und das summirende Glied zu finden, d. h. zwei Functionen von x von solcher Beschaffenheit, dass die erste das x^{te} Glied der vorgelegten Reihe liefert, die zweite die Summe der ersten x Glieder derselben. Alle Reihen, deren Differenzen einer bestimmten Ordnung constant, oder die der nächsthöheren Ordnung als Nullen erscheinen, sind recurrente Reihen[1]), und deren allgemeines Glied kann gefunden werden. Mittels desselben findet sich sogar der Werth eines Gliedes mit gebrochenem Stellenzeiger, d. h. die Interpolation einer Reihe ist ermöglicht[2]). Auf einander folgende summirende Glieder bilden selbst eine Reihe, die summirende Reihe, zu welcher die gegebene Reihe als erste Differenzenreihe gehört. Sind also die n^{ten} Differenzen der gegebenen Reihe constant, so bilden diese die $n+1^{\text{ten}}$ Differenzen der summirenden Reihe, welche folglich wieder eine recurrente Reihe ist, deren allgemeines Glied daher gefunden werden kann[3]). In eine Formel gekleidet,

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 47, § 46. [2]) Ebenda I, 52, § 52.
[3]) Ebenda I, 53, § 53.

spricht diese Folgerung sich also aus[1]: Sei X das x^{te} Glied der vorgelegten Reihe, S die Summe ihrer x ersten Glieder. Offenbar ist $S - X$ die Summe der $x - 1$ ersten Glieder und $\Delta(S - X) = S - (S - X) = X$, mithin $S - X = \sum X$. Unter Hinzufügung der Constanten C wird also $S = C + X + \sum X$, wo C sich dadurch bestimmt, dass augenscheinlich bei $x = 0$ auch $S = 0$ sein muss. Euler wendet die Formel an, um die Summe der n^{ten} Potenzen der x ersten Zahlen zu ermitteln, wozu der im 1. Kapitel gefundene Werth von $\sum x^n$ dient. Euler macht dann darauf aufmerksam[2], dass die auf einander folgenden Summen $1^n + 2^n + \cdots + x^n$ und $1^{n+1} + 2^{n+1} + \cdots + x^{n+1}$ leicht aus einander gefunden werden können, wenn n eine gerade Zahl ist, indem alsdann von dem höchsten Gliede der Summenformel anfangend ein jedes mit $n + 1$ und noch mit einem Factor vervielfacht wird, welcher der Reihe nach $\frac{1}{n+2}$, $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n}$, dann $\frac{1}{n-2}$, $\frac{1}{n-4}$, $\cdots \frac{1}{2}$ heisst. Ist n ungrad, so heisst der letzt erscheinende Zahlenfactor $\frac{1}{3}$, dann aber tritt in der Summenformel der $n + 1^{\text{ten}}$ Potenzen noch ein neues Glied φx hinzu. Die Constante φ findet man, indem $x = 1$ gesetzt wird; φ muss nämlich alsdann die übrigen Coefficienten der Formel zur Einheit ergänzen. Den gleichen Satz hatte (S. 333) Jacob Bernoulli ausgesprochen und vermuthlich ebenso hergeleitet.

Das 3. Kapitel, Von dem Unendlichen und dem Unendlichkleinen, leugnet eigentlich die Begriffe, welche seine Ueberschrift bilden. Eine unendliche Grösse giebt es nicht[3], weil jede Grösse ins Unendliche vermehrt werden kann. Eine Grösse aber, die immerfort vermehrt wird, wird nicht früher unendlich, ehe sie ohne Ende gewachsen ist, und was ohne Ende geschehen muss, das kann man nicht als schon geschehen betrachten. Ein Unendlichkleines aber ist[4] nichts anderes, als eine verschwindende Grösse und folglich in der That $= 0$. Wenn eine Grösse kleiner sein soll als jede Grösse, die sich angeben lässt, so muss sie nothwendig $= 0$ sein, weil sich, wenn sie nicht $= 0$ wäre, eine andere ihr gleiche Grösse angeben liesse, welches wider die Voraussetzung streitet. Mit dieser Vereinheitlichung der beiden Begriffe, des Unendlichkleinen und der Null, ist Euler auf dem Standpunkte angelangt, den er schon in der Vorrede als den seinigen schilderte. Von ihm aus betont er dann weiter[5], dass

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 57, § 59. [2]) Ebenda I, 61—62, § 63.
[3]) Ebenda I, 73, § 75. [4]) Ebenda I, 79, § 83. [5]) Ebenda I, 81, § 85.

$n \cdot 0 = 0$ und also $n : 1 = 0 : 0$ ist, dass zwei Nullen, ob sie gleich arithmetisch betrachtet in dem Verhältnisse der Gleichheit stehen, dennoch jedes geometrische Verhältniss zu einander haben. Letztere Möglichkeit giebt auch die Erklärung der Unendlichkleinen verschiedener Ordnung. Ist dx ein Unendlichkleines, also thatsächlich $= 0$, so gilt das Gleiche für dx^2, für dx^3 u. s. w. Es gilt auch, dass Unendlichkleines gegen Endliches, Unendlichkleines höherer Ordnung gegen solches niedrigerer Ordnung weggelassen werden kann, beziehungsweise das Verhältniss der Gleichheit nicht stört, mag man arithmetisches oder geometrisches Verhältniss darunter verstehen: $(a + n \cdot dx) - a = n \cdot dx = 0$ und $\frac{a + n \cdot dx}{a} = 1 + \frac{n}{a} \cdot dx = 1$ bestätigen diese Wahrheit ebenso wie $(dx \pm dx^2) - dx = \pm dx^2 = 0$ und $\frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1$. Wie dx ein Symbol des Unendlichkleinen oder der 0 ist, so hat man ∞ als Symbol des Unendlichgrossen, des Quotienten eines Endlichen dividirt durch 0, aufzufassen. Ja es scheint aus der Gleichung $\frac{a}{0} = \infty$ selbst möglich, dass Nichts mit Unendlichgross multiplicirt ein endliches Product gebe, welches allerdings auffallend sein müsste, wenn man nicht durch eine ganz richtige Folgerung darauf käme[1]). Jenes Product kann sogar unendlich gross werden, wie es unendlich klein sein kann: $\frac{a}{dx^n} \cdot b \cdot dx^m = ab\,dx^{m-n}$ ist, je nachdem $m > n$, $m = n$, $m < n$, unendlichklein, endlich, unendlichgross[2]). Die Stellung der 0, aber auch des Unendlichgrossen, innerhalb von Reihen endlicher Grössen giebt zu mannigfachen Betrachtungen Anlass. Die nach rückwärts fortgesetzte Zahlenreihe $\cdots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \cdots$ führt durch die 0 hindurch vom Positiven zum Negativen. Die Reihe $\cdots \frac{1}{-4}, \frac{1}{-3}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots$ vollzieht den gleichen Uebergang durch das Unendlichgrosse hindurch. Man hat aus Ersterem geschlossen, die negativen Zahlen seien kleiner als 0, aus Letzterem sie seien grösser als ∞ [Bd. II, S. 825]. Solche Schlüsse sind voreilig. Setzt man die Quadrate der positiven und negativen Zahlen und deren Umkehrungen in Reihengestalt an, so tritt in $(-4)^2$, $(-3)^2$, $(-2)^2$, $(-1)^2$, 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 und in $\left(\frac{1}{-4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{-3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{-2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{-1}\right)^2$, $\frac{1}{0^2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ die 0 zwischen 1 und 1, aber auch ∞

---

1) Euler, Differentialrechnung I, 86, § 92. Vergl. auch I, 88, § 94 am Schlusse. 2) Ebenda I, 90, § 97.

zwischen 1 und 1, und Niemand wird von diesen Reihen behaupten wollen, sie setzten in ihren Gliedern das Grösserwerden regelmässig fort, so wenig man aus der Zahlenreihe $\frac{1}{\sqrt{-4}}, \frac{1}{\sqrt{-3}}, \frac{1}{\sqrt{-2}}, \frac{1}{\sqrt{-1}}, \frac{1}{\sqrt{0}}, \frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}$ auf Beziehungen zwischen dem Unendlichgrossen und dem Imaginären schliessen darf[1]). Den Schluss des Kapitels bilden Erörterungen über den Begriff einer divergenten Reihe und ihrer Summe[2]) in genauer Uebereinstimmung mit dem, was Euler kurz zuvor im V. Bande der neuen Petersburger Commentarien ausgeführt hatte. Er sucht die ganze Schwierigkeit, deren Vorhandensein er keineswegs leugnet, auf den Sinn, der mit dem Worte Summe verknüpft wird, überzuladen (S. 710).

Das 4. Kapitel, Von der Natur der Differentiale aller Ordnungen, führt Euler zu den Ergebnissen des 1. Kapitels zurück. Er lässt den Zuwachs ω, welchen x erhalten soll, $= 0$ sein und deutet ihn deshalb durch das Symbol dx an, worauf Δy zu dem gleichfalls von 0 nicht verschiedenen dy wird. Wie es Differenzen höherer Ordnung gab, in welchen ω einen Bestandtheil bildete, so werden Differentiale höherer Ordnung wieder durch $\omega = dx$ gebildet werden. Die Bezeichnung ist an und für sich sehr nebensächlich, und es lohnt kaum, darüber zu streiten, ob man Newton oder Leibniz in Schreibweise und Benennung nachahmen solle. Für die Leibnizische Form spricht vorzugsweise die Möglichkeit, ein Differential unbestimmter Ordnung mittels $d^n y$ zu bezeichnen, dem die englische Schreibweise nichts Aehnliches an die Seite stellen kann[3]). Freilich äussert Euler nebenbei einen Wunsch, der leider unerfüllt geblieben ist. Als Wurzelzeichen, sagt er[4]), gebrauche man den Buchstaben r, dem man aber die Gestalt $\sqrt{\ }$ gegeben habe, und dadurch sei r zu beliebiger Verwendung wieder frei geworden. Wenn man Logarithmus durch l, Differential durch d abkürze, empfehle es sich, diese Buchstaben gleichfalls in etwas veränderter Gestalt anzuwenden, damit man sie nicht mit den gewöhnlichen Buchstaben, durch welche man beliebige Grössen zu bezeichnen wünschen könne, verwechsle. Die Differentiale höherer Ordnung von x selbst, welches voraussetzungsmässig sich durch immer gleiche Zuwächse dx ändert, müssen wegen der Unveränderlichkeit von dx an sich 0 sein. Damit ist, sagt Euler bei dieser Gelegenheit[5]), nicht etwa gemeint, es seien $d^2x = 0$, $d^3x = 0$ als unendlich kleine Grössen, sondern diese höheren Diffe-

---

[1]) Euler, Differentialrechnung I. 90—93, § 98—101. [2]) Ebenda I, 93—100, § 102—111. [3]) Ebenda I, 104, § 116. [4]) Ebenda I, 106, § 119. [5]) Ebenda I, 109—111, § 124—125.

rentiale seien ebensowohl jedes für sich 0, als auch im Vergleich mit irgend welchen Potenzen von dx, eine Eigenschaft, welche sie mit den Differentialen jeder Ordnung aller constanten Grössen theilen. Anders verhält es sich[1]) mit den Differentialen höherer Ordnung der Function y. Hier ist $dy = pdx$, und setzt man voraus $dp = qdx$, so wird $d^2y = qdx^2$, d. h. das zweite Differential von y hat ein endliches Verhältniss zur zweiten Potenz von dx. Ganz anders lauten die Formeln der höheren Differentiation von y und werden z. B. $d^2y = pd^2x + qdx^2$, wenn dx nicht beständig ist, d. h. wenn die Werthe x, x^{I}, $x^{\mathrm{II}} \cdots$ nicht in arithmetischer Progression auf einander folgen, welches eintrifft, wenn x und ebenso y Functionen einer dritten Veränderlichen sind, die selbst einander gleiche Incremente erhält[2]). Bei Gleichungen zwischen Differentialausdrücken muss Homogenität herrschen, wobei die Ordnung der Differentiale für ihre Dimension gilt, und Glieder höherer Dimension neben niedrigeren additiv verschwinden[3]). Das Kapitel schliesst mit kurzen Bemerkungen über einfache und wiederholte Integration, welche den Differentiationen gegenüberstehen und mit Vorschriften bezüglich der Bezeichnung. Der Buchstabe d soll ausschliesslich zu dem ihm nachfolgenden gehören, mit welchem er ein untrennbares Ganzes bildet, auf welches sich ein etwa auftretender Exponent bezieht. Soll eine Potenz der Veränderlichen differentiirt werden, so muss eine Klammer oder ein Pünktchen solches andeuten und $d(x^2) = d \cdot x^2$ von $dx^2 = (dx)^2$ unterscheiden[4]). Auch von den Bezeichnungen der Integralrechnung ist die Rede.

Das 5. Kapitel, Von der Differentiation der algebraischen Functionen einer veränderlichen Grösse; das 6. Kapitel, Von der Differentiation der transcendenten Functionen; das 7. Kapitel, Von der Differentiation der Functionen zweier oder mehrerer veränderlicher Grössen; das 8. Kapitel, Von der ferneren Differentiation der Differentialformeln; das 9. Kapitel, Von den Differentialgleichungen, beschliessen den I. Theil der Euler'schen Differentialrechnung. Wir können verhältnissmässig rasch über sie hinweggehen. Euler lehrt in ihnen das eigentliche Differentiiren, mithin Dinge, welche zumeist schon in allen vorhandenen Lehrbüchern der Differentialrechnung vorhanden waren, wenn auch die Herleitung nicht überall in gleicher Weise erfolgte. Euler setzt den binomischen Lehrsatz als für jeden Werth des Ex-

---

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 111, § 127. [2]) Ebenda I, 112—114, § 129—130. [3]) Ebenda I, 116—118, § 134—137. [4]) Ebenda I, 122—123, § 144—146.

ponenten unbedingt giltig voraus und findet von ihm aus $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, wovon er dann bei der Differentiation verwickelterer Functionsformen Gebrauch macht. Er kommt dabei zu dem bedeutsamen Satze[1]), dass man bei Aufsuchung des Differentials einer Function das Differential eines jeden Theiles so nehmen solle, als wenn nur dieser Theil veränderlich und die übrigen alle beständige Grössen wären, worauf man alle gefundenen Differentiale zu einer Summe zu vereinigen habe. In heutiger Redeweise entspricht diesem Satze die Regel, dass das totale Differential einer Function sich aus der Summe ihrer partiellen Differentiale zusammensetze. Der Satz wird z. B. auf die Differentiation von p^q angewandt[2]), später auf die Differentiation von Functionen mehrerer Veränderlichen[3]), und wir finden auch ein erstes Symbol partieller Differentiation mittels Einklammerung. Euler schreibt $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$, um den partiellen Differentialquotienten von Q nach x zu bezeichnen[4]), also für das heutige $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Innerhalb des 7. Kapitels erscheint der hochwichtige Satz[5]), der sich unter dem Namen von Euler's Satz von den homogenen Functionen eingebürgert hat. Ist V eine Function von x und y und $dV = Pdx + Qdy$, so muss zwischen P und Q eine gewisse Beziehung obwalten. Wäre z. B. V eine Function von x und y von der Dimension 0, so muss, mittels $y = tx$, die Veränderliche x gänzlich aus V verschwinden, und nur t noch in der Function übrig bleiben, die alsdann T heissen soll. Dann ist $dT = \Theta dt$ und Θ eine Function von t. Aus $y = tx$ folgt ferner $dy = tdx + xdt$, also $Pdx + Qdy = (P + Qt)dx + Qxdt = \Theta dt$, d. h. $P + Qt = 0$, $Q = -\frac{P}{t} = -\frac{Px}{y}$, beziehungsweise $Px + Qy = 0$ neben $\Theta = Qx$. Weil aber Θ weder x noch y enthält, oder nullter Dimension nach diesen Veränderlichen ist, muss auch Qx nullter Dimension nach x und y sein, und mit Hilfe von $Px + Qy = 0$ (eben der oben als nothwendig bestehend angekündigten Beziehung zwischen P und Q) erkennt man leicht, dass auch Px und Qy nullter Dimension nach x und y sein müssen. Die mehrerwähnte Beziehung $Px + Qy = 0$ merkt sich Euler in der Weise, dass, wenn in $dV = Pdx + Qdy$ die Grössen dx und dy durch x und y ersetzt werden, das Nullfache von V entsteht. Ist ferner V eine Function von x und y von der Dimension n, und setzt man auch hier $y = tx$, so geht V in Tx^n

---

[1]) Euler, Differentialrechnung I, 146, § 170. [2]) Ebenda I, 164, § 189. [3]) Ebenda I, 183—185, § 213—215. [4]) Ebenda I, 197—198, § 231. [5]) Ebenda I, 186—192, § 217—225.

über, wo T wieder eine Function von t allein und $dT = \Theta dt$ ist. Differentiation liefert dann $dV = d(Tx^n) = nx^{n-1}Tdx + x^n dT$ neben $dV = Pdx + Qdy = Pdx + Qtdx + Qxdt$ und $nx^{n-1}T = \frac{nV}{x} = P + Qt$, $nV = Px + Qtx = Px + Qy$. Abermals ist also $Pdx + Qdy$ durch Einsetzung von x und y statt dx und dy zu verändern und dem n-fachen von V gleichzusetzen. Euler hatte den Satz schon 1736 für den Fall einer Function von zwei Veränderlichen in Besitz und deutete ihn damals in seiner *Mechanik*[1]) so weit an, dass, als derselbe Satz von Fontaine nachentdeckt wurde, Euler's Früherrecht Anerkennung fand[2]). Wir kommen im 118. Kapitel darauf zurück. Der Satz behält seine Richtigkeit, wenn V eine Function von der Dimension n (worunter selbstverständlich wie oben eine homogene Function von der Dimension n gemeint ist) mehrerer als nur zweier Veränderlichen bedeutet. Aber auch, wenn V eine ganz beliebige Function von x und y und fortwährend $dV = Pdx + Qdy$ ist, muss immerhin eine Beziehung zwischen P und Q obwalten. Sie heisst[3]) in heutiger Schreibweise $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, wofür auch $\frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial x}$ geschrieben werden kann[4]), und dieser Satz erweitert sich wieder dahin, dass auch bei $\frac{\partial^3 V}{\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z}$ die Reihenfolge der partiellen Differentiation gleichgiltig ist[5]). Ist $Pdx + Qdy$ gegeben, ist aber $\frac{\partial P}{\partial y}$ von $\frac{\partial Q}{\partial x}$ verschieden, so kann $Pdx + Qdy$ kein totales Differential sein; ob es aber unter der Voraussetzung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ immer ein totales Differential sein muss, ist eine Frage, die erst in der Integralrechnung gründlich beantwortet werden kann[6]). Wir werden uns im 117. Kapitel überzeugen, dass Euler schon 1732 von dem Dasein eines integrirenden Factors zum Mindesten eine Ahnung hatte, und dadurch vergrössert sich die Tragweite des Ausspruches von 1755, so dass wir annehmen dürfen, Euler sei damals mit der Integration totaler Differentialgleichungen im Reinen gewesen. In dem 8. Kapitel ist ausführlich von der Vertauschung der Veränderlichen die Rede. Euler kleidet die Aufgabe in die Worte, es solle nicht dx, sondern irgend ein anderer Differentialausdruck, beispielsweise $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ als beständig betrachtet werden, was bei Anwendung der Differentialrechnung auf die Curvenlehre

---

[1]) Euler, *Mechanica* T. II, Propositio 14, § 106. [2]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1740 pag. 322, Fussnote. [3]) Euler, Differentialrechnung I, 193—195, § 226—228. [4]) Ebenda I, 196—197, § 231. [5]) Ebenda I, 200—201, § 235. [6]) Ebenda I, 205, § 240.

häufig geschehe[1]. Das 9. Kapitel hat es mit denjenigen Aufgaben zu thun, welche in späterer Zeit als Differentiation impliciter Functionen benannt wurden. Unter Anderem ist gezeigt, wie mittels Differentiation Constante aus einer Gleichung entfernt werden können[2]. Ist $x^3 + y^3 = 3axy$, so folgt mittels Differentiation $3x^2dx + 3y^2dy = 3aydx + 3axdy = 3a(ydx + xdy) = \frac{x^3 + y^3}{xy}(ydx + xdy)$ oder $(2x^3y - y^4)dx + (2xy^3 - x^4)dy = 0$. Eben diese Gleichung erhält man aber auch ohne nachmalige Elimination von a, wenn man zuerst die ursprüngliche Gleichung auf die Gestalt $\frac{x^3 + y^3}{xy} = 3a$ bringt und alsdann differentiirt. Wenn Euler in diesem Kapitel ausspricht[3], es sei möglich, jede Differentialgleichung auf eine endliche Form zu bringen, worin bloss endliche Grössen enthalten, und woraus alle Differentiale oder unendlichkleine Grössen weggeschafft seien, so versteht er darunter die Benutzung von Differentialquotienten unter Entfernung der Differentiale. Er gebraucht dabei regelmässig die Buchstaben p, q, r für die drei ersten Differentialquotienten von y nach x.

Der II. Theil von Euler's Differentialrechnung will, seinem besonderen Titel entsprechend, den Gebrauch dieser Rechnung in der Analysis des Endlichen sowie auch in der Lehre von den Reihen zeigen. Er besteht aus achtzehn Kapiteln.

Das 1. Kapitel, Von der Umformung der Reihen, bedient sich[4] nach einander der doppelten Substitution $x = \frac{y}{1+y}$, $y = \frac{x}{1-x}$, deren zweite die unmittelbare Folge der ersten ist, indem nur zwischen der ersten und zweiten Substitution die vorkommenden Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden. Die Reihe $S = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$ wird demnach $S = \frac{ay}{1+y} + \frac{by^2}{(1+y)^2} + \frac{cy^3}{(1+y)^3} + \cdots = a[y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - \cdots] + b[y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + \cdots] + c[y^3 - 3y^4 + 6y^5 - \cdots] + \cdots = ay + (b-a)y^2 + (c - 2b + a)y^3 + \cdots = \frac{ax}{1-x} + \frac{(b-a)x^2}{(1-x)^2} + \frac{(c-2b+a)x^3}{(1-x)^3} + \cdots$. Die hier auftretenden Coefficienten a, $b - a$, $c - 2b + a \cdots$ sind aber die Differenzen verschiedener Ordnung, welche aus den Coefficienten a, b, $c \cdots$ der ursprünglichen Reihe gebildet wurden, und sie können durch a, Δa, $\Delta^2 a \cdots$ bezeichnet werden. Folglich ist $S = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots = \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \cdots$. Sind die Coefficienten

[1] Euler, Differentialrechnung I, 229, § 269. [2] Ebenda I, 250, § 289. [3] Ebenda I, 259, § 299. [4] Ebenda II, 4—7, § 2—4.

$a, b, c \cdots$ so beschaffen, dass sie zu constanten Differenzen irgend einer Ordnung führen, so bricht die umgeformte Reihe nothwendig irgend einmal ab, d. h. sie stellt eine Summenformel der ursprünglichen Reihe dar. Die Reihe $1x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots + n^2x^n + \cdots$ z. B. besitzt 3, 5, 7, 9 $\cdots$ als erste Differenzen der Coefficienten, 2, 2, 2 $\cdots$ als deren zweite Differenzen, mithin ist $1x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots + n^2x^n + \cdots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$. Ist eine ähnlich gebaute abgeschlossene Reihe $ax + bx^2 + cx^3 + \cdots + ox^n$ zu summiren, so bildet man die beiden Summen[1] der unendlichen Reihen $ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$ und $px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + \cdots = x^n(px + qx^2 + rx^3 + \cdots)$, deren erste uns schon bekannt ist, während sich die zweite in der Gestalt $\frac{x}{1-x}x^np + \frac{x^2}{(1+x)^2}x^n\Delta p + \frac{x^3}{(1-x)^3}x^n\Delta^2 p + \cdots$ darstellt. Der Unterschied dieser beiden Summen bildet den Werth der abgeschlossenen Reihe, mithin $ax + bx^2 + cx^3 + \cdots + ox^n = \frac{x}{1-x}(a - x^np) + \frac{x^2}{(1-x)^2}(\Delta a - x^n\Delta p) + \frac{x^3}{(1-x)^3}(\Delta^2 a - x^n\Delta^2 p) + \cdots$. Eine grade für Euler höchst auffallende Bemerkung bezieht sich auf Reihen, deren Coefficienten nicht zu constanten Differenzen irgend einer Ordnung führen, bei welchen also die umgewandelte Reihe nicht abbricht. Ist alsdann, heisst es wörtlich[2], $x < 1$ in der Reihe $ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$, und in diesem Falle findet die Summation im eigentlichen Verstande allein statt, so ist $\frac{x}{1-x} > x$, und die gefundene Reihe convergirt weniger als die gegebene. Entgegengesetzt verhält es sich mit Reihen, deren Glieder abwechselnde Vorzeichen haben, und welche aus den vorhergehenden entstehen, indem man x negativ nimmt[3]. Dann geht $S = ax - bx^2 + cx^3 - \cdots$ in $S = \frac{x}{1+x}a - \frac{x^2}{(1+x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1+x)^3}\Delta^2 a - \cdots$ über, und diese Umwandlung ist immer vortheilhaft, weil bei positivem x unter allen Umständen $\frac{x}{1+x} < 1$, die gefundene Reihe also stärker als die gegebene convergirt. Bei $x = 1$ wird $a - b + c - \cdots = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\Delta a + \frac{1}{8}\Delta^2 a - \cdots$, und diese Formel dient alsdann zur Summirung divergenter Zahlenreihen wie $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$, $1 - 4 + 9 - 16 + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = 0$ u. s. w. Bricht die umgewandelte Reihe nicht ab, so bedingt das Verfahren

[1] Euler, Differentialrechnung II, 7—9, § 5. [2] Ebenda II, 9, § 6.
[3] Ebenda II, 9—12, § 7—9.

an Reihen mit wechselndem Vorzeichen ausgeführt mindestens die Herstellung einer neuen convergenteren Reihe, deren Summirung durch Addition näherungsweise gelingt[1], z. B. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \cdots$. Ausser den Substitutionen $x = \frac{y}{1+y}$, $y = \frac{x}{1-x}$ nimmt Euler im Verlauf des Kapitels noch andere vor.

Das 2. Kapitel, Von der Erfindung summirbarer Reihen, bedient sich vorzugsweise der Differentiation von abgeschlossenen oder unendlichen eine allgemeine Grösse enthaltenden summirbaren Reihen, um neue Reihen ähnlichen Charakters zu erhalten. Eine Verallgemeinerung des Verfahrens tritt ein, wenn die gegebene Reihe und ebenso ihre Summenformel vor der Differentiation noch mit irgend einer Potenz der allgemeinen Grösse vervielfacht wird. Auch gliedweise Vervielfachung einer summirbaren Reihe, welche nach den Potenzen von x fortschreitet, mit je einem Gliede einer schliesslich auf constante Differenzen führenden Zahlenreihe liefert neue summirbare Reihen, wovon wir ein einfachstes Beispiel[2]) anführen. Sei $S = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$. Multiplication mit x^m und Differentiation nach x bringt $\frac{d(x^m S)}{dx} = mx^{m-1}S + x^m\frac{dS}{dx} = (m+1)ax^m + (m+2)bx^{m+1} + (m+3)cx^{m+2} + \cdots$ hervor, und Division durch x^{m-1} liefert $mS + x\frac{dS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \cdots$. Nun sei $m = \frac{\alpha - \beta}{\beta}$, so entsteht nach dieser Substitution und nachfolgender Multiplication mit β die Reihe: $\alpha ax + (\alpha+\beta)bx^2 + (\alpha + 2\beta)cx^3 + \cdots = (\alpha - \beta)S + \beta x\frac{dS}{dx}$.

Das 3. Kapitel, Von der Erfindung der Differenzen, will die Differenzen der Functionen mit Hilfe ihrer Differentiale berechnen, also die Umkehrung der im ersten Bande erledigten Aufgabe der Auffindung der Differentiale mit Hilfe der Differenzen bewerkstelligen[3]). Euler versteht darunter die Herstellung der Taylor'schen Reihe, welche er fast wörtlich so vollzieht[4]) wie der Erfinder, dessen Verfahren wir (S. 367—368) mitgetheilt haben. Die Veränderung, welche x erleiden soll, nennt Euler $\pm\omega$, und er findet als den Werth der Function y, der dem veränderten Werthe von x, also $x \pm \omega$, entspricht, $y \pm \omega\frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{\omega^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\omega^4}{24}\frac{d^4y}{dx^4} \pm \cdots$. Die Differenz von y, auf deren Aufsuchung das eigentliche Bestreben gerichtet ist, findet

[1]) Euler, Differentialrechnung II, 16, § 11. [2]) Ebenda II, 30, § 24.
[3]) Ebenda II, 52, § 44. [4]) Ebenda II, 52—56, § 45—49.

sich naturgemäss durch Subtraction des ersten Werthes von y von dem nachfolgenden zweiten Werthe oder $\Delta y = y^{\mathrm{I}} - y$. Ersetzt man x durch $x + 2\omega$, durch $x + 3\omega \cdots$, so entsteht y^{II}, $y^{\mathrm{III}} \cdots$ und daraus $\Delta^2 y = y^{\mathrm{II}} - 2y^{\mathrm{I}} + y$, $\Delta^3 y = y^{\mathrm{III}} - 3y^{\mathrm{II}} + 3y^{\mathrm{I}} - y$ u. s. w., beziehungsweise unter Anwendung der Taylor'schen Reihe für y^{I}, für y^{II}, für $y^{\mathrm{III}} \cdots$ Ausdrücke für die höheren Differenzen von y, in welchen die Differentialquotienten von y nach x vorkommen[1]. In der Reihe, welche den Werth von y unter der Voraussetzung, dass x durch $x - \omega$ ersetzt werde, angiebt, nimmt Euler $\omega = x$, d. h. eigentlich $x = 0$. Er erhält den entsprechenden Werth von y in Gestalt der Reihe[2] $y - \frac{x}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\frac{d^4 y}{dx^4} - \cdots$. Das ist die von Johann Bernoulli herrührende Reihe (S. 220), welche als Sonderfall der Taylor'schen Reihe auftritt.

Das 4. Kapitel, Von der Umwandlung der Functionen in Reihen, wendet die Bernoulli'sche und die Taylor'sche Reihe auf bestimmte Functionen an. Die binomische Reihe entsteht z. B. mittels der Taylor'schen Formel[3], allerdings ein Kreisschluss, da im ersten Bande die Differenzirung von x^n mittels des Binomialsatzes gewonnen worden war (S. 733). Euler zieht aus $(x + \omega)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\omega + \binom{n}{2} x^{n-2}\omega^2 + \cdots$ eine geistreiche Folgerung. Sei $\omega = -\frac{ux}{x+u}$, $x + \omega = \frac{x^2}{x+u}$, so wird $\frac{x^{2n}}{(x+u)^n} = x^n - \binom{n}{1}\frac{x^n u}{x+u} + \binom{n}{2}\frac{x^n u^2}{(x+u)^2} - \cdots$. Division durch x^{2n} liefert $(x+u)^{-n} = x^{-n} - \binom{n}{1} x^{-n}\frac{u}{x+u} + \binom{n}{2} x^{-n}\frac{u^2}{(x+u)^2} - \cdots$. Wird nun $n = -m$ gesetzt, so erscheint $(x+u)^m = x^m + \frac{m}{1} x^m \frac{u}{x+u} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} x^m \frac{u^2}{(x+u)^2} + \cdots$, eine Reihe, welche ins Unendliche fortläuft, wenn m positiv ist, und welche von selbst abbricht, wenn m ganzzahlig negativ ist. Auch auf gebrochene n wird die Reihe für $(x + \omega)^n$ angewandt und mit ihrer Hilfe der Werth verschiedener Wurzelgrössen gesucht. Dann kommen transcendente Functionen an die Reihe, Logarithmen, Arcussinus, Arcuscosinus, Arcustangens, Sinus, Cosinus, Tangens u. s. w.

Das 5. Kapitel, Von der Erfindung der Summen der Reihen aus dem allgemeinen Gliede, bringt Untersuchungen, welche Euler im VI. und VIII. Bande der Petersburger Commentarien angebahnt

[1]) Euler, Differentialrechnung II, 58—60, § 52—53. [2]) Ebenda II, 74, § 67. [3]) Ebenda II, 80—82, § 72—73.

hatte (S. 635 und 641) mit welchen auch Maclaurin sich unabhängig von Euler beschäftigt hatte (S. 662). Sei y das x^{te} Glied einer Reihe und Sy die Summe der x ersten Glieder, mithin 0, wenn $x = 0$. Ist $y = p + q + r + \cdots$, so ist selbstverständlich $Sy = Sp + Sq + Sr + \cdots$. Das $x - 1^{\text{te}}$ Reihenglied, welches y unmittelbar vorhergeht, heisse v, so dass also v aus y entsteht, wenn darin x durch $x - 1$ ersetzt wird. Daraus folgt $v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{24}\frac{d^4y}{dx^4} - \cdots$ neben $Sv = Sy - y + A$, insofern das Summenzeichen S sich stets über x Glieder zu erstrecken hat. Man muss nämlich alsdann, um Sv überhaupt bilden zu können, noch ein nulltes Glied der ursprünglichen Reihe, welches A heissen soll, nach rückwärts hinzudenken, oder mit anderen Worten, A ist eine Summationsconstante. Summirt man jetzt gliedweise die für v aufgestellte Reihe, so wird neben $Sv = Sy - y + A$ auch $Sv = Sy - S\frac{dy}{dx} + S\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - S\frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + S\frac{1}{24}\frac{d^4y}{dx^4} - \cdots$ und $S\frac{dy}{dx} = y - A + S\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - S\frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + S\frac{1}{24}\frac{d^4y}{dx^4} - \cdots$, worin die Constante A am einfachsten derart bestimmt wird, dass man $x = 0$ setzt, wodurch die Ausdrücke auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens verschwinden müssen. Ist $\frac{dy}{dx} = z$, so wird $\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}$ und $y = \int z\,dx$, in welches unbestimmte Integral die Constante $-A$ mit inbegriffen werden kann, und man erhält $Sz = \int z\,dx + \frac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \frac{1}{6}S\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \cdots$, da Zahlencoefficienten wie $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}\cdots$ augenscheinlich dem Summenzeichen vorgesetzt werden dürfen. Die nicht ausdrücklich angeschriebene Integrationsconstante zu $\int z\,dx$ ist so zu wählen, dass $x = 0$ die Summe Sz zum Verschwinden bringe. Entsprechend der Reihe für Sz findet man: $S\frac{dz}{dx} = z + \frac{1}{2}S\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} + \cdots$, $S\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{1}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} + \cdots$ u. s. w. Einsetzung dieser Werthe verwandelt aber die Reihe für Sz in

$$Sz = \int z\,dx + \alpha z + \beta\frac{dz}{dx} + \gamma\frac{d^2z}{dx^2} + \delta\frac{d^3z}{dx^3} + \cdots,$$

und wird rückwärts statt jedes Werthes dieses neuen Ausdruckes die ihm gleiche, Summenzeichen enthaltende Form benutzt, wird also

$$\begin{aligned}
\int z\,dx &= Sz - \frac{1}{2}S\frac{dz}{dx} + \frac{1}{6}S\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} + \cdots \\
\alpha z &= \qquad\;\; \alpha S\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{2}S\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} - \cdots \\
\beta\frac{dz}{dx} &= \qquad\qquad\qquad\quad \beta S\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} + \cdots \\
\gamma\frac{d^2z}{dx^2} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma S\frac{d^3z}{dx^3} - \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

gesetzt und nach Addition aller dieser Gleichungen die links vom Gleichheitszeichen entstehende Summe gegen das zu rechter Hand sich findende Sz gestrichen, so sind die noch übrigen rechts stehenden Glieder nur dann, ohne Rücksicht auf die Art wie z von x abhängt, $= 0$, wenn die Zahlencoefficienten der einzelnen Summen $= 0$ sind, d. h.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} + \alpha = 0 &\quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{1}{2} \\
\frac{1}{6} - \frac{\alpha}{2} + \beta = 0 &\quad \text{oder} \quad \beta = 12 \\
-\frac{1}{24} + \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2} + \gamma = 0 &\quad \text{oder} \quad \gamma = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Die nächsten Werthe[1]) sind $\delta = -\frac{1}{720}$, $\varepsilon = 0$ u. s. w. Man hat damit γ und ε d. h. die Zahlencoefficienten von $\frac{d^2z}{dx^2}$ und von $\frac{d^4z}{dx^4}$ als 0 erkannt, und Euler will nunmehr allgemein beweisen, dass jedes $\frac{d^{2k}z}{dx^{2k}}$ den Zahlencoefficienten 0 besitzen muss[2]). Zu diesem Zwecke setzt er $V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \cdots$ und hebt hervor, dass vermöge der Recursionsgleichungen, welche $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ verbinden, die Reihe für V eine recurrente sein müsse, und zwar dieselbe, welche aus der Division $V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \cdots}$ sich ergebe. Bekanntlich ist $e^{-u} = 1 - u + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 - \cdots$ und daraus $1 - e^{-u} = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{24}u^4 + \cdots$, beziehungsweise $\frac{1-e^{-u}}{u} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \cdots$. So ist gefunden $V = \frac{u}{1-e^{-u}}$ und $V - \frac{u}{2} = \frac{u - \frac{u}{2} + \frac{u}{2}e^{-u}}{1-e^{-u}} = \frac{u}{2}\,\frac{1+e^{-u}}{1-e^{-u}}$. Man verwandelt den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen durch Multiplication mit

[1]) Euler, Differentialrechnung II, 120—127, § 103—112. [2]) Ebenda II, 127—129, § 113—115.

$\frac{e^{\frac{u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}}}$ und erhält $V - \frac{u}{2} = \frac{u}{2} \cdot \frac{e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}}}{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}}$. Aber $e^{\frac{u}{2}} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{u}{2}\right)^4 + \cdots$ und $e^{-\frac{u}{2}} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{u}{2}\right)^4 - \cdots$. Demzufolge ist $e^{\frac{u}{2}} + e^{-\frac{u}{2}} = 2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{u}{2}\right)^4 + \ldots\right]$ und $e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}} = 2u\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{120}\left(\frac{u}{2}\right)^4 + \cdots\right]$. Also endlich $V - \frac{u}{2} = \frac{1 + \frac{u^2}{2 \cdot 4} + \frac{u^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots}{1 + \frac{u^2}{4 \cdot 6} + \frac{u^4}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \cdots}$. Vollzieht man die rechts vom Gleichheitszeichen angedeutete Division, so können im Quotienten nur Potenzen von u mit gradem Exponenten erscheinen. Andererseits war $\alpha = \frac{1}{2}$, also $V - \frac{u}{2} = V - \alpha u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \cdots$, und da nach dem soeben Bewiesenen Potenzen von u mit ungradem Exponenten in der Entwicklung nicht vorkommen können, so muss $\gamma = \varepsilon = \cdots = 0$ sein. Ausserdem giebt der Bruch, dessen Werth $1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \cdots$ durch die letzte Erörterung bekannt geworden ist, neue Recursionsgleichungen zwischen $\beta, \delta \cdots$. Euler zieht vor, in der Reihe für Sz wechselnde Vorzeichen auftreten zu sehen, und schreibt sie deshalb, nachdem α durch seinen bekannten Zahlenwerth $\frac{1}{2}$ ersetzt ist, $Sz = \int z\,dx + \frac{1}{2} z + A \frac{dz}{dx} - B \frac{d^3 z}{dx^3} + C \frac{d^5 z}{dx^5} - D \frac{d^7 z}{dx^7} + \cdots$, während $A, B, C, D \cdots$ die Werthe besitzen, welche aus der Entwicklung $\frac{1 - \frac{u^2}{2 \cdot 4} + \frac{u^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{u^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \cdots}{1 - \frac{u^2}{4 \cdot 6} + \frac{u^4}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \frac{u^6}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \cdots} = 1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - \cdots$ sich ergeben[1]). Aber Zähler und Nenner des hier auftretenden Bruches sind bekannte Reihen: $1 - \frac{u^2}{2 \cdot 4} + \frac{u^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{u^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \cdots = \cos\frac{u}{2}$, $1 - \frac{u^2}{4 \cdot 6} + \frac{u^4}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \frac{u^6}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \cdots = \frac{2}{u} \sin\frac{u}{2}$ und daher $\frac{u}{2} \operatorname{cotg} \frac{u}{2} = 1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - \cdots$, beziehungsweise $\frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{u}{2} = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - \cdots$ oder die Zahlen $A, B, C, D \cdots$ treten als Coefficienten in der Cotangensreihe auf. Setzt man $\frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - \cdots = s$ oder $\frac{u}{2} = \operatorname{arccotg} 2s$

[1]) Euler, Differentialrechnung II, 131—132, § 118.

und differentiirt nach u, so erhält man $\frac{1}{2} = \frac{-2}{1+4s^2}\frac{ds}{du}$, $4\frac{ds}{du} + 1 + 4s^2 = 0$. Aber jeder der Ausdrücke $4\frac{ds}{du}$ und $4s^2$ kann in Reihenform berechnet und in $4\frac{ds}{du} + 1 + 4s^2 = 0$ eingesetzt werden, welche Gleichung bei allgemein gelassenem Werthe von u nur dann erfüllt werden kann, wenn die Zahlencoefficienten aller Potenzen von u verschwinden. Diese Bedingung liefert die Recursionsgleichungen $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{A^2}{5}$, $C = \frac{2AB}{7}$, $D = \frac{2AC + B^2}{9} \cdots$ und es fällt aus diesen Formeln sehr deutlich in die Augen, dass jeder dieser Werthe positiv sein muss[1]. Euler setzt alsdann $1 \cdot 2A = \mathfrak{A}$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4B = \mathfrak{B}$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6C = \mathfrak{C}$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8D = \mathfrak{D} \cdots$ und nennt diese letzteren nach dem Namen ihres Erfinders, Jacob Bernoulli, die Bernoulli'schen Zahlen, deren 15 erste er angiebt[2], während Bernoulli nur 5 derselben ermittelt hatte.

Wir dürfen nicht weiter ähnlich eingehend berichten. Wir müssen das 6. Kapitel, Von der Summation der Progressionen durch ohne Ende fortlaufende Reihen; das 7. Kapitel, Fortführung der Summation der Progressionen durch unendliche Reihen; das 8. Kapitel, Von dem Gebrauch und dem Nutzen der Differentialrechnung bei Bildung der Reihen, als solche kennzeichnen, welche die allgemeinen Sätze des 5. Kapitels anwenden. Im 8. Kapitel kommen vielfach Entwicklungen folgender Art vor. Es seien Z, X, S drei nach Potenzen von x fortschreitende Reihen, deren letzte hypothetisch, d. h. mit unbestimmten Coefficienten angenommen ist und $\frac{Z^m}{X^n} = S$. Logarithmirung und darauf folgende Differentiation liefern $\frac{m\,dZ}{Z} - \frac{n\,dX}{X} - \frac{dS}{S} = 0$, beziehungsweise $mXSdZ - nZSdX - ZXdS = 0$, und bei Ausrechnung der links vom Gleichheitszeichen befindlichen Ausdrücke, deren Nullwerden auf dem Verschwinden der Coefficienten der einzelnen Potenzen von x beruht, erscheinen zahlreiche Gleichungen, welche die Coefficienten in S zu bestimmen gestatten. In eben diesem 8. Kapitel erscheinen zum ersten Male die Secantencoefficienten[3].

Das 9. Kapitel, Von dem Nutzen der Differentialrechnung bei der Auflösung der Gleichungen, behandelt zuerst die Anwendung der Taylor'schen Reihe auf Gleichungen. Ist y eine Function von x, welche durch $x = f$ zu Null wird, d. h. hat $y = 0$ die

[1] Euler, Differentialrechnung II, 133, § 119. [2] Ebenda II, 137, § 122.
[3] Ebenda II, 259—260, § 224.

Wurzel $x = f = x + (f - x)$, so ist nach der Taylor'schen Entwicklung $0 = y + (f - x)\frac{dy}{dx} + \frac{(f - x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(f - x)^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$, und kennt man ein von dem wahren Werthe f nicht sehr abweichendes x, welches $f - x$ und noch mehr dessen höhere Potenzen sehr klein werden lässt, so kann man näherungsweise $y + (f - x)\frac{dy}{dx} = 0$ oder $y + (f - x)\frac{dy}{dx} + \frac{(f - x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ setzen und daraus einen angenäherten Werth von f finden, der dann selbst wieder für x angenommen eine weitere Annäherung gestattet. Man kann aber auch sagen[1], es sei, wenn y eine Function von x ist, auch x eine Function von y, deren Werth unter der Voraussetzung $y = 0$ gesucht wird. Dann muss anstatt $0 = y + (f - x)\frac{dy}{dx} + \frac{(f - x)^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(f - x)^3}{6}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$ eine andere Gleichung stattfinden, welche f für 0 und 0 für f, y für x und x für y erscheinen lässt, d. h. die Gleichung $f = x - y\frac{dx}{dy} + \frac{y^2}{2}\frac{d^2x}{dy^2} - \frac{y^3}{6}\frac{d^3x}{dy^3} + \cdots$. Ein zweiter Gegenstand, der im 9. Kapitel zur Behandlung kommt[2], ist das Auftreten mehrfacher Wurzeln einer Gleichung. Euler geht hier von der Annahme aus, man wisse, dass eine Gleichung zwei um a verschiedene Wurzeln besitze, dass also x und $x + a$ beide genügen, um $y = 0$ werden zu lassen. Der besondere Fall $a = 0$ enthüllt alsdann die bekannten Merkmale mehrfacher Wurzeln.

Das 10. Kapitel, Von den grössten und kleinsten Werthen der veränderlichen Grössen, giebt seinen Inhalt durch die Ueberschrift deutlich genug zu erkennen. Dass es in ihm weder an lehrreichen Beispielen, noch an lesenswerthen Einzelheiten fehlt, bedarf kaum der Erwähnung. Wir machen nur etwa auf die Auffindung des Maximum oder Minimum von $y = \frac{P}{Q}$ aufmerksam[3], wo $dy = \frac{QdP - PdQ}{Q^2} = \frac{Rdx}{Q^2}$ ist, und wo $R = 0$ den Werth von x liefert, welcher ein Maximum oder Minimum von y hervorbringt, je nachdem $dR \lessgtr 0$ ist.

Das 11. Kapitel, Von den grössten und kleinsten Werthen der vielförmigen Functionen und der Functionen mehrerer veränderlichen Grössen, ist gleichfalls in der Ueberschrift deutlich gekennzeichnet. Bei vielförmigen Functionen betont Euler, dass sie ihre Versinnlichung in Curven besitzen, welche aus so vielen Schenkeln

---

[1] Euler, Differentialrechnung II, 271—273, § 234—235. [2] Ebenda II, 287—294, § 244—249. [3] Ebenda III, 28, § 266.

bestehen, als y für jedes x Werthe besitzt, und dass jeder solche Schenkel für sich auf grösste und kleinste Werthe der Ordinate y zu untersuchen sei[1]). Bei vielförmigen Functionen giebt es aber auch eine Art grösster und kleinster Werthe, welche nicht mittels $\frac{dy}{dx}=0$ gefunden werden[2]). Es sei y eine zweiförmige Function von x, und zwar seien ihre beiden Werthe reell und verschieden bei $x<f$, ihre beiden Werthe reell und gleich, etwa $=g$, bei $x=f$, ihre beiden Werthe imaginär bei $x>f$, so ist $y=g$ ein Maximum oder Minimum, ohne dass $\frac{dy}{dx}=0$ wäre. Wir werden im 116. Kapitel hierauf zurückzukommen haben. Ist eine Function zweier Veränderlichen x und y auf ihre grössten und kleinsten Werthe zu prüfen, so ist der Fall der einfachste, in welchem die Function $X+Y$ heisst, wo X ausschliesslich von x, Y ausschliesslich von y abhängt[3]). Diese Summe wird Maximum, beziehungsweise Minimum, wenn sowohl X als Y für sich diese Eigenschaft besitzt, wogegen Werthe von x und y, welche die eine der beiden Functionen X und Y zu einem Maximum, die andere zu einem Minimum machen, für die Summe $X+Y$ weder ein Maximum noch ein Minimum hervorbringen. Ganz ähnliche Betrachtungen ruft die Function $X-Y$ hervor. Ist U eine irgendwie beschaffene Function von x und y, so ist die Behandlung folgendermassen[4]). Differentiation möge $dU=Pdx+Qdy$ hervorbringen, wo P, Q die partiellen Differentialquotienten von U nach x und y sind. Wäre der Werth von y bekannt, der U zu einem Maximum oder Minimum macht, und nur der entsprechende Werth von x gesucht, so wäre U nach x allein zu differentiiren und dieser Differentialquotient von U nach x, mithin $P=0$ zu setzen. Desgleichen wäre $Q=0$ zu setzen, wenn der Werth von x bekannt wäre, der U zu einem Maximum oder Minimum macht, und nur der zugehörige Werth von y in Frage stünde. Wenn also sowohl x als y veränderlich sein sollen, so muss gleichzeitig $P=0$ und $Q=0$ sein. Darüber, ob ein Maximum oder ein Minimum von U vorhanden ist, würde in den beiden getrennt besprochenen Fällen das Vorzeichen von $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ und von $\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ den Ausschlag geben. In dem allgemeinen Falle müssen wieder diese beiden Ausdrücke befragt werden, und sie müssen gleichen Vorzeichens sein, sonst kann weder ein Maximum noch ein Minimum von U stattfinden. Von der in späterer Zeit hinzugetretenen Bedingung bezüglich $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$

---

[1]) Euler, Differentialrechnung III, 46, § 273. [2]) Ebenda III, 55—56, § 278. [3]) Ebenda III, 69—70, § 286. [4]) Ebenda III, 73—76, § 288—290.

ist noch keine Rede, was man Euler nicht so hoch anrechnen darf, da die ganze Frage nach grössten und kleinsten Werthen von Functionen zweier Veränderlichen in seiner Differentialrechnung zum ersten Male allgemein gestellt ist.

Das 12. Kapitel, Von dem Gebrauche der Differentiale bei der Erforschung der reellen Wurzeln der Gleichungen, bringt hauptsächlich den Satz, dass, wenn $z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots$, die Anzahl der reellen Wurzeln von $z = 0$ mit der Anzahl der Maximal- oder Minimalwerthe von z in Zusammenhang stehe, und diese wieder mit der Anzahl der reellen Wurzeln von $\frac{dz}{dx} = 0$. Hat $z = 0$ etwa m reelle Wurzeln, so hat $\frac{dz}{dx} = 0$ deren gewiss mindestens $m - 1$, und das Vorhandensein von weniger als $m - 1$ reellen Wurzeln von $\frac{dz}{dx} = 0$ lässt erkennen, dass $z = 0$ weniger als m reelle Wurzeln besitze, wie viele weniger ist unbekannt, da die Wurzeln von $z = 0$ sogar insgesammt imaginär sein können, während die von $\frac{dz}{dx} = 0$ insgesammt reell sind[1]). Ein sicherer Schluss von den Wurzeln von $\frac{dz}{dx} = 0$ auf die von $z = 0$ lässt sich nur dann ziehen, wenn von den beiden Werthen von z, die durch Einsetzung solcher Werthe von x erscheinen, welche benachbarte Wurzeln von $\frac{dz}{dx} = 0$ sind, der eine positiv, der andere negativ ist[2]). Von diesen grundlegenden Sätzen, welche mit solchen, über welche im 105. und 106. Kapitel berichtet wurde, mannigfache Aehnlichkeit besitzen, werden dann zahlreiche Anwendungen auf bestimmte Gleichungen gemacht, namentlich auf solche des 2ten, 3ten und 4ten Grades und dann auch auf trinome Gleichungen[3]). Das 12. Kapitel lehrt mittelbar auch die Anzahl der imaginären Gleichungswurzeln erkennen, welche die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades zu n ergänzen muss.

Das 13. Kapitel, Von den Kennzeichen der imaginären Wurzeln, sucht deren Anzahl unmittelbar. Es kann genügen zu wiederholen, was Euler selbst ausspricht[4]), dass es sich um die Wiedergabe der Regeln handelt, welche Newton aufstellte, Campbell ergänzte.

Das 14. Kapitel, Von den Differentialen für besondere Fälle, erörtert Dinge, welche seitdem, wenigstens in der von Euler gewählten Form, der Differentialrechnung nicht mehr angehören.

---

[1]) Euler, Differentialrechnung III, 91—92, § 298. [2]) Ebenda III, 92—93, § 299. [3]) Ebenda III, 114—117, § 310. [4]) Ebenda III, 134, § 326.

Wenn unter Annahme eines bestimmten Werthes von x das Differential dy einer Function zu verschwinden scheint, so kann es, meint Euler, darum doch als Unendlichkleines höherer Ordnung vorhanden sein. Nach Taylor's Satze ist $y + dy$ oder der Werth, den y annimmt, wenn x in $x + dx$ übergeht, durch die Reihe gegeben: $y + dx \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dx^2}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^3}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \cdots = y + dy + \frac{1}{2} d^2y + \frac{1}{6} d^3y + \cdots$ und $dy = dy + \frac{1}{2} d^2y + \frac{1}{6} d^3y + \cdots$. Für gewöhnlich lässt man die rechts vom Gleichheitszeichen hinter dy nachfolgenden Glieder einfach weg, weil sie als unendlichklein höherer Ordnung gegen dy verschwinden. Ist aber bei irgend einem bestimmten Werthe von x das $dy = 0$, so ist das wahre Differential von y, d. h. also der unendlichkleine Zuwachs, den y erhält, während x um das unendlichkleine dx gewachsen ist, thatsächlich durch $\frac{1}{2} d^2y$ dargestellt. Der Nutzen dieser Auffassung, von der wir nur nicht sehen können, wie sie mit dem Grundgedanken der Euler'schen Differentialrechnung, die Differentiale seien wirkliche Nullen und nicht Unendlichkleines, in Einklang zu bringen ist, trete, sagt Euler unter Anführung von Fällen, die sich auf transcendente Functionen beziehen, in der Lehre von den Curven oft hervor[1]. Er denkt dabei an die Untersuchung von Singularitäten einer gewissen Gattung. Die Curve $y = x^2 - \frac{1}{\log x}$ beginnt beispielsweise im Coordinatenanfangspunkte. Sie setzt sich von ihm aus steigend nach der positiven Abscissenrichtung fort, ohne dass man von einem im Coordinatenanfangspunkte vorhandenen Minimum reden könnte. Ein gewöhnliches Minimum finde dort nicht statt, weil y keinen nächstvorhergehenden, einem negativen x entsprechenden Werth besitze, und ein Minimum zweiter Art (S. 744) sei dort auch nicht vorhanden, weil die Curve sich vom Coordinatenanfangspunkte aus nur in einem Zweige und nicht in deren zwei fortsetze.

Das 15. Kapitel, Von den Werthen der Functionen, die in gewissen Fällen unbestimmt zu sein scheinen, gestattet Euler eine zweite Anwendung des im 14. Kapitel Erörterten zu machen. Wenn $\frac{P}{Q}$ ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner bei $x = a$ gleichzeitig verschwinden, so setze man statt x zunächst $x + dx$, was eigentlich wegen $dx = 0$ keine Veränderung ist[2]. Die Substitution verwandelt $\frac{P}{Q}$ in $\frac{P + dP}{Q + dQ}$, und dieses geht bei $x = a$ in $\frac{dP}{dQ}$ über. Man muss

[1]) Euler, Differentialrechnung III, 166, § 353, 1. Beispiel. [2]) Ebenda III, 175, § 357.

aber hier die wahren Differentiale von P und Q wählen, weil nur dann, d. h. wenn man weiss von welcher Kleinheitsordnung dP und dQ ist, der Werth von $\frac{dP}{dQ}$ richtig ermessen werden kann. Nach mannigfaltigen Beispielen, bei welchen auch wohl wiederholte Differentiation des Zählers und des Nenners nöthig fällt, geht Euler zu den Formen $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ über[1]), deren Auswerthung er, so viel uns bekannt ist, zuerst lehrte.

Auch im 16. Kapitel, Von der Differentiation der inexplicablen Functionen, und im 17. Kapitel, Von der Interpolation der Reihen, spielen die sogenannten wahren Differentiale eine Rolle. Inexplicabel heisst für Euler eine Function wie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$, die zwar von x abhängt, aber auf keine Weise entwickelt werden kann, wenn x keine positive ganze Zahl bedeutet. Um sie zu differentiiren muss gleichwohl ein auf das x^{te} Glied X (in dem erwähnten Sonderfalle $\frac{1}{x}$) folgendes Glied Z ermittelt werden, welches mit dem Stellenzeiger $x + dx$ versehen ist, und welches sich als $Z = dS$ zu erkennen giebt, wenn $S = A + B + C + \cdots + X$ die inexplicable Function und $S + dS = A + B + C + \cdots + X + Z$ ihr nächster Werth ist. Die in der Ueberschrift des 17. Kapitels genannte Interpolation nimmt gleichfalls eine aus x Gliedern bestehende Reihe $S = A + B + C + \cdots + X$ an und sucht deren Glied mit dem Stellenzeiger $x + \omega$, wo ω ein echter Bruch ist.

Das 18. Kapitel, Von dem Gebrauche der Differentialrechnung bei Auflösung der Brüche, endlich lehrt die Zerlegung in Partialbrüche ausgehend von der einfachsten Aufgabe: den Partialbruch $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$ der Zerlegung von $\frac{P}{Q}$ zu finden, wenn $Q = (f + gx)S$ und S den Factor $f + gx$ nicht mehr enthält. Sei $\frac{P}{Q} = \frac{\mathfrak{A}}{f + gx} + \frac{V}{S}$, so folgt $V = \frac{P - \mathfrak{A}S}{f + gx}$, und da V eine ganze Function sein muss, so ist nothwendigerweise $P - \mathfrak{A}S$ durch $f + gx$ theilbar, d. h. $f + gx = 0$ oder $x = -\frac{f}{g}$ macht $P - \mathfrak{A}S = 0$. Daraus folgt aber, dass $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$, wenn in diesen Bruch $x = -\frac{f}{g}$ eingesetzt wird. Zuverlässig ist $\frac{P}{S} = \frac{P(f + gx)}{S(f + gx)} = \frac{P(f + gx)}{Q}$, eine Form, welche mittels $x = -\frac{f}{g}$ zu $\frac{0}{0}$ wird und nach Kapitel 15 ihre

---

[1]) Euler, Differentialrechnung III, 192—195, § 362—364.

Auswerthung findet. Der wahre Werth ist daher $\frac{(f+gx)dP+gPdx}{dQ}$, wenn darin $x=-\frac{f}{g}$ gesetzt wird, oder noch einfacher $\mathfrak{A}=\frac{gPdx}{dQ}$ nach Einsetzung von $x=-\frac{f}{g}$.

114. Kapitel.

Analytische Geometrie bis 1740. Clairaut. Braikenridge. De Gua.

Was dem Leser unseres Berichtes über Euler's Differentialrechnung aufgefallen sein muss, ist, dass bei aller Aehnlichkeit des Inhaltes mit demjenigen späterer Differentialrechnungen zwar auf geometrische Anwendungen hie und da hingewiesen ist, diese selbst aber, wie z. B. Berührungen, Krümmungen, Abwicklungen u. s. w. nie näher erörtert werden. Lag es in Euler's Absicht ein besonderes Werk, etwa unter dem Titel: Anwendungen der Differentialrechnung auf Geometrie, zu schreiben? Es will fast so scheinen, wir werden auch im nächsten Kapitel eine Art von Bestätigung dieser Vermuthung finden, aber bestimmte Angaben fehlen. Nicht als ob zu den Anwendungen, welche schon bei De L'Hospital vorkamen, nicht inzwischen Neues hinzugetreten wäre. Euler und vor und nach ihm zahlreiche andere Schriftsteller haben früher, haben auch in der Zeit von 1727—1758 die Lehre von den Curven und Oberflächen bald ohne bald mit Benutzung von Infinitesimalbetrachtungen mächtig gefördert, wie wir jetzt in einigen Kapiteln zu zeigen haben.

Guido Grandi veröffentlichte schon 1723 in den P. T. eine Abhandlung *Florum geometricorum manipulus*[1]), eine Handvoll geometrischer Blumen, welche schon im 99. Kapitel hätte Erwähnung finden sollen. Welche ebene Curven unter diesen Blumen gemeint sind, hat Grandi dann 1728 noch ausführlicher erörtert unter Erweiterung seiner Constructionen auf den Raum. Er gab nämlich 1728 in Florenz eine besondere Schrift[2]): *Flores geometrici ex Rhodonearum et Cleliarum curvarum descriptione resultantes* zum Drucke, gewidmet der Gräfin Clelia Borromei, weil sie im Stande sei, den Geruch dieser geometrischen Blumen zu empfinden und zu schätzen. Die Rhodoneen sind innerhalb eines Kreises gezeichnete, aus vielen Blättern bestehende und dadurch an eine Rose erinnernde ebene Curven, die Clelien sind ähnlich gestaltete Curven auf einer Kugel-

[1]) P. T. XXXII, 355—371, Nr. 378 *for the months of July and August 1723.*
[2]) Klügel IV, 296.

oberfläche. Ein einzelnes Blatt einer Rhodonea entsteht so: In einem gegebenen Kreise (Fig. 112) wird der Halbmesser $CD = r$ unter dem Winkel ϑ mit dem der Lage nach gegebenen Halbmesser CA gezogen. CG soll dann mit CA einen Winkel bilden, zu welchem ϑ in dem gegebenen Verhältnisse $a:b$ steht, d. h. $\angle GCA = \frac{b\vartheta}{a}$. Dann ist $GH = r \cdot \sin \frac{b\vartheta}{a}$ und nimmt man auf CD ein Stück $CJ = GH = \varrho$ ab, so soll J ein Punkt der Rhodonea sein, deren von Grandi nicht hergestellte Gleichung in Polarcoordinaten $\varrho = r \cdot \sin \frac{b\vartheta}{a}$ lautet. Später hat dann Grandi 1737 in Neapel noch eine *Sectionum conicarum Synopsis*[1]), eine Uebersicht über die Kegelschnitte herausgegeben.

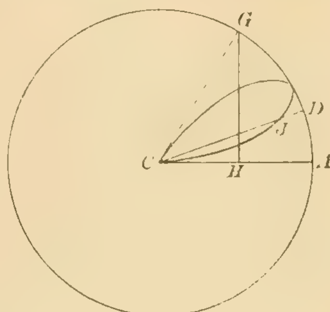


Fig. 112.

Pierre Louis Moreau de Maupertuis[2]) (1698—1759) hat 1729 in der Zwischenzeit, während welcher er, nach Austritt aus der französischen Armee und vor seiner Aufnahme in die Pariser Akademie, als Privatmann in Paris lebte, einen Aufsatz: *Sur quelques affections des courbes*[3]) veröffentlicht. *Affection*, Beschaffenheit oder anhaftende Eigenschaft, nannten die französischen Geometer der damaligen Zeit das, was man später mit dem Namen Singularitäten der Curven belegt hat. Maupertuis erinnert daran, dass man seit langer Zeit Inflexionspunkte und Rückkehrpunkte kenne. Nun sei

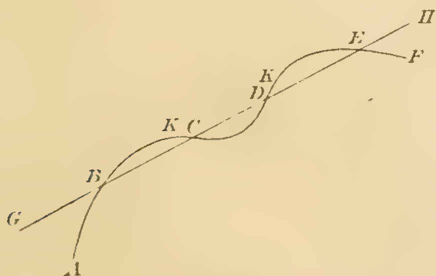


Fig. 113.

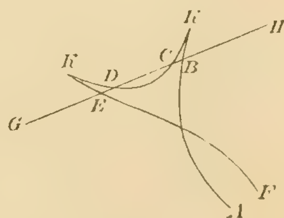


Fig. 114.

aber augenscheinlich auch eine Aufeinanderfolge zweier Inflexionspunkte K (Fig. 113) oder zweier Rückkehrpunkte K (Fig. 114) oder

---

[1]) Poggendorff I, 940. [2]) Ebenda II, 84—85. [3]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1729, pag. 277—282. Vergl. in demselben Bande den Abschnitt *Histoire* pag. 44—50.

eines Rückkehrpunktes K und eines Inflexionspunktes K (Fig. 115) möglich, in deren Nähe eine Gerade GH die Curve AF in vier Punkten schneide, woraus folge, dass die Curve mindestens vom vierten Grade sein müsse. Die vier Durchschnittspunkte können durch besondere Gestaltung der Curve näher und näher bei einander liegen, in der äussersten denkbaren Nähe zusammenfallen. Das Auge merkt dann nichts davon, dass in diesen Grenzfällen die Berührende GH vier beieinanderliegende Punkte mit der Curve gemein hat. Den Punkt $BCDE$ nennt Maupertuis in den drei genannten Unterfällen einen *point de serpentement* (Schlängelungspunkt), *point de double pointe* (Doppelspitze), *point de rebroussement de la seconde sorte* (Schnabel). Die analytische Bedingung besteht darin, dass $\frac{d^3y}{dx^3}$ in einem solchen Punkte 0 oder ∞ werden muss. Irgend ein bestimmtes Beispiel giebt Maupertuis nicht an.

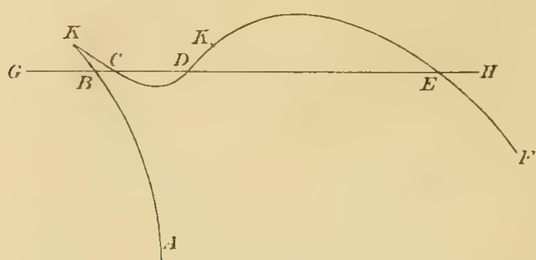


Fig. 115.

In demselben Bande der Pariser Abhandlungen, von welchem wir reden, befindet sich auch ein Aufsatz von François Nicole: *Traité des lignes du troisième ordre*[1]). Nicole beruft sich gleich am Anfange desselben auf die Vorarbeiten von Newton (S. 404—409), von Stirling (S. 413—418), von Maclaurin (S. 419—427), von denen er Gebrauch zu machen nicht unterlassen habe. Dem ist in der That so, und zwar in einem solchen Umfange, dass wir, da Neues, wenn überhaupt, nur in unerheblicher Menge vorkommt, uns weiterer Berichterstattung entheben dürfen. Am Schlusse verspricht Nicole eine Fortsetzung in einer weiteren Abhandlung. Vielleicht hat man zwei Aufsätze[2]) von 1731 als Theile dieser Fortsetzung zu betrachten.

Der erste derselben, *Sur les sections coniques*, betrachtet die Kegelschnitte als solche, d. h. Nicole denkt sich zwei mit der Spitze zusammentreffende grade Gegenkegel von kreisförmiger Basis und deren beide in einer und derselben Ebene befindlichen Axendreiecke. Senkrecht zu dieser Ebene lässt er eine zweite Ebene durch einen

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1729, pag. 194—224. Vergl. in demselben Bande den Abschnitt *Histoire* pag. 37—44. [2]) Ebenda. Année 1731, pag. 130—143 und pag. 494—510.

Punkt A der Seite des Axendreiecks gehen, und diese Ebene bringt auf der Kegeloberfläche einen Schnitt hervor, welcher andere und andere Eigenschaften zeigt, wenn die schneidende Ebene immer senkrecht zum Axendreiecke bleibend um A in Drehung versetzt wird. Das ist die älteste schon von den griechischen Geometern benutzte Entstehung der Kegelschnitte, und Nicole weicht von diesen seinen um zwei Jahrtausende älteren Vorgängern nur darin ab, dass er bewusstermassen Coordinaten benutzt und mit diesen rechnet, bis er zur Gleichung der Curve gelangt, was nach unserer Ueberzeugung den Griechen fern lag, wenn auch selbstverständlich die Ergebnisse nicht von einander abweichen können.

Der zweite Aufsatz heisst: *Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les lignes du troisième ordre.* Eine der von Newton sogenannten divergirenden Parabeln dritter Ordnung schneide (Fig. 116) die Abscissenaxe EOP in den drei Punkten I, II, III. Um das Abscissenstück $II\ III$ als Durchmesser stellt die Curve ein Oval vor, von dem Punkte I aus geht sie oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe in zwei symmetrischen Aesten ins Unendliche. Ist $MP = y$ eine Ordinate, O der Coordinatenanfangspunkt, E ein auf der Abscissenaxe gegebener fester Punkt, so ist die kennzeichnende Eigenschaft der Curve in der Gleichung $OE \cdot PM^2 = PI \cdot PII \cdot PIII$ enthalten. In O wird senkrecht zur Ebene der Curve eine Gerade OC errichtet, von deren Punkte C aus Gerade nach allen Curvenpunkten gehen, welche also eine Kegelfläche bilden, und nun untersucht Nicole die auf diesem Kegel durch ebene Schnitte hervorzubringenden Curven. Es sind Schnitte eines Kegels von anderer Ordnung als die im ersten Aufsatze behandelten, aber immerhin Schnitte eines Kegels, und damit ist der von Nicole selbst betonte Zusammenhang der beiden Aufsätze hergestellt. Nicole's Zweck ist es, die von Newton in seiner Enumeratio behauptete, aber weder von ihm noch von Stirling oder Maclaurin bewiesene Erzeugung aller Curven dritter Ordnung als Centralprojectionen (Schatten) der fünf divergirenden Parabeln gleicher Ordnung sicher zu stellen. Er erfüllt seine Absicht mittels analytischer Rechnung für die aus der gegebenen Parabel herzuleitenden Curven. Die Untersuchung der von den vier anderen divergirenden Parabeln abhängigen Curven stellt Nicole wiederum als Gegenstand eines späteren Aufsatzes in Aussicht. Ein solcher ist aber niemals erschienen.

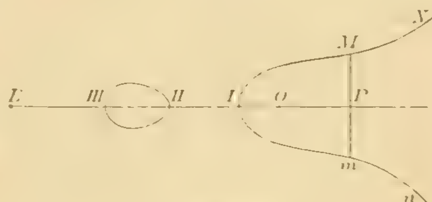


Fig. 116.

Der nächste von uns zu erwähnende Schriftsteller ist der Abbé Christophle Bernard de Bragelongne[1]) (1688—1744), der in seinem 17. Jahre sich der Freundschaft Mallebranche's erfreute, in dessen Nähe er der Erholung bestimmte Stunden und Tage zubrachte. Schon 1708 veröffentlichte Bragelongne in dem Journal des Sçavans einen Artikel über Newton's Zeichnung der Curven 3ten und 4ten Grades mit Doppelpunkten. Der Akademie legte er dann 1711 eine erste Abhandlung über Quadraturen vor. Eine kirchliche Stellung in Brioude (Haute-Loire) nöthigte ihn zur Entfernung von Paris, während seine Ernennung zum Associé libre es ihm seit 1728 ermöglichte, die Beziehungen zur Pariser Akademie von Brioude aus aufrecht zu erhalten. Von dort schickte er 1730 den Anfang einer grossen Abhandlung[2]) über Curven 4ten Grades ein. Im folgenden Jahre kam die Fortsetzung[3]). Eine weitere Fortsetzung konnte 1732 nicht mehr unter die eigentlichen Abhandlungen aufgenommen werden. Man begnügte sich mit einer sehr abgekürzten Inhaltsangabe[4]) und mit der Zusage, die ganze Untersuchung, welche immer weitere Ausdehnung gewann, werde künftig als besonderer Band im Drucke erscheinen, eine Zusage die freilich niemals erfüllt worden ist. Bragelongne's Verfahren ist durchweg analytisch. Er hat die Vorarbeiten von Newton, von Stirling, von Maclaurin gründlich in sich aufgenommen und erkannt, dass es bei den höheren algebraischen Curven wesentlich darauf ankomme, ihre vielfachen Punkte der Art und der Anzahl nach zu erforschen. Er hat bei dieser Untersuchung eine grössere Mannigfaltigkeit solcher Punkte entdeckt, als jemals vor ihm bemerkt worden war, und hat, was einen besonderen Vorzug seiner Aufsätze bildet, sich nicht mit Aeusserung allgemeiner Gedanken begnügt, sondern überall mit bestimmten Beispielen seine Behauptungen belegt. Eine Eintheilung, beziehungsweise Aufzählung der Curven 4ten Grades, beginnt erst in dem vorerwähnten Auszuge von 1732. Zu den von Bragelongne benutzten Eintheilungsgründen gehört seine Classenzahl, welche so zu verstehen ist: eine Curve n^{ten} Grades, deren Coordinaten x und y heissen, besitzt die allgemeinste Gleichung $a_0 y^n + (a_1 + b_1 x) y^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1} x + \cdots + l_{n-1} x^{n-1}) y + (a_n + b_n x + \cdots + m_n x^n) = 0$, und vermöge des Verschwindens auftretender Coefficienten können Potenzen von y ganz in der Gleichung fehlen. Kommt y^n vor, so ist die Curve von der n^{ten} Classe. Ist y^{n-1} die höchste vorkommende Potenz von y,

---

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1744. *Histoire* pag. 65—70. [2]) Ebenda. Année 1730, pag. 158—216 und pag. 363—434. Vergl. auch *Histoire* pag. 68—87. [3]) Ebenda. Année 1731, pag. 10—49. Vergl. auch *Histoire* pag. 45—53. [4]) Ebenda. Année 1732. *Histoire* pag. 63—70.

so ist die Curve von der $n-1^{\text{ten}}$ Classe. Sie gehört der 1ten Classe an, wenn y nur als y^1 vorkommt. Beispielsweise ist die Parabel $ay - x^2 = 0$ eine Curve 2ten Grades und 1ter Classe, die Ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$ eine Curve 2ten Grades und 2ter Classe. Einen anderen Unterscheidungsgrund bilden für Bragelongne die Asymptoten. Jeder sich ins Unendliche erstreckende Curvenast besitzt nämlich, wie er behauptet, eine gradlinige oder eine krummlinige Asymptote, und auf diese ihre Verschiedenheit lässt sich abermals eine Eintheilung gründen.

Alexis Claude Clairaut[1]) (1713—1765) war das zweite von 21 Kindern eines Mathematikers in Paris und wuchs, wie man sagen darf, als Mathematiker unter Mathematikern auf. Schon im Jahre 1726 reichte er mit $12\frac{1}{2}$ Jahren der Pariser Akademie einen Aufsatz ein, welchem Nicole und Pitot als Berichterstatter das Lob spendeten, er lasse grosse Erwartungen auf den jugendlichen Verfasser setzen. Der Aufsatz wurde 1734 in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie gedruckt[2]). Er beschäftigt sich mit den vier Curven 4ten Grades, deren Gleichungen $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$, $x^2(x^2 + y^2) = a^4$, $x^2(a^2 - y^2) = a^4$, $x^4 = a^2(a^2 - y^2)$ heissen, und welche mit den Hilfsmitteln der Infinitesimalrechnung discutirt werden. Die so rege gemachten Hoffnungen täuschten nicht. Mit kaum 16 Jahren reichte Clairaut der Pariser Akademie eine grosse Abhandlung ein, welche von De Mairan und Nicole geprüft wurde. Ihr Urtheil vom 23. August 1729 ging dahin, es stünden viele merkwürdige und neue Dinge in der Abhandlung, welche in dem Verfasser sowohl Erfindungsgabe, als Kenntnisse in der Differential- und Integralrechnung verrathen. Weit lobender drückte sich am 3. Juni 1730 Josef Privat de Molières[3]) (1677—1742) aus. Ihm, der seit 1721 der Akademie angehörte, und von dessen mathematischen Leistungen eine Methode zur Auffindung der Primzahlen, von der behauptet wird[4]), sie habe in Zeit von 2—3 Stunden sämmtliche Primzahlen unterhalb 25000 ermitteln lassen, am Anfange des 98. Kapitels hätte erwähnt werden müssen, wenn nur die leiseste Andeutung, worin die Methode bestand, vorhanden wäre, wurde die Arbeit Clairaut's zu abermaliger Berichterstattung vom Minister übergeben. Die geschicktesten Mathematiker der Gegenwart und der Vergangenheit, sagte er, würden eine Ehre darein gesetzt haben, Verfasser dieser Schrift zu sein;

---

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1765. *Histoire* pag. 144—159. [2]) *Miscellanea Berolinensia* T. IV, 143—152 (Berlin 1734). [3]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1742. *Histoire* pag. 195—205. [4]) Ebenda. Année 1705. *Histoire* pag. 81.

sie verdiene nicht nur gedruckt zu werden, man müsse sie als ein Wunderwerk der Phantasie und der Fähigkeit anstaunen.

Der Druck erfolgte 1731 unter dem Titel *Recherches sur les courbes à double courbure* in einem Bändchen von 173 Nummern auf 119 Seiten mit 6 Figurentafeln. Clairaut's Name fehlt auf dem Titelblatte, ist dagegen in den auf die Vorrede folgenden Gutachten, welche wir erwähnt haben, genannt. Die Vorrede ist so bemerkenswerth, dass wir uns nicht enthalten können, einige Stellen in Uebersetzung mitzutheilen.

Descartes dürfte der Einzige sein, der solche (d. h. auf gekrümmten Oberflächen beschriebene) Curven ins Auge gefasst zu haben scheint. Was er von ihnen sagt, belehrt uns einfach darüber, dass man, um sie zu prüfen, von jedem ihrer Punkte Senkrechte auf zwei selbst zu einander senkrechte Ebenen zu fällen und ihre Punkte dann auf die Punkte der Curven zu beziehen habe, welche man solcherweise auf den beiden Ebenen gebildet hat. . . . Ich glaubte dergleichen Curven Curven doppelter Krümmung nennen zu sollen, weil sie, in der geschilderten Weise betrachtet, immer so zu sagen an der Krümmung zweier Curven theilnehmen, auch hat man ihnen diesen Namen in einem der Akademie vorgelegten Aufsatze gegeben, wo man sie den Geometern als einen der Untersuchung würdigen Gegenstand vorschlägt[1]) . . . Ich beabsichtige in einiger Zeit eine Schrift über gekrümmte Oberflächen herauszugeben, zu welcher diese als Vorbereitung dienen kann. Ich halte den Gegenstand nicht für minder neu als die Curven doppelter Krümmung, und bekannt dürfte darüber nur die Darstellung gekrümmter Oberflächen mittels einer Gleichung zwischen drei Veränderlichen sein, von der ich erfahre, dass sie gelegentlich in einer Abhandlung des berühmten Herrn Bernoulli in den Leipziger Acten erwähnt sei . . . . Was die Curven doppelter Krümmung betrifft, deren Coordinaten von einem Punkte ausgehen[2]), oder deren Coordinaten krumme Linien sind, so verlangen diese eine besondere Methode und können den Gegenstand einer anderen Schrift bilden, welche ich mir zu veröffentlichen Rechnung mache.

Aus diesen Worten geht hervor, dass Clairaut kannte, was Descartes (Bd. II, S. 743), was Pitot (S. 428) über Raumgeometrie geäussert hatten, dass seine Gewährsmänner dem Aufsatze Johann Bernoulli's in den A. E. von 1698 (S. 233 und 235) die Bedeutung

---

[1]) *c'est même le nom qu'on leur donne dans un mémoire de l'Académie Roiale des Sciences où on les propose comme un objet digne des recherches des Géomètres.* [2]) *dont les coordonnées partent d'un point.*

beilegten, als zeuge er schon von einer Benutzung dreier Raumcoordinaten bei Oberflächen, dass er nicht kannte, was Parent (S. 401) in dieser Beziehung geleistet hatte. Für die Wahl der Benennung der Curven doppelter Krümmung giebt Clairaut einen ganz anderen Grund an als den, der nach unserer Ansicht wenigstens (S. 428), Pitot zu demselben Namen führte. Sollte Clairaut die Meinung Pitot's richtiger als wir erkannt und wiedergegeben haben? Wir glauben es kaum, denn wenn Pitot die Curve doppelter Krümmung eine solche nennt, welche man sich auf der krummen Oberfläche eines Körpers gezeichnet denkt, so ist doch bei ihm in keiner Weise von Projectionen der Curve die Rede, und ebenso wenig behauptet Clairaut, in Pitot's Sinne den Namen gewählt zu haben. Wir verstehen Clairaut's Aeusserungen vielmehr nur so, dass sie zwei von einander unabhängige Dinge aussprechen: erstens er nenne die Curven doppelter Krümmung so, weil sie zwei Curven als Projectionen haben, zweitens komme der Name schon früher einmal vor. Was Clairaut von einem Punkte ausgehende Coordinaten nennt, dürften Raumpolarcoordinaten sein. Die in Aussicht genommenen besonderen Arbeiten über dieses Coordinatensystem und über Oberflächen sind nicht erschienen.

Der 1. Abschnitt, Ueber die Art Curven doppelter Krümmung zu betrachten[1], ist für sich schon eine Zusammenstellung wichtiger raumgeometrischer Lehren. Wird aus drei zu einander senkrechten Geraden ein Coordinateneck gebildet, dessen drei Ebenen die der x und y, der x und z, der y und z heissen[2], und projicirt man eine Raumcurve auf diese drei Ebenen, so entstehen Curven, denen Gleichungen zwischen x und y, zwischen x und z, zwischen y und z angehören. Zwei dieser Gleichungen genügen zur Bildung der dritten und zur Bestimmung der Raumcurve[3]. Auch anders gebildete Gleichungen können diesen letzteren Erfolg haben, aber immer müssen es zwei Gleichungen sein, die möglicherweise aus den Gleichungen zweier Projectionscurven durch Vereinigung hergeleitet sind. Eine einzelne Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z gehört einer Oberfläche an[4]. Die Gleichung ersten Grades zwischen x, y, z ist die einer Ebene[5]. Lassen also die Gleichungen der Projectionscurven eine solche Vereinigung zu, dass eine Gleichung ersten Grades entsteht, so ist die Curve nicht doppelter Krümmung, sondern liegt in einer Ebene[6]. Zwei Gleichungen zwischen x, y, z lassen die Raumcurve

---

[1]) Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure* pag. 1—39. *Première Section. De la manière de considérer les courbes à double courbure.* Nr. 1—67. [2]) Ebenda pag. 20, Nr. 42. [3]) Ebenda pag. 2—3, Nr. 4. [4]) Ebenda pag. 5, Nr. 8. [5]) Ebenda pag. 6, Nr. 10 und pag. 38, Nr. 66. [6]) Ebenda pag. 6—7, Nr. 12.

als Durchschnitt zweier Oberflächen erscheinen[1]. Clairaut zeigt nun, welche Gleichungen den bekanntesten Oberflächen angehören[2]. Er findet bei der Kegelfläche[3], dass unter Annahme der Kegelspitze als Coordinatenanfangspunkt die Gleichung aus lauter homogenen Gliedern nach x, y, z mit Zahlencoefficienten vervielfacht besteht, oder, um Clairaut's Worte zu gebrauchen, dass die Gleichung alsdann keinen Parameter enthält, d. h. ausser der Längeneinheit keine Strecke, deren Kenntniss in der Gleichung als nothwendig vorausgesetzt ist. Clairaut entwickelt die Gleichung der Kugel, des Kegels mit kreisförmiger Basis, des Paraboloids, anderer Rotationsflächen, allgemeiner Kegelflächen. Er stellt diese Gleichungen in homogener Gestalt her, indem er z. B. $(y^2 + z^2)^3 = x^2$ durch $(y^2 + z^2)^3 = a^4 x^2$ ersetzt, wobei a statt der Einheit eintritt[4]. Dann wird der allgemeine Lauf einiger durch ihre zwei Gleichungen gegebenen Raumcurven besprochen[5] und zum Schlusse darauf aufmerksam gemacht, wie man von der Gestalt einer Oberfläche eine Vorstellung gewinne, indem man untersuche, was aus der Oberflächengleichung werde, wenn man jede einzelne Coordinate für sich bald zu Null, bald unendlichgross werden lasse[6].

Der 2. Abschnitt ist der Von der Anwendung der Differentialrechnung bei Curven doppelter Krümmung mit Rücksicht auf ihre Berührungslinien und Normallinien[7]. Ist N ein Punkt der Curve doppelter Krümmung, n ein zweiter unendlich nahe bei N gelegener Punkt derselben, sind M und m die Projectionen dieser Punkte in der Ebene der x und der y, so ist Nn ein Theil der Berührungslinie an die Curve doppelter Krümmung, Mm ein Theil der Berührungslinie an die Projectionscurve. Da nun Nn und Mm der Ebene $NMmn$ angehören, so werden die verlängerten Nn und Mm sich in t in der Ebene der x und der y schneiden, und das rechtwinklige Dreieck NMt nebst einem ihm ähnlichen unendlich kleinen Dreiecke, dessen Hypotenuse Nn ist, und dessen Katheten dz und $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ sind, lassen $Mt = \frac{z}{dz}\sqrt{dx^2 + dy^2}$ und $Nt = \frac{z}{dz}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ finden[8]. Die Subtangente Mt lässt auch die Schreibweise $Mt = \sqrt{\left(z\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(z\frac{dy}{dz}\right)^2}$ zu, d. h. sie ist so gross wie

[1] Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure* pag. 7, Nr. 13. [2] Ebenda pag. 8—19, Nr. 15—41. [3] Ebenda pag. 14, Nr. 30. [4] Ebenda pag. 11, Nr. 22: *en mettant a pour l'unité*. [5] Ebenda pag. 28—34, Nr. 56—65. [6] Ebenda pag. 35—39, Nr. 66—67. [7] Ebenda pag. 40—60. *Seconde Section. Usage du calcul différentiel dans les courbes à double courbure par rapport à leurs tangentes et à leurs perpendiculaires.* Nr. 68—92. [8] Ebenda pag. 40—41, Nr. 68—69.

die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Subtangenten der Projectionscurven in der xz- und der yz-Ebene in den Projectionspunkten von N sind[1]). Neben der Subtangente ist auch die Subnormale hergeleitet. Nach zahlreichen Beispielen von Tangenten an bestimmte Curven doppelter Krümmung ist der Satz ausgesprochen, dass die Tangenten an zwei auf einer Oberfläche in einem Punkte durch zu zwei Coordinatenaxen senkrechte Ebenen herausgeschnittene Curven die Tangentialebene an die Oberfläche in eben jenem Punkte bestimmen[2]). Was Clairaut als Beweis des Satzes anführt, ist allerdings recht dürftig. Die Oberfläche wird, sagt er, durch die genannten Ebenen in den Curven NQ, NP geschnitten. Auf jeder der beiden Curven ist ein Punkt n unendlich nahe bei N vorhanden, und es ist klar, dass die Tangentialebene an die Oberfläche in N diejenige sein muss, welche das Dreieckchen Nnn enthält[3]). Der Satz wird etwas später erweitert[4]), indem von der Tangente einer Curve, die als Durchschnitt irgend zweier krummen Oberflächen gedacht ist, behauptet wird, sie müsse der Tangentialebene jeder der beiden Oberflächen in dem Punkte, in welchem die Berührungslinie an die Curve gesucht wird, angehören. Andere Aufgaben verlangen die Orte der Durchschnittspunkte aller Tangenten[5]) und aller Normalen[6]) an eine Curve doppelter Krümmung mit einer Coordinatenebene zu finden.

Der 3. Abschnitt ist der Anwendung der Integralrechnung auf Curven doppelter Krümmung, deren Rectification, der Ausmessung der durch sie bestimmten Räume u. s. w.[7]) gewidmet. Die Rectification wird durch $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ geleistet[8]). Die zweite Aufgabe verlangt die Complanation einer Oberfläche besonderer Art. Ist nämlich in der yz-Ebene eine Curve gegeben, auf welcher als Basis ein gerader Cylinder errichtet ist, ist auf diesem Cylinder eine Curve doppelter Krümmung gezeichnet, und wird der Flächenraum des gemischtlinigen Dreiecks aus Abscissenaxe, Curve doppelter Krümmung und obere Leitcurve der Cylinderfläche gesucht, so findet Clairaut für denselben den Ausdruck[9]) $\int dx\int\sqrt{dy^2+dz^2}$. Zieht man dieses Dreieck von der ganzen graden Cylinderfläche ab,

---

[1]) Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure* pag. 43, Nr. 74. [2]) Ebenda pag. 49, Nr. 81. [3]) *il est clair que le plan tangent de la surface au point N est celui qui passe par ce petit triangle.* [4]) Ebenda pag. 52, Nr. 84. [5]) Ebenda pag. 53, Nr. 85. [6]) Ebenda pag. 57, Nr. 90. [7]) Ebenda pag. 61—96. *Troisième Section. Usage du calcul intégral dans les courbes à double courbure, par rapport à leurs rectifications, à la quadrature des espaces, qu'elles déterminent etc.* Nr. 93—136. [8]) Ebenda pag. 61—62, Nr. 93. [9]) Ebenda pag. 65—66, Nr. 98.

so bleibt ein zweites gemischtliniges Dreieck, dessen Fläche unmittelbar durch die Formel $\int x\sqrt{dy^2+dz^2}$ dargestellt ist[1]), während die Cylinderfläche sich als $x\int\sqrt{dy^2+dz^2}$ ermittelt und durch die Gleichung $x\int\sqrt{dy^2+dz^2}-\int x\sqrt{dy^2+dz^2}=\int dx\int\sqrt{dy^2+dz^2}$ eine Prüfung der Ergebnisse gestattet. Eine weitere Aufgabe ist die folgende[2]). Die Curve doppelter Krümmung befindet sich wieder auf einer zur yz-Ebene senkrechten Cylinderfläche. Wird nun die Cylinderfläche auf die xz-Ebene abgerollt, so wird dabei die Curve doppelter Krümmung in eine ebene Curve verwandelt, und diese wird gesucht. Endlich werden auch Cubaturen aufgesucht[3]), welche aber ebensowenig wie die Complanationen in allgemeinster Weise aufgefasst sind, sondern mindestens theilweise zu einer Coordinatenebene senkrechte Cylinderflächen voraussetzen. Wir haben kaum nothwendig zu sagen, dass auch im 3. Abschnitte jedem Satze Anwendungen auf bestimmte Curven zugesellt sind.

Das Gleiche gilt für die Sätze des 4. und letzten Abschnittes, Ueber einige allgemeine grundlegende Betrachtungen bei Bildung von Curven doppelter Krümmung und Erforschung ihrer Natur[4]). Die Curve, deren Gleichungen ermittelt werden, ist bald durch einen Zirkel mit gegebener Weite auf einer gegebenen Oberfläche beschrieben, indem die eine Zirkelspitze in einem ebenfalls gegebenen Punkte der Oberfläche haftet, bald ist sie der geometrische Ort der Endpunkte gleicher Strecken, welche auf den Erzeugungsgeraden einer beliebigen Kegelfläche mit doppelt gekrümmter Leitcurve von jener Leitcurve aus von der Kegelspitze sich entfernend abgemessen werden u. s. w.

Die Leser unseres Auszuges werden wohl gleich uns in das entzückte Lob einstimmen, welches in dem Urtheile von Molières (S. 753) sich kund gab, und welches bald durch eine Thatsache bekräftigt wurde, welche vereinzelt dastehen dürfte. Nach den Satzungen der Pariser Akademie war die Aufnahme in dieselbe nicht vor dem Abschlusse des zwanzigsten Lebensjahres möglich, Clairaut hätte also erst im Mai 1733 auf diese Ehre Anspruch erheben dürfen. Die Akademiker richteten an den König die Bitte, bei Clairaut eine Ausnahme von der Regel zu gestatten, und nach Genehmigung dieses Antrages wählte man den erst Achtzehnjährigen am 14. Juli 1731.

---

[1]) Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure* pag. 69—70, Nr. 101—103. [2]) Ebenda pag. 74, Nr. 108. [3]) Ebenda pag. 78—79, Nr. 115; pag. 83—84, Nr. 121; pag. 88—89, Nr. 128—129; pag. 90—91, Nr. 131. [4]) Ebenda pag. 97—119. *Quatrième Section. Quelques principes généraux pour former des courbes à double courbure et pour en trouver la nature*, Nr. 137—173.

Der Band der Veröffentlichungen der Pariser Akademie für das Jahr 1731 enthält zwei Aufsätze Clairaut's[1]). Der erste leitet den Schwerpunkt eines ebenen Raumgebildes (sei es einer Fläche oder eines Curvenbogens) ab, indem das Raumgebilde um ein Differential vergrössert, der Schwerpunkt um ein Differential verschoben wird und alsdann der Satz in Anwendung kommt, dass der Schwerpunkt der Vereinigung zweier Gebilde auf der Verbindungsgeraden der Schwerpunkte der einzelnen Gebilde liegt, von jedem derselben im umgekehrten Verhältnisse des Gewichtes des betreffenden Gebildes entfernt. Der zweite Aufsatz will die Curve kennen lehren, welche auf irgend einer Oberfläche durch eine schneidende Ebene erzeugt wird. Clairaut nimmt an (Fig. 117), A sei Coordinatenanfangspunkt, AP, AQ, AR seien die Axen der x, der y, der z, BV sei der Durchschnitt der xy-Ebene mit der die gegebene Oberfläche in N schneidenden Ebene, welche als eine neue Coordinatenebene gewählt ist. Der Anfangspunkt der neuen Coordinaten ist in B, und $BL = u$, $LN = s$ sind die neuen Coordinaten von N, dessen frühere Coordinaten leicht ersichtlich $AP = x$, $PM = y$, $MN = z$ waren. Damit die Schnittebene VLN bekannt sei, muss gegeben sein $AB = g$, cotg $VBT = \frac{BT}{VT} = \frac{m}{n}$, cotg $NLM = \frac{LM}{NM} = \frac{p}{q}$, wobei wir den auffälligen von Clairaut gebrauchten Ausdruck Oeffnung eines Winkels[2]) für deren Cotangente bemerken. Unter Benutzung der g, m, n, p, q gelingt es, x, y, z durch s und u in Verbindung mit jenen fünf Constanten auszudrücken. Aus cotg $NLM = \frac{p}{q}$ folgt $\frac{1}{\sin NLM} = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{q}$ und $\sin NLM = \frac{z}{s} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$, also $z = \frac{qs}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Aehnlicherweise ist $LM = \frac{ps}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Ferner cotg $VBT = \frac{m}{n}$, $\cos VBT = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} = \frac{BE}{u}$, $BE = \frac{mu}{\sqrt{m^2+n^2}}$, sowie $LE = \frac{nu}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Weiter ist $LC = ET = BT - BE = y - \frac{mu}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $CM = LD = LE + BA + AP = \frac{nu}{\sqrt{m^2+n^2}} + g + x$. Nun steht LC auf VM und ML

Fig. 117.

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1731. pag. 159—162 und pag. 483—492. [2]) Ebenda pag. 484: *l'ouverture de l'angle.*

auf VB senkrecht, d. h. $\Delta VCL \sim LCM$ und $\frac{VC}{VL} = \frac{LC}{LM} = \sin VLC$ $= \sin VBT = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} = \left(y - \frac{mu}{\sqrt{m^2+n^2}}\right) : \frac{ps}{\sqrt{p^2+q^2}}$, also $y = \frac{nps}{\sqrt{m^2+n^2}\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{mu}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Aus derselben Dreiecksähnlichkeit folgt $\frac{CM}{LM} = \frac{CL}{VL} = \cos VLC = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} = \left(\frac{nu}{\sqrt{m^2+n^2}} + g + x\right) : \frac{ps}{\sqrt{p^2+q^2}}$ beziehungsweise $x = \frac{mps}{\sqrt{m^2+n^2}\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{nu}{\sqrt{m^2+n^2}} - g$. Setzt man endlich die Werthe von x, y, z in die Gleichung der gegebenen Oberfläche ein, so entsteht die Gleichung der ebenen Schnittcurve mit den Veränderlichen u, s. Wir brauchen kaum hervorzuheben, dass Clairaut's Verfahren nichts Anderes ist, als eine Coordinatenveränderung, bei welcher die Schnittebene der u, s eine der neuen Coordinatenebenen ist, die man als im Punkte B zu einem Coordinateneck zusammenstossend zu denken hat.

Wir erwähnen aus dem nächstfolgenden Bande der Pariser Veröffentlichungen[1]) zwei nicht sehr bedeutende Aufsätze über diejenige Curve, von welcher (S. 207) unter dem Namen der Tractorie die Rede war. Pierre Bouguer[2]) (1698—1758), am bekanntesten durch seine Theilnahme an der Gradmessungsreise nach Peru von 1735, ist der Verfasser des ersten, Maupertuis der des zweiten Aufsatzes. In beiden ist von früheren Bearbeitungen des Gegenstandes keine Rede, in beiden führt die Curve den Namen der Verfolgungslinie, *courbe de poursuite*, Clairaut[3]) hat dann 1736 die Kraft untersucht, mit welcher der Faden fortbewegt werden muss, damit der an ihm befestigte Körper dem Zuge folge, und ebenderselbe[4]) hat sich 1737 mit der Gestalt der Tractorie unter der Voraussetzung beschäftigt, dass der die Curve beschreibende Punkt in einer anderen Ebene seinen Weg vollzieht als die ist, in welcher der andere Endpunkt des ziehenden Fadens sich längs einer gegebenen Curve bewegt. Auch Euler und Vincenzo Riccati haben, der Erstere 1736 in den Petersburger Abhandlungen[5]), der Zweite 1752 in einer in Bologna gedruckten Abhandlung *De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium commentarius* und 1755 in den Veröffentlichungen der Akademie von Bologna[6]) über die Tractorie geschrieben,

---

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1732, pag. 1—14 und 15—16, sowie *Histoire* pag. 56—60. [2]) Poggendorff I, 254—255. [3]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1736, pag. 1—22. [4]) *Miscellanea Berolinensia* V, 33—35. [5]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 66—85. [6]) *Commentarii Bonon.* T. III.

beziehungsweise über deren Anwendung zur Construction von Differentialgleichungen[1]).

Gleichfalls nur beiläufig gedenken wir eines Aufsatzes von Jacob Hermann über Oberflächengleichungen[2]): *De superficiebus ad aequationes locales revocatis variisque earum affectionibus* aus dem Jahre 1732. Könnte man daraus, dass von Clairaut's 1731 gedruckter grundlegender Schrift mit keinem Worte die Rede ist, die an sich nicht unwahrscheinliche Folgerung ziehen, Hermann habe deren Einfluss nicht empfunden und ganz selbständig gearbeitet, so müsste man ihn mit unter die Schriftsteller zählen, welche zur Verbreitung der Kenntnisse von der analytischen Geometrie des Raumes beitrugen. Hermann giebt die Gleichung der Ebene $az + by + cx - e^2 = 0$ und bestimmt sie genau, indem er die Punkte F, E, H finden lehrt, deren Coordinaten $x = y = 0$, $z = \frac{e^2}{a}$; $y = z = 0$, $x = \frac{e^2}{c}$; $z = x = 0$, $y = \frac{e^2}{b}$ sind, d. h. die Punkte, in welchen die drei Coordinatenaxen durch die Ebene getroffen werden. Er giebt auch die Gleichung verschiedener krummer Oberflächen, von Curven doppelter Krümmung aber nur die kürzesten auf einer gegebenen Oberfläche zwischen zwei gegebenen Punkten zu ziehende Linien.

Das Jahr 1733 brachte eine in London gedruckte Abhandlung: *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum.* Dem Namen des Verfassers William Braikenridge ist die Bezeichnung als *Ecclesiae Anglicanae presbyter* beigefügt, und dieser Titel nebst einigen geringfügigen Angaben in der Vorrede ist Alles, was über die Persönlichkeit bekannt ist. Auch eine Besprechung des Buches in den A. E.[3]) geht nicht über das hinaus, was in der Vorrede gesagt ist, und ebensowenig ein Aufsatz von Braikenridge in den P. T. für 1735 und 1736. Der Vorrede entnehmen wir, dass Braikenridge 1726 in Edinburg war und dort die wesentlichsten Sätze seiner Curvenerzeugung fand. Er theilte sie einem dortigen Geistlichen George Martin mit, dann auch 1747 in London einem der Mathematik sehr kundigen Mann, J. Craig, worunter offenbar John Craig (S. 52) zu verstehen ist, der Schotte und längere Zeit Geistlicher war und 1731 in London starb. Damals (1727) befand sich auch Maclaurin vorübergehend in London, erfuhr aus Craig's Munde die von Braikenridge gefundenen Sätze und sagte diesem selbst, den er gelegentlich sprach, er habe auch Aehnliches gefunden. Maclaurin zeigte dabei Braikenridge eine

[1]) Klügel V, 90—91. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1732 *et* 1733. T. VI, 36—67. [3]) *Nova Acta Eruditorum anno* 1735 *publicata*, pag. 28—30.

gewisse Handschrift[1]), die er ihm allerdings nicht in die Hände gab, und in welche er ihm auch nicht den flüchtigsten Einblick gestattete. Nun wollte Braikenridge — wann? sagt er nicht — nach Schottland zurückkehren, und er gab vor seiner Abreise ein Papier, welches seine Sätze enthielt, an Georg Gordon, der es Desaguliers[2]) (1683—1744), abermals einem Theologen, damals mit der Abhaltung physikalischer Vorlesungen in London beauftragt, und dieser wieder der Royal Society vorlegen sollte. Durch irgend ein Missverständniss ging, wie Braikenridge erfuhr, jenes Papier zu Grunde. Ausserdem meldet die Vorrede, in der ganzen Schrift sei beweislos der Satz als wahr vorausgesetzt, dass eine Curve m^{ten} und eine solche n^{ten} Grades einander in mn Punkten schneiden. Georg Campbell besitze einen Beweis dieses Satzes, auf dessen Veröffentlichung in Bälde zu hoffen sei. Der Satz selbst war (S. 426) in Maclaurin's Geometria organica zuerst ausgesprochen. Der von Braikenridge genannte Georg Campbell ist offenbar derselbe, von welchem (S. 544) ein algebraischer Aufsatz von 1728 herrührt, und dessen Persönlichkeit uns ebensowenig näher bekannt ist, als die seines Freundes Braikenridge.

Braikenridge's Schrift zerfällt in drei Abschnitte. Der I. Abschnitt ist bezeichnet als über die Curven erster Art oder die Linien 2ten Grades

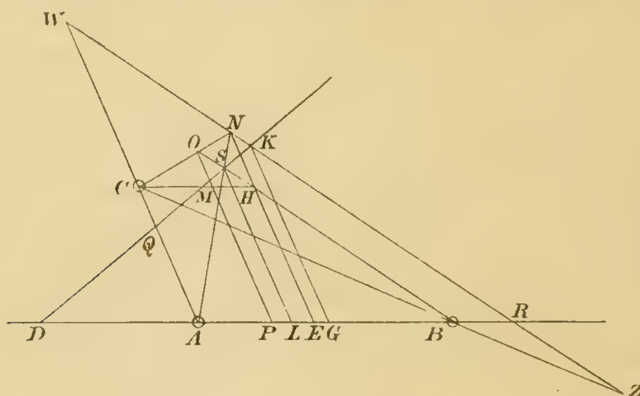


Fig. 118.

und ihre Construction[3]). Dessen erster Satz ist folgender[4]). Seien (Fig. 118) drei Punkte A, B, C in einer Ebene gegeben. Drei Gerade ASN, BSO, CON sind um jene Punkte drehbar und bilden bei ihrer Drehung die Durchschnittspunkte S, N, O. Richtet man die

[1]) *M. S. S. ostendit, quo innuebat inventa sua contineri, sed qua ratione ductus nescio in manus meas non tradidit nec licuit in illud vel leviter inspicere.* [2]) Poggendorff I, 553—554. [3]) Braikenridge pag. 1—23. [4]) Ebenda pag. 1—3.

Drehungen so ein, dass S und N je eine Gerade DSK und RKN durchlaufen, so beschreibt O einen Kegelschnitt. Man sieht leicht den Fortschritt, der in dieser Construction gegen diejenige enthalten ist, welche **Newton** in seiner Enumeratio vorschlug (S. 407), welche **Maclaurin** in seiner Geometria organica bewies (S. 419—421). Jene hatten den immerhin verwickelteren Apparat zweier Winkel, welche in Drehung versetzt waren, während Braikenridge sich mit in Drehung versetzten Geraden begnügte. Braikenridge's Beweisführung ist analytisch und verfolgt den gleichen Weg, welchen Maclaurin bei dem Beweise für die Newton'sche Entstehung der Kegelschnitte eingeschlagen hatte. Es wird gezeigt, dass zwischen den Coordinaten des Punktes O eine quadratische Gleichung stattfinde. Die Figur ist so zu verstehen: Die Punkte A, B, C, die Geraden DSK, RKN sind beliebig gegeben. Die von A, B, C ausgehenden Geraden ASN, BSO, CON gehorchen keiner anderen Bedingung, als dass ihre Durchschnittspunkte S und N auf den vorgenannten Geraden liegen, welche kurzweg die Träger heissen mögen, während Braikenridge keinen Namen für sie besitzt. Die drei Punkte A, B, C dagegen nennt er **Pole**. Durch A, B wird eine Gerade gezogen, welche die Träger in D und R schneidet, desgleichen eine zweite Gerade durch A, C, welche die Träger in Q und W schneidet. Damit ist die Gerade $WNKR$ gegeben nebst ihrem Durchschnittspunkte Z mit der CB. Als eigentliche Hilfslinien sind noch OP, SL, NE, KG sämmtlich $\parallel CA$ und $CMH \parallel AB$ gezogen. Braikenridge bedient sich folgender Abkürzungen: $AB = a$, $AR = b$, $AD = d$, $AC = c$, $AE = u$, $AL = z$, $AP = x$, $OP = y$. Die Dreiecke KGR, DKG sind aus gegebenen unveränderlichen Stücken hergestellt, das Verhältniss ihrer Seiten zu einander ist mithin bekannt und kann durch $\frac{GR}{GK} = \frac{a}{g}$ und $\frac{DG}{GK} = \frac{a}{k}$ dargestellt werden. Nun ist $\Delta KGR \sim NER$ und $\Delta DKG \sim DSL$, also $\frac{GR}{GK} = \frac{ER}{EN} = \frac{AR - AE}{EN}$; $\frac{DG}{GK} = \frac{DL}{LS} = \frac{AD + AL}{LS}$ oder $\frac{a}{g} = \frac{b - u}{EN}$, $\frac{a}{k} = \frac{d + z}{LS}$, beziehungsweise $EN = \frac{bg - gu}{a}$, $LS = \frac{dk + kz}{a}$. Ferner ist $\Delta AEN \sim ALS$, also $\frac{AE}{AL} = \frac{EN}{LS}$ oder $\frac{u}{z} = \frac{bg - gu}{dk + kz}$ und daraus $z = \frac{dku}{bg - gu - ku}$. Andererseits folgt aus $\Delta BPO \sim BLS$, dass $\frac{BP}{BL} = \frac{PO}{LS}$ oder $\frac{a - x}{a - z} = \frac{ay}{dk + kz}$ und $z = \frac{a^2 y + dkx - adk}{ay - kx + ak}$. Die Gleichsetzung der beiden für z gefundenen Ausdrücke liefert $u = \frac{a^2 bgy + bdgkx - abdgk}{(adk + a^2 g + a^2 k) y + dgkx - adgk}$. Daneben ist $\Delta CMO \sim CHN$, also $\frac{CM}{MO} = \frac{CH}{HN}$ oder $\frac{AP}{OP - CA} = \frac{AE}{NE - CA}$ oder $\frac{x}{y - c} =$

$\frac{u}{\frac{bg - gu}{a} - c}$, woraus $u = \frac{(bg - ac)x}{ay + gx - ac}$. Jetzt endlich werden die beiden für u gefundenen Werthe einander gleichgesetzt und liefern nach Wegschaffung der Brüche mittels Multiplication mit beiden Nennern eine in x und y quadratische Gleichung. Als Zusatz ist bewiesen[1], dass die Gleichung sich in den Punkten K, B, R, C, Q erfüllt, dass diese fünf Punkte folglich dem Kegelschnitte angehören, und noch 14 andere Zusätze folgen, die sich meist auf besondere Lagen der Punkte A, B, C und der Träger DSK, RKN beziehen. Zwei Aufgaben schliessen sich dann an. Die erste verlangt einen Kegelschnitt mit Hilfe eines gegebenen Durchmessers, des Winkels, welchen er mit dem ihm conjugirten Durchmesser bilden soll, und des Parameters zu zeichnen. Braikenridge löst sie[2] für die Ellipse, die Hyperbel, die Parabel, indem er in jedem einzelnen Falle die drei Pole und die zwei Träger ermittelt, die zu der im ersten Satze gelehrten Construction verwandt den jedesmal verlangten Kegelschnitt liefern. Die zweite Aufgabe, einen Kegelschnitt durch fünf gegebene Punkte B, C, K, Q, R zu zeichnen, wird in dem gleichen Sinne der Auflösung zugeführt[3]. Werden davon zwei Punkte B, C als Pole gewählt, so findet sich der dritte Pol A als Durchschnittspunkt von BR und CQ, während R und Q, mit dem fünften Punkte K verbunden, die beiden Träger KR, KQ liefern.

Der II. Abschnitt von der Beschreibung von Curven jeden Grades mit Hilfe von Curven niedrigeren Grades[4] benutzt ebenfalls drei Gerade, drei Pole, zwei Träger, wählt aber die letzteren nicht geradlinig. Schneiden die um die Pole A, B, C drehbaren Geraden ASN, BSO, CNO einander in N, S, O und lässt man N eine Gerade, S eine Curve n^{ten} Grades als Träger durchlaufen, so beschreibt O eine Curve $2n^{\text{ten}}$ Grades[5]. Der Beweis ist nach zwei Methoden geführt, deren erste dem oben ausführlich berichteten Beweise des ersten Satzes, die zweite den Beweisen der Geometria organica für die Entstehung von Curven höheren Grades nachgebildet ist, in welchen es sich um Abzählung der Durchschnittspunkte einer Geraden und einer Curve handelt. Wird der eine Träger vom m^{ten}, der andere vom n^{ten} Grade gewählt, so ist $2mn$ der Grad der durch den dritten Durchschnittspunkt der drei drehbaren Geraden erzeugten Curve[6]. Geht unter der Voraussetzung eines geradlinigen Trägers und eines Trägers n^{ten} Grades der letztere durch einen Pol, so entsteht eine Curve

[1] Braikenridge pag. 3. [2] Ebenda pag. 15—21. [3] Ebenda pag. 21—23. [4] Ebenda pag. 24—59. [5] Ebenda pag. 24—26. [6] Ebenda pag. 28—29.

$2n-1^{ten}$ Grades[1]. Ist der eine Träger m^{ten} Grades und geht durch einen Pol, der andere n^{ten} Grades und geht durch einen zweiten Pol, so wird eine Curve $2mn-m-n^{ten}$ Grades erzeugt[2], u. s. w.

Der III. Abschnitt, in welchem Kegelschnitte durch mehrere um Pole drehbare Gerade erzeugt werden[3], gelangt, von Sonderfällen beginnend, zu dem allgemeinen Satze[4], dass, wenn n Gerade sich um ebenso viele Pole drehen, und wenn von ihren $\frac{n(n-1)}{2}$ Durchschnittspunkten, deren $n-1$ auf geradlinigen Trägern bleiben, die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Durchschnittspunkte lauter Kegelschnitte beschreiben.

Wir haben (S. 761) einen Aufsatz Braikenridge's in den P. T. erwähnt. Es ist ein Brief[5]) an den königlichen Leibarzt Benjamin Hoadly[6]) (1706—1757), welcher seit 1727 Mitglied der Royal Society war. Braikenridge wiederholt hier den ersten Satz aus seiner *Exercitatio geometrica* und fügt ihm andere hinzu, ohne sie weitläufig zu beweisen, aber mit Angabe der betreffenden Sätze der genannten Schrift, auf welche der Beweis sich gründe. Es handelt sich um Pole, um welche Gerade in Drehung versetzt sind, um geradlinige Träger einiger Durchschnittspunkte, um Erzeugung von Curven mittels eines beschreibenden Punktes, der mit anderen Durchschnittspunkten der um die Pole gedrehten Geraden in Verbindung steht. Das erste Beispiel, dessen Anführung hier genügen muss, ist folgendes. Seien (Fig. 119) ANS, BOS, CNO, DPO die vier um die Pole A, B, C, D drehbaren Geraden; seien dK und RK zwei geradlinige Träger der Durchschnittspunkte S und N; der dritte Durchschnittspunkt O der um die Pole A, B, C beweglichen Geraden ist mit dem vierten Pole D durch DO verbunden und diese DO schneidet die die NS, d. h. die Verbindungsgerade der auf den beiden Trägern verbleibenden Punkte in P. Dieses P beschreibt alsdann eine Curve dritten Grades.

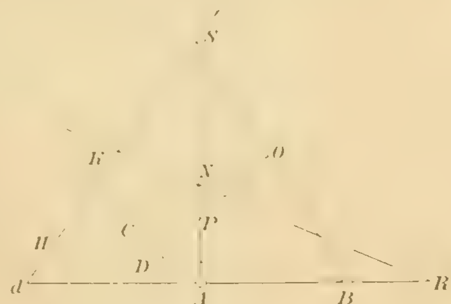


Fig. 119.

Sechs Monate später sah Maclaurin sich veranlasst, eine Erklä-

---

[1] Braikenridge pag. 30—32. [2] Ebenda pag. 41—42. [3] Ebenda pag. 60—70. [4] Ebenda pag. 66. [5]) P. T. XXXIX, 25—36, Nr. 436, Januar, Februar, März 1735. [6]) Poggendorff I, 1115.

rung abzugeben[1]). Er habe, sagt er, schon 1721 an einem Nachtrage zur *Geometria organica* drucken lassen, aber nach Vollendung einiger Bogen sei der Rest nicht fertig geworden und die Schrift nicht zum Verkaufe gelangt. Inzwischen habe Braikenridge, der einige Jahre hindurch in Edinburg Privatunterricht in der Mathematik ertheilte, sich mit Curvenerzeugung beschäftigt und ihm einmal einen Lehrsatz gezeigt, der schon in der Geometria organica vorkam, ein Zusammentreffen, welches Braikenridge nicht bemerkt zu haben scheine, wie denn in der That derartige Methoden sich oft als mit einander übereinstimmend erweisen, ohne dass man es beim ersten Anblick erkennt. Dann habe etwas später 1727 Braikenridge zu ihm von neuen Lehrsätzen gesprochen, und er habe ihm sofort auch diese in seinen Papieren gezeigt. Wir bemerken beiläufig, dass Maclaurin nicht sagt, wo diese spätere Unterredung stattfand. Es war jedenfalls dieselbe, welche Braikenridge's Bericht (S. 761) nach London verlegt. Jetzt, fährt Maclaurin fort, müsse er wenigstens Einiges von dem, was er nach 1719 gefunden, der Oeffentlichkeit übergeben, damit man ihm nicht später den Vorwurf der Aneignung fremden Gutes machen könne. So habe er im November 1722 näheres Augenmerk auf das zwanzigste Lemma im 5. Abschnitte des I. Buches von Newton's Principien geworfen und habe erkannt, dass ihm die Entstehung eines Kegelschnittes mittels dreier um ebenso viele Pole drehbarer Geraden unmittelbar entnommen werden könne, da das Lemma selbst nur einen besonderen Fall dieser Entstehung bilde. Später habe er noch Vieles über Berührungslinien, über Asymptoten, über zwei- und mehrfache Curvenpunkte entdeckt, aber nicht gross beachtet, weil er darin keinen Fortschritt über das in seinem Buche Behandelte hinaus fand. Er habe des Weiteren 1727 in einem Kapitel seiner in Edinburg sehr bekannten Algebra[2]) einen algebraischen Beweis des Falles der Benutzung von drei Polen geliefert, sowie auch die Construction eines Kegelschnittes durch fünf gegebene Punkte mit dem Zusatze, dass bei Anwendung von noch mehr Polen und um dieselben sich drehenden Winkeln oder Geraden immer ein Kegelschnitt entstehe.

Aus der Uebersicht über Maclaurin's Entdeckungen nach 1719 begnügen wir uns ein mit dem Vermerk *Nancy 27. November 1722* versehenes Bruchstück in lateinischer Sprache hervorzuheben[3]). Um

---

[1]) P. T. XXXIX, 143—165, Nr. 439, October, November, December 1735. Bei Poggendorff II, 6 fehlt die Angabe dieses Aufsatzes. [2]) In 1727 *I added to a chapter of my Algebra, which is very publick in this place.* Da die Algebra nicht vor 1748 gedruckt wurde, so kann der Satz nur entweder bedeuten, dass die handschriftliche Algebra von Vielen benutzt wurde, oder eine Berufung auf gehaltene Vorlesungen sein. [3]) P. T. XXX, 163.

die Pole C, B, D (Fig. 120) werden die Geraden Cd, Bm, Dr bewegt und der Durchschnitt der Bm, Dr wird längs der gegebenen Geraden PG, der der Cd, Dr längs der gleichfalls gegebenen Geraden PQ geführt, alsdann beschreibt der Durchschnitt der Cd, Bm einen Kegelschnitt[1].

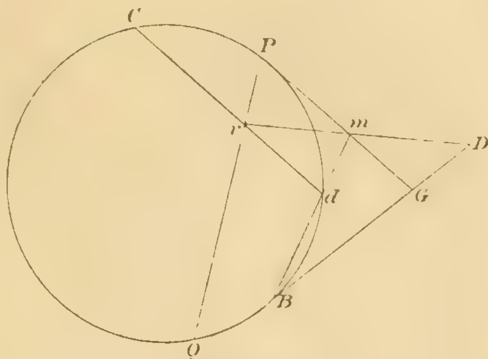


Fig. 120.

Der Streit wurde unseres Wissens nicht weiter geführt. Wir glauben nicht irre zu gehen, wenn wir das allgemeine Urtheil dahin fassen, dass Niemand auch nur den leisesten Verdacht hegte, Maclaurin könne sich eine fremde Entdeckung angeeignet haben. Aber auch für Braikenridge wird man selbständige Arbeit anerkennen müssen, die nur zufällig mit Maclaurin's Ergebnissen zusammentraf, wie dieser Letztere es selbst zugab.

Ein französischer Offizier und Ingenieur Frézier (1682—1773) ist wegen eines 1738—1739 in Strassburg erschienenen zweibändigen Werkes: *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, ou traité de stéréotomie* zu nennen. Eine zweite Auflage folgte in 3 Bänden (Paris 1754, 1768, 1769). Wir haben (Bd. II, S. 619) unter den Händen von Desargues und von Bosse die descriptive Geometrie entstehen sehen, die damals freilich diesen Namen noch nicht führte. Auch Frézier kannte ihn noch nicht, bezeichnet aber in jeder anderen Beziehung einen grossen Fortschritt. Wir selbst haben freilich sein Werk nie gesehen und berichten nach zweiten Quellen[2]. Darnach ist bei Frézier die Theorie von der Praxis getrennt und ersterer nebst den Beweisen der erörterten Dinge der ganze I. Band eingeräumt.

Zur Darstellung, *description*, dient hauptsächlich die senkrechte Parallelprojection, die man sich durch herabfallende Tropfen Tinte veranschaulichen könne. Die Projectionsebene, *plan de description*, ist entweder horizontal zur Aufnahme des Grundrisses, *projection hori-*

[1] Auf Maclaurin's Figur in den P. T. sind zwei Buchstaben unrichtig, welche wir mit dem Texte in Einklang gebracht haben. [2] Chasles, *Aperçu hist.* pag. 355 (deutsch S. 376) und besonders Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie I, 23—24, dem wir fast wörtlich folgen.

zontale oder *ichnographie*, oder vertical zur Aufnahme des Aufrisses, *orthographie*. Unter den Oberflächen sind auch die windschiefen, *surfaces gauches*, hervorgehoben. Diese werden durch parallel zu einer Ebene fortgeführtes Hingleiten einer Geraden längs zweier nicht derselben Ebene angehörenden Linien erzeugt, welche Linien beide gerade, oder die eine gerade, die andere gekrümmt, oder beide gekrümmt sein können. Frézier rechnet zu den windschiefen Flächen auch noch die durch ein ähnliches Gleiten einer krummen Linie erzeugten Flächen, welche heute nicht mehr als windschief gelten. Einen weiteren Gegenstand von Frézier's Untersuchungen bildet die Durchdringung von Körpern und die Abwickelung solcher Flächen, welche aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Ebenen gebildet erscheinen.

Gleichfalls in Frankreich erschien 1740 das Buch: *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secour du calcul différentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres* von Jean Paul de Gua de Malves. Wir haben es schon (S. 557 und 585) wegen des algebraischen Dreiecks als Ersatz für das Newton'sche Parallelogramm erwähnt, auch (S. 557) eine darin vorkommende Eliminationsmethode geschildert. Das Buch von De Gua wurde gleich dem von Clairaut (S. 753) durch Privat de Molières geprüft, der es am 3. November 1739 als des Druckes würdig bezeichnete. Das Buch, in kleinstem Formate gedruckt, zerfällt in drei Abschnitte von sehr ungleicher Ausdehnung. Der I. Abschnitt geht von S. 1—24, der II. von S. 24—347, der III. von S. 348—454. Ein Inhaltsverzeichniss irgend welcher Art fehlt, wodurch das Zurechtfinden ungemein erschwert ist, während die nichts weniger als klare Schreibweise dem Studium des Buches in der Zeit, als es erschien, ganz besonders hindernd in den Weg getreten sein muss.

Der I. Abschnitt handelt von den Mittelpunkten der Curven, d. h. der algebraischen Curven, von welchen allein die Rede ist, und auf welche sich auch die Titelworte der geometrischen Linien jeder Ordnung beziehen. Als Mittelpunkt, *centre général*, wird der Punkt bezeichnet, in welchem alle durch ihn hindurchgehenden Sehnen halbirt werden, oder von welchem aus ein Auge alle einander diametral gegenüberliegende Curvenpunkte als symmetrische Punkte sehen würde[1]. De Gua verlegt nun zunächst das Coordinatensystem, auf welches die Curvengleichung sich bezieht, durch Parallelverschiebung nach einem anderen Anfangspunkte und dreht alsdann die

[1] De Gua, *Usage de l'analyse de Descartes* pag. 2: *si l'on suppose un oeil placé dans le centre général d'une Courbe quelconque, les parties diamétralement opposées de cette Courbe présenteront en tout sens une symétrie parfaite.*

Ordinatenaxe. Heissen die ursprünglichen Coordinaten x, y, so wird die Verschiebung durch $x = \xi + p$, $y = \eta + q$, die Drehung durch $\eta = mu$, $\xi = z + nu$ vollzogen, die ganze Coordinatenveränderung beruht also auf den Gleichungen $x = p + z + nu$, $y = q + mu$ mit u und z als den neuen Veränderlichen und m und n als von der Neigung der Ordinatenaxe abhängigen Constanten. Ist der neue Coordinatenanfangspunkt ein Mittelpunkt, so muss bei jeder Neigung der Ordinaten zur Abscissenaxe im Mittelpunkte eine ebensogrosse positive als negative Ordinate eines Curvenpunktes entstehen, d. h. wenn $z = 0$ gesetzt ist, muss eine Gleichung in u erscheinen, welche ebensoviele positive als negative Wurzeln von absolut genommen gleichem Werthe besitzt. Das kann nur dann der Fall sein, wenn in der entstehenden Gleichung in u keine Potenz von u mit ungeradem Exponenten auftritt, d. h. wenn solche Potenzen alle den Coefficienten 0 besitzen. Anstatt $x = p + z + nu$, $y = q + mu$ und dann $z = 0$ zu setzen, kann man aber sofort die Substitution $x = p + nu$, $y = q + mu$ vornehmen, worauf die Coefficienten ungerader Potenzen von u gleich Null gesetzt die Werthe p und q der Coordinaten des Mittelpunktes, wenn es einen solchen giebt, unabhängig von m und n finden lassen müssen[1]). Wäre z. B. $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ zu untersuchen, so verwandle man die Gleichung in $(m^2 + n^2)u^2 + (2mq + 2np - 2an)u + (p^2 + q^2 - 2ap) = 0$ und setze $2mq + 2n(p - a) = 0$. Bei willkürlichem m und n kann diese Gleichung nur mittels $q = 0$, $p = a$ erfüllt werden, und in der That hat der Kreis $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ bei $x = a$, $y = 0$ einen Mittelpunkt. De Gua behandelt dieses Beispiel allerdings ganz anders[2]). Er differentiirt die Curvengleichung, wodurch er $2(x - a)dx + 2y\,dy = 0$ erhält, und setzt die Coefficienten von dx und von dy, jeden für sich, $= 0$, wobei sich $x = a$, $y = 0$ ergiebt. Dass man so verfahren kann, beruht auf der Entwickelung des Gleichungspolynoms $x^2 - 2ax + y^2 = F(x, y)$, in welchem $x(y)$ den Zuwachs $dx(dy)$ erhalten hat, nach dem Taylor'schen Satze. In dieser Entwicklung erhalten dx und dy die Coefficienten $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, die man zum Verschwinden zu bringen hat, wenn die ersten Potenzen von dx und dy in der Entwicklung nicht vorkommen dürfen[3]). Ist die Curvengleichung von höherem als dem zweiten Grade, so muss die Differentiation und die Nullsetzung von partiellen Differentialquotienten fortgesetzt werden, wie Saurin (S. 412) erkannt hatte, und führt ausser zu den Coordinaten des Mittelpunktes auch zu Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten

[1]) De Gua, *Usage de l'analyse de Descartes* pag. 3—7. [2]) Ebenda pag. 10. [3]) Ebenda pag. 7—8 und *Addition* pag. 455—457.

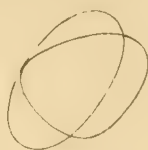
der Curvengleichung, welche erfüllt sein müssen, damit ein Mittelpunkt vorkomme.

Der II. Abschnitt giebt die allgemeine Lehre von den singulären oder merkwürdigen Punkten[1]) der Curven und dergleichen mehr. Der Name eines singulären Punktes dürfte hier erstmalig erscheinen, während Saurin (S. 410) nur von einem singulären Falle der Berührung gesprochen hatte. War im I. Abschnitte infolge von Coordinatenveränderungen der etwaige Mittelpunkt einer Curve zum Coordinatenanfangspunkte geworden, so gebraucht De Gua im II. Abschnitte ein ganz ähnliches Verfahren. Er verlegt den neuen Coordinatenanfangspunkt nach einem singulären Punkte. Im Anfang des Abschnittes erscheint das mehrgenannte algebraische Dreieck mit seiner Verwendung. Dahin gehört die Darstellung von y oder einer Potenz von y durch eine nach Potenzen von x mit steigenden Exponenten geordnete Reihe, die sich in unmittelbarer Nähe des gewählten Anfangspunktes, wo x unendlichklein ist, auf das erste Glied beschränkt[2]). Daraus folgert De Gua weiter[3]) die Umwandelbarkeit des Gleichungspolynoms der Curve ebendort in $y^m - Ax^{\pm n}$ mit positiven A, m und n, oder in ein Product solcher Ausdrücke. Da ein singulärer Punkt der Curve als Coordinatenanfangspunkt gewählt wurde, d. h. da $x = 0$, $y = 0$ einen Curvenpunkt darstellt, so muss mindestens ein Factor des Gleichungspolynoms unter dieser Voraussetzung verschwinden, d. h. x und y müssen gleichzeitig positive Exponenten besitzen, der erwähnte Factor muss $y^m - Ax^n$ heissen[4]). Nun seien drei Fälle zu unterscheiden. Ist erstens m grad und n ungrad, so entspricht auf der positiven Abscissenseite jedem x ein positives und ein negatives y von gleicher Länge, auf der negativen Abscissenseite sind die y imaginär. Ist zweitens m und n ungrad, so wird dem positiven x ein positives y, dem negativen x ein negatives y entsprechen, und der singuläre Coordinatenanfangspunkt ist Inflexionspunkt. Ist drittens m ungrad und n grad, so entspricht dem positiven wie dem negativen x ein gleichgrosses positives y, und im Cordinatenanfangspunkt ist ein Rückkehrpunkt erster Art, eine Spitze, erkannt. Der vierte Fall, dass m und n beide grad, etwa $m = 2\mu$, $n = 2\nu$ wären, lässt die weitere Zerlegung $y^{2\mu} - Ax^{2\nu} = (y^\mu - \sqrt{A}\,x^\nu)(y^\mu + \sqrt{A}\,x^\nu)$ zu, die einen der drei früheren Fälle herbeiführt, oder, wenn auch μ und ν noch beide grad sind, bei weiterer Zerlegung schliesslich herbeiführen muss[5]). Ein Rückkehr-

[1]) De Gua, *Usage de l'analyse de Descartes* pag. 72: *des points Singuliers ou Remarquables.* Auch in der Vorrede pag. X ist von den *Points Singuliers* die Rede. [2]) Ebenda pag. 47. [3]) Ebenda pag. 72. [4]) Ebenda pag. 77. [5]) Ebenda pag. 77—79.

punkt der zweiten Art, ein Schnabel, ist also nach diesem Beweise a priori nicht möglich[1]. Auf diese Behauptung legte De Gua ein solches Gewicht, dass er sie in seine Vorrede aufnahm[2]. An Figuren, welche wir so getreu als möglich nachbilden, um unseren Lesern eine Vorstellung von den Figurentafeln zu De Gua's Buche zu geben, zeigt der Verfasser zuerst (Fig. 121), wie ein Rückkehrpunkt zweiter Art nach der Meinung De L'Hôpital's aussehe[3]), um dann später zu behaupten[4]), eine solche Zeichnung sei nur als Hälfte einer anderen (Fig. 122) aufzufassen, von welcher aber De L'Hôpital vermöge der Evoluten, die er sich zeichnete, ein Theil entging. Das 116. Kapitel wird uns mit der Widerlegung dieser Meinung, welche nicht ausblieb, bekannt machen.


Fig. 121.


Fig. 122

Ist die Curvengleichung nach Potenzen von y mit fallenden Exponenten geordnet, welchen nach x geordnete Polynome als Coefficienten dienen, so zeigt das Fehlen der niedersten Glieder in y an[5], dass der Coordinatenanfangspunkt der Curve als vielfacher Punkt angehört. Aehnliche Beziehungen finden zwischen dem Fehlen der dem Grade der Curvengleichung nach möglichen höchsten Glieder in y und dem Vorhandensein von unendlichen Curvenästen und Asymptoten statt[6]. Wenn auch die von De Gua hervorgehobenen Thatsachen bekannt waren (S. 422 und 414), so hatte man doch die Frage nach einem inneren Zusammenhange derselben noch unterlassen. De Gua stellte sie[7]) und beantwortete sie durch eine Einführung neuer Veränderlichen auf Grundlage der Gleichungen $x = \frac{\pm pq}{z}$, $y = \frac{\pm pu}{z}$, ein Verfahren, welches er eine Projection nennt und mit dem Schatten von Newton's Enumeratio in Uebereinstimmung findet[8]). De Gua folgert daraus später[9]) den von Newton (S. 406—407) ausgesprochenen, von Nicole (S. 751) und Clairaut (S. 759) bewiesenen Satz, dass alle Curven 3ten Grades als Projectionen einer der fünf divergirenden Parabeln 3ten Grades anzusehen sind, und aus den sogenannten Schatten ergiebt sich ihm der neue Satz, dass, wenn eine Curve 3ten Grades drei Inflexionspunkte besitze, dieselben auf einer Geraden liegen müssen. De Gua legt auf diesen Satz grosses Gewicht, so dass von ihm in der Vorrede und an zwei Stellen des Buches die Rede ist[10]). Hatte De Gua bisher immer darauf

[1]) De Gua, *Usage de l'analyse de Descartes* pag. 76. [2]) Ebenda *Préface* pag. XVII. [3]) Ebenda pag. 74. [4]) Ebenda pag. 81. [5]) Ebenda pag. 91—92. [6]) Ebenda pag. 148 sqq. [7]) Ebenda pag. 198. [8]) Ebenda pag. 202: *l'équation de l'Ombre ou de la Projection cherchée.* [9]) Ebenda pag. 222. [10]) Ebenda *Préface* pag. XVIII, pag. 225 und 313.

geachtet, einen singulären Punkt zum Coordinatenanfangspunkte zu wählen, so wendet er sich im weiteren Verlaufe der Aufgabe zu, ausserhalb des Coordinatenanfangspunktes befindliche vielfache Punkte zu ermitteln[1]) und gelangt zu den Saurin'schen Ergebnissen (S. 412). Er verbindet mit diesen Erörterungen Bemerkungen gegen De L'Hôpital, gegen Leibniz u. s. w., bei welchen das Recht nicht auf seiner Seite ist. Den Schluss des II. Abschnittes bildet der Satz[2]), dass der Uebergang von einem gradlinigen Coordinatensysteme zu einem anderen den Grad einer Curvengleichung nicht verändern könne.

Der III. Abschnitt wendet die allgemeinen Lehren des II. Abschnittes auf bestimmte Aufgaben an, welche zwar keineswegs des Interesses entbehren, aber uns doch nicht zur Berichterstattung verpflichten. Die Bemerkung mag genügen, dass dort De Gua's Eliminationsverfahren (S. 557) mehrfach zur Anwendung gelangt.

115. Kapitel.

Analytische Geometrie 1740–1748. Maclaurin. Euler's Introductio. Band II.

Etwa zur gleichen Zeit, in welcher De Gua's Usage de l'analyse de Descartes in den Buchhandel kam, gab Edmund Stone in den P. T. zwei Curven 3ten Grades an, welche Newton und Stirling in ihrer Aufzählung übersehen hatten[3]), und anderthalb Jahre später dürfen wir einen in derselben Zeitschrift veröffentlichten Aufsatz von De Castillon über eine besondere Curve 4ten Grades erwähnen[4]), welcher er den Namen der Cardioide beilegte, nachdem Louis Carré[5]) (1663—1711), ein Schüler von Varignon, im Februar 1705 die Curve zum Gegenstande einer Untersuchung gemacht hatte[6]), in welcher nicht einmal ihre Gestalt vollständig erkannt war, und in welcher ein gewisser Koenersma als Vorgänger auf diesem Gebiete erwähnt wurde. Die Definition der Curve (Fig. 123) lässt sie als den Ort des Punktes N erkennen, der auf irgend einer von dem festen Punkte A einer gegebenen Kreislinie ausgehenden Sehne gefunden wird, wenn von dem zweiten Kreisdurchschnitte M aus dem Durchmesser AB des Kreises gleiche Strecken MN nach beiden Seiten abgeschnitten werden.

---

[1]) De Gua, *Usage de l'analyse de Descartes* pag. 238. [2]) Ebenda pag. 340. [3]) P. T. XLI, 319—320, Nr. 456 für Januar bis Juni 1740. [4]) Ebenda 778 bis 781, Nr. 461, für August bis December 1741. [5]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1711. *Histoire* pag. 102—107. [6]) Ebenda. Année 1705, pag. 56—61.

Der 1742 erschienene IV. Band der Gesammtwerke von Johann Bernoulli würde uns veranlassen müssen, an dieser Stelle einen Aufsatz über die kürzesten Linien auf gekrümmten Oberflächen zu besprechen, wir ziehen es aber vor, ihn nebst theils früheren, theils späteren Abhandlungen ähnlichen Inhaltes von Euler und Clairaut im 117. Kapitel zu behandeln.

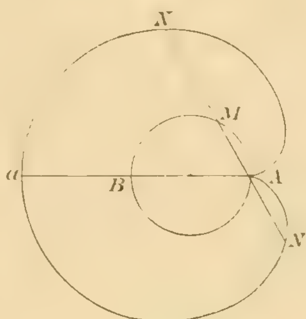


Fig. 123.

Eine Schrift von Patrick Murdoch[1]) († 1774) über Newton's Schattenerzeugung der Curven[2]) gelangte 1746 zur Ausgabe, ist uns aber nie zu Gesicht gekommen.

Wir haben im 106. Kapitel über die Algebra Maclaurin's berichtet, deren Druck 1748 sich vollendete. Wir haben dort gelegentlich (S. 569) von einem aus 65 Seiten bestehenden geometrischen Anhange gesprochen, und gegenwärtig, wo wir im Begriffe sind, unsere damalige Zusage erfüllend den Inhalt des Anhanges zu schildern, müssen wir zugleich unsere Leser daran erinnern, dass Maclaurin Braikenridge gegenüber von einem geometrischen Zusatze zu einem Kapitel seiner Algebra gesprochen hat (S. 766). Wir müssen daran erinnern, um zu betonen, dass der 1748 gedruckte Anhang sich nicht vollständig mit Maclaurin's Ankündigung deckt, eine auch uns etwas räthselhafte Thatsache. Man kann den Herausgebern von Maclaurin's nachgelassener Algebra nur beipflichten, dass sie dem Anhange[3]) eine neu beginnende Seitenzählung verliehen, denn es handelt sich in ihm nirgend um algebraische Dinge, man kann aber ebenso nur einverstanden damit sein, dass die Schrift als Anhang zur Algebra gedruckt wurde, denn die in ihr gezogenen Schlussfolgerungen sind trotz des geometrischen Inhaltes durchaus algebraisch. Maclaurin hat selbst die Trennung durch einen Wechsel in der Sprache herausgefordert, indem er die Algebra englisch, den Anhang lateinisch verfasste. Dessen Titel lautet: *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus*. Nach einer Einleitung von $1^1/_2$ Seiten folgt ein I. Abschnitt über geometrische Linien im Allgemeinen[4]), ein II. Abschnitt von

[1]) Poggendorff II, 240—241. [2]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 146 (deutsch 142). [3]) Eine französische Uebersetzung des „*Appendix*" mit Noten und Zusätzen findet sich in E. de Jonquières, *Mélanges de géométrie pure* (1856) pag. 197—261. [4]) Maclaurin, *Appendix* pag. 2—29: *De lineis geometricis in genere*.

den Kegelschnitten[1]), ein III. Abschnitt von den cubischen Curven[2]).

Aus dem I. Abschnitte, welcher die Grundlage der beiden anderen bildet, heben wir Folgendes hervor. Die Gleichung einer Curve n^{ten} Grades wird, nach y geordnet, $y^n - (ax + b)y^{n-1} + (cx^2 - dx + e)y^{n-2} - \cdots = 0$ heissen. Durch die Substitution $y = u + \frac{ax + b}{n}$ entsteht eine nach u geordnete Gleichung wieder vom n^{ten} Grade, in welcher aber kein Glied u^{n-1} vorkommt, d. h. die Summe positiver und negativer u, welche zu einem bestimmten x gehören, ist 0, beziehungsweise die Abscissenaxe der Curve ist ein Durchmesser derselben[3]). Stirling hatte (S. 416) den gleichen Satz fast genau ebenso bewiesen, und an Stirling (S. 417) erinnert auch der Beweis des Newton'schen Satzes von den Producten der Abschnitte einer Curventransversale gestützt auf das von y freie letzte Glied der Curvengleichung[4]). Nun kommt Maclaurin zu einem wichtigen von ihm entdeckten Satze. Seien (Fig. 124) von P aus drei Gerade $PABC$, $Pabc$, $PDIE$ bis zum Durchschnitte mit einer Curve gezogen, welche beispielsweise als 3ten Grades angenommen wird, dann stehen nach dem eben erwähnten Productensatze $AP \cdot BP \cdot CP$ und $aP \cdot bP \cdot cP$ in einem constanten Verhältnisse.

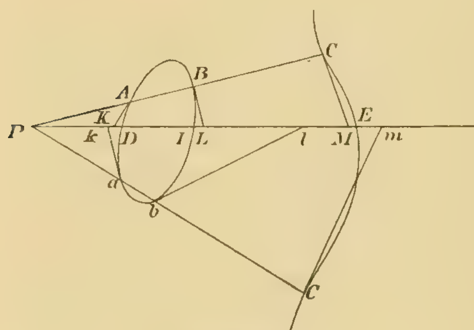


Fig. 124.

Die logarithmischen Differentiale solcher Producte sind aber, wie Maclaurin in einem Zwischensatze behauptet (natürlich ohne dieses Wortes oder der Differentialzeichen sich zu bedienen, statt deren er von Fluxionspünktchen Gebrauch macht) einander gleich, d. h. es ist $\frac{dAP}{AP} + \frac{dBP}{BP} + \frac{dCP}{CP} = \frac{daP}{aP} + \frac{dbP}{bP} + \frac{dcP}{cP}$. Eine weitere Zwischenbemerkung, von Maclaurin ohne Beweis und ohne Unterstützung durch eine Figur als etwas ganz Bekanntes[5]) ausgesprochen, ist folgende: Zieht man (Fig. 125) in A die Berührungslinie AK, verschiebt AP unendlich wenig parallel zur Anfangslage, so ist $\frac{A'L}{AL} = \frac{AP}{PK}$, aber

[1]) Maclaurin, *Appendix* pag. 30—36: *De lineis secundi ordinis sive sectionibus conicis.* [2]) Ebenda pag. 37—65: *De lineis tertii ordinis.* [3]) Ebenda pag. 5—7. [4]) Ebenda pag. 7—8. [5]) *notissimum.*

$A'L = dAP$, $AL = PP' = dEP$, also $\frac{dAP}{dEP} = \frac{AP}{PK}$ und $\frac{dAB}{AP} = \frac{dEP}{PK}$. Auf ganz ähnliche Weise ergeben sich $\frac{dBP}{BP} = \frac{dEP}{PL}$, $\frac{daP}{aP} = \frac{dEP}{Pk}$ u. s. w. Das Lemma von dem logarithmischen Differentiale der Producte führt also zu dem Satze $\frac{dEP}{PK} + \frac{dEP}{PL} + \frac{dEP}{PM} = \frac{dEP}{Pk} + \frac{dEP}{Pl} + \frac{dEP}{Pm}$, beziehungsweise zu $\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} = \frac{1}{Pk} + \frac{1}{Pl} + \frac{1}{Pm}$, und die Summe dieser reciproken Werthe ist auch $\frac{1}{PD} + \frac{1}{PI} + \frac{1}{PE}$. In Worten: Wenn man durch einen in der Ebene einer geometrischen Curve liegenden festen Punkt eine Transversale zieht, welche die Curve in so vielen Punkten trifft, als sie Dimensionen hat, darauf in diesen Punkten Tangenten an die Curve zieht und endlich durch den festen Punkt eine zweite Gerade in willkürlicher Richtung, die aber unveränderlich bleibt, legt, so wird die Summe der reciproken Werthe der Abstände von dem festen Punkte nach den Durchschnittspunkten der genannten Tangenten mit der festen Geraden constant sein, nämlich gleich der Summe der reciproken Abstände des Punktes von den Durchschnittspunkten der festen Geraden mit der Curve[1]. Ein anderer Satz[2]) hatte sich in den nachgelassenen Papieren von Cotes aufgefunden, woher Robert Smith ihn Maclaurin mittheilte, der dann seinerseits einen Beweis[3]) dazu erfand. Der Satz heisst: Wenn man um einen festen Punkt P eine Transversale in Drehung versetzt, welche eine geometrische Curve in so vielen Punkten $A, B, C \cdots$ schneidet, als sie Dimensionen hat, und man auf dieser Transversalen in jeder ihrer Lagen einen solchen Punkt M annimmt, dass $\frac{1}{PM}$ das arithmetische Mittel aus $\frac{1}{PA}, \frac{1}{PB}, \frac{1}{PC} \cdots$ ist, so hat der Punkt M zu seinem geometrischen Orte eine gerade Linie. Maclaurin nennt dabei PM das harmonische Mittel, *medium harmonicum*, von $PA, PB, PC \cdots$.

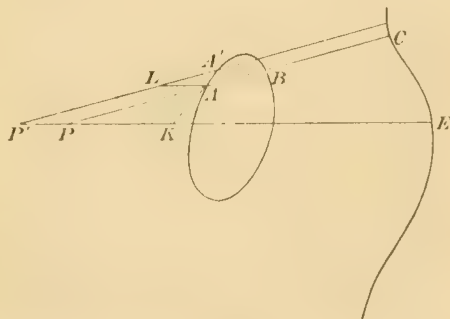


Fig. 125.

---

[1]) Maclaurin, *Appendix* pag. 11. [2]) Ebenda pag. 2. [3]) Ebenda pag. 24—25.

Im II. Abschnitte dürfte folgender Satz Maclaurin's Eigenthum sein. Seien (Fig. 126) A, B, G, F vier Punkte eines Kegelschnittes, P der Durchschnittspunkt der Geraden AB, FG, Π der der AG, BF, so schneiden die Tangenten AK, FK, beziehungsweise BL, GL, einander in Punkten K, L, welche mit P und Π auf einer Geraden liegen[1]). Das Pascal'sche Sechseck ist kurz erwähnt[2]). Maclaurin hatte es schon früher in seiner Abhandlung in den P. T. von 1735 und wiederholt in dem Treatise of fluxions von 1742 behandelt.

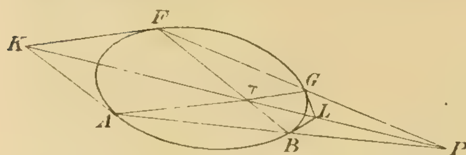


Fig. 126.

Im III. Abschnitte sind viele Sätze bemerkenswerth. Wir beschränken unsere Auswahl auf einige wenige und kürzen den Wortlaut dahin ab, dass wir die Curve 3ten Grades einfach Curve nennen. Schneidet eine Gerade die Curve in drei reellen Punkten, zieht man an jeden Durchschnittspunkt die Tangente, welche noch einen weiteren Punkt mit der Curve gemeinsam haben wird, so liegen diese drei neuen Durchschnittspunkte auf einer Geraden[3]). Werden aus einem Curvenpunkte zwei Berührungslinien an die Curve gezogen, schneidet dann die Berührungssehne die Curve in einem weiteren Punkte, und werden an diesen und an den ersten Punkt die Berührungslinien gezogen, so schneiden letztere einander in einem Curvenpunkte[4]). Die Verbindungsgerade zweier Inflexionspunkte der Curve geht durch den dritten Inflexionspunkt[5]). Das ist der Satz, welchen De Gua schon 1740 veröffentlicht hatte (S. 771), was aber Maclaurin sehr gut unbekannt geblieben sein kann. Auch diese unsere sehr knapp gewählten Auszüge bestätigen das Urtheil des berufensten Kenners[6]), der den Anhang ein Werk von bewunderungswürdiger Eleganz und Präcision genannt hat.

Das Jahr 1748, in welchem Maclaurin's Anhang bekannt wurde, war auch das der Veröffentlichung von Euler's Introductio, und wenn wir ihrem zweiten geometrischen Bande auch nicht ein ganzes Kapitel widmen, so verlangt er doch eine einigermassen ausführliche Berichterstattung über seine zweiundzwanzig Kapitel einer analytischen Geometrie der Ebene, denen ein Anhang von den Oberflächen in sechs Kapiteln nachfolgt.

---

[1]) Maclaurin, *Appendix* pag. 31. [2]) Ebenda pag. 33, § 44. [3]) Ebenda pag. 39, § 57. [4]) Ebenda pag. 40, § 59. [5]) Ebenda pag. 44, § 68. [6]) Chasles, *Aperçu hist.* pag. 146 (deutsch S. 143).

Das 1. Kapitel, Von den Curven überhaupt, unterscheidet zwischen algebraischen oder geometrischen und transcendenten, zwischen ein- und mehrdeutigen Curven, bespricht die imaginären Durchschnittspunkte der Curven mit der Abscissenaxe, die nur paarweise auftreten, und ebenso die gleichfalls paarweise auftretenden unendlichen Aeste.

Das 2. Kapitel, Von der Veränderung der Coordinaten, setzt nur geradlinige Coordinaten voraus, und zwar zunächst rechtwinklige. Die Coordinatenveränderung wird bei Verlegung des Anfangspunktes zu den Gleichungen $x = t - f$, $y = u - g$ führen, bei hierauf vorgenommener Drehung des rechtwinklig bleibenden Coordinatenkreuzes um den Winkel q zu den Gleichungen: $x = u \cdot \sin q + t \cdot \cos q - f$, $y = u \cdot \cos q - t \cdot \sin q - g$ oder $x = mu + nt - f$, $y = nu - mt - g$ mit $m^2 + n^2 = 1$. Wendet man sie z. B. auf die der Abscissenaxe in der Entfernung a parallele Gerade an, welche die Gleichung $y = a$ haben muss, so erscheint $a = nu - mt - g$ oder $nku - mkt - k(g + a) = 0$, beziehungsweise $\alpha u + \beta t + b = 0$ als allgemeine Gleichung einer Geraden im rechtwinkligen Coordinatensysteme. In zweiter Linie wird von der Rechtwinkligkeit des Coordinatensystems Abstand genommen und stufenweise die Umwandlung eines rechtwinkligen Systems in ein schiefwinkliges unter Beibehaltung der Richtung der Abscissenaxe oder in ein beliebiges schiefwinkliges System vorgenommen.

Das 3. Kapitel, Von der Eintheilung der algebraischen krummen Linien in Ordnungen, zeigt den Grad der Gleichungen als naturgemässen Eintheilungsgrund, weil derselbe durch Wahl eines anderen Coordinatensystems nicht verändert wird. Wohl aber kann die Art der Curve innerhalb derselben Ordnung sich verändern, je nachdem ein oder das andere Coordinatensystem zu Grunde liegt. Die Gleichung, welche z. B. im rechtwinkligen Systeme die eines Kreises ist, bedeutet in einem schiefwinkligen Systeme eine Ellipse. Die durch eine Gleichung dargestellte Curve ist folglich nur dann vollständig gegeben, wenn man das zu Grunde liegende Coordinatensystem kennt. Auch bemerkt Euler, dass die allgemeinste Gleichung n^{ten} Grades zwischen x und y aus $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gliedern bestehe, und dass Gleichungen, deren Polynome in reelle Factoren zerfallen, eine Verbindung mehrerer von einander verschiedener Linien bedeuten.

Das 4. Kapitel, Von den vornehmsten Eigenschaften der Linien einer jeden Ordnung, nennt als Wissenswürdigstes bei jeder Curve die Anzahl der Punkte, in welchen sie durch eine Gerade geschnitten wird, und die bei der Curve n^{ten} Grades höchstens n ist. Man kann also aus dem Vorhandensein von n Durchschnittspunkten

einer Curve mit einer Geraden nur folgern, dass sie nicht algebraisch von niedrigerem als dem n^{ten} Grade sei, denn sie kann auch algebraisch von höherem Grade oder auch transcendent sein. Zur Bestimmung der $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Glieder der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades genügen $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ Bedingungen, weil ein Coefficient als Einheit gewählt werden darf. Die $\frac{n(n+3)}{2}$ Bedingungen können ebensoviele Punkte sein, durch welche die Curve hindurchzugehen hat, und man wählt, wenn solche Punkte gegeben sind, die Coordinatenaxen vortheilhaft so, dass einer der gegebenen Punkte Coordinatenanfangspunkt werde, ein zweiter auf der Abscissenaxe, ein dritter auf der Ordinatenaxe liege.

Das 5. Kapitel, Von den Linien der zweiten Ordnung, geht von der allgemeinsten Gleichungsform $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 = 0$ oder $y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$ aus, welche erkennen lässt, dass zu jedem x zwei reelle y gehören oder gar keines. Bei $\zeta = 0$ fällt allerdings das eine $y = \infty$ aus. Schneidet (Fig. 127) die Ordinate NMP die Curve wirklich in zwei Punkten N und M, so sind die Ordinaten NP, MP diejenigen, welche zu $x = AP$ gehören, und ihre Summe ist der entgegengesetzt genommene Coefficient von y in der nach y quadratischen Gleichung, d. h. $PM + PN = -\frac{\varepsilon \cdot AP + \gamma}{\zeta}$. Eine andere Ordinate $nm \parallel NM$ liefert, da ihr Stück pm negativ ist, $pn - pm = -\frac{\varepsilon \cdot Ap + \gamma}{\zeta}$ und durch Subtraction beider Gleichungen von einander entsteht $PM + pm + PN - pn = \frac{\varepsilon(Ap - AP)}{\zeta} = \frac{\varepsilon \cdot Pp}{\zeta}$. Wird $m\mu \parallel n\nu \parallel AP$ gezogen, so zeigt sich $PM + pm + PN - pn = M\mu + N\nu$ und $\frac{M\mu + N\nu}{Pp} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, wo die einzigen Voraussetzungen in dem Parallelismus von MN und mn und von $n\nu$, $m\mu$ und AP bestanden. Nun schiebe man (Fig. 128) die MN sich selbst parallel so weit fort, bis M und N in C zusammenfallen und die Sehne zur Berührungslinie wird, während immer

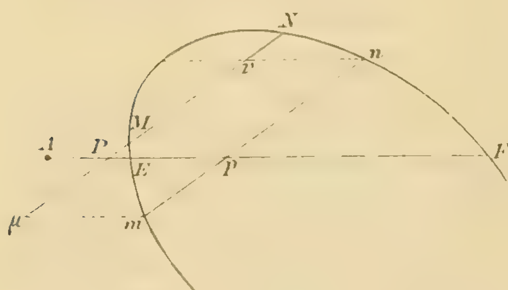


Fig. 127.

noch $mn \parallel MN \parallel JC$ und CD die Axe darstellt, die parallel den mi, MJ, NK, nk verläuft. Während aber vorher $M\mu$, $N\nu$ nach gleicher Richtung sich erstreckten, ist jetzt bei CJ, CK und bei Ci, Ck das Entgegengesetzte der Fall, so dass dem vorigen Ergebnisse jetzt die Gleichungen entsprechen $\frac{CJ - CK}{MJ} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ und $\frac{Ci - Ck}{mi} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, aus welchem $Ci - Ck = \frac{mi}{MJ}(CJ - CK)$ folgt. Wählt man die von vornherein an keinerlei Bedingung geknüpfte Lage von CD so, dass die ihr parallelen MJ und NK derart in JK eintreffen, dass $CJ = CK$ oder $CJ - CK = 0$ wird, so muss auch $Ci - Ck = 0$ sein; oder, weil $CLMJ$, $CLNK$, $Clmi$, $Clnk$ lauter Parallelogramme sind, folgt aus $CJ = CK$ nicht bloss $LM = LN$, sondern auch $lm = ln$, d. h. die Gerade, welche von einem Curvenpunkte ausgehend eine der Berührungslinie an jenen Curvenpunkt parallele Sehne halbirt, muss auch jede andere ihr parallele Sehne halbiren und ist ein Durchmesser der Curve. Euler bezeichnet diese Eigenschaft der Curven 2ten Grades, die aus der Betrachtung des Coefficienten der ersten Potenz von y in der Curvengleichung ermittelt wurde, als erste Haupteigenschaft, welcher eine zweite zur Seite steht, zu der er von dem y nicht mehr enthaltenden Gliede $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$ aus gelangt. Wenn (Fig. 127) die zur Abscissenaxe gewählte AP die Curve in zwei Punkten E und F schneidet, so ist dort $y = 0$, und weil ebendort die Curvengleichung erfüllt wird, so muss in E und F auch $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$ sein, d. h. diese letztere Gleichung hat die zwei reellen Wurzeln $x = AE$ und $x = AF$ oder es ist $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF)$. Derselbe Ausdruck $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$ ist aber bei jedem x, z. B. bei $x = AP$, wodurch $x - AE = -PE$, $x - AF = -PF$, $\frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta} PE \cdot PF$ wird, das Product der beiden dem $x = AP$ entsprechenden y (PM und PN). Man hat also $\frac{\delta}{\zeta} PE \cdot PF = PM \cdot PN$, $\frac{PM \cdot PN}{PE \cdot PF} = \frac{\delta}{\zeta}$, wo der Bruch $\frac{\delta}{\zeta}$ ausschliesslich von dem Winkel, welchen die beiden Coordinaten mit einander bilden, abhängt. Bleibt dieser unverändert, indem z. B. $mn \parallel MN$, so muss auch $\frac{pm \cdot pn}{pE \cdot pF} = \frac{\delta}{\zeta}$ sein. Daraus folgt leicht, dass, wenn zwei parallele Paare einander schneidender Sehnen

Fig. 128.

einer Curve 2ten Grades gegeben sind, der Quotient aus dem Producte der Abschnitte der einen Sehne getheilt durch das Product der Abschnitte der anderen Sehne bei beiden Paaren der gleiche sein muss, und dieser Satz bildet nach Euler die zweite Haupteigenschaft der Curven 2ten Grades. Betrachtet man einen Durchmesser CD (Fig. 128) als die eine Sehne und wählt sie zugleich zur Abscissenaxe mit C als Anfangspunkt, nimmt man ferner die Berührungslinie CK in C zur Ordinatenaxe und betrachtet eine ihr parallele Sehne MN als die von CD in L geschnittene, so ist $\frac{CL \cdot LD}{ML \cdot LN}$ von constantem Werthe, der etwa $\frac{k}{h}$ heissen mag. Nun sei $CD = a$ die Länge des Durchmessers bis zu seinem zweiten Durchschnitte mit der Curve, $CL = x$, also $LD = a - x$, $ML = LN = y$, so erscheint $y^2 = \frac{h}{k}(ax - x^2)$ als Gleichung der Curve 2ten Grades. An einer späteren Stelle wird $y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ als Gleichung irgend einer Curve 2ten Grades, bezogen auf einen Durchmesser als Abscissenaxe und die durch ihn halbirten Sehnen als Ordinaten, gefunden, weil in diesem Coordinatensysteme zu jedem x zwei gleiche einander entgegengesetzte y gehören müssen, weshalb in der Curvengleichung die erste Potenz von y nicht vorkommen kann. Wir würden über das ganze Kapitel Satz für Satz berichten müssen, wollten wir Alles angeben, was Euler an merkwürdigen, wenn auch an sich nicht neuen, doch meistens in neuer Weise hergeleiteten Ergebnissen in ihm vereinigt hat. Wir erwähnen nur in aller Kürze den Nachweis des Vorhandenseins zweier zusammengehöriger Durchmesser, eines Mittelpunktes, zweier rechtwinklig zusammengehöriger Durchmesser, endlich zweier Punkte auf dem grösseren Hauptdurchmesser, welche symmetrisch zum Mittelpunkte liegend die von Euler zuerst als Definition benutzte Eigenschaft besitzen, die von ihnen bis zum Durchschnitte mit der Curve gezogenen Strecken rational durch die auf dem Hauptdurchmesser selbst gemessenen Abscissen jener Durchschnittspunkte ausdrücken zu lassen, und welche Brennpunkte heissen.

Das 6. Kapitel, Von den Arten der Linien 2ten Grades, steht dem 5. an Eigenartigkeit und Neuheit der Behandlungsweise keineswegs nach. Aus der allgemeinen Gleichung $y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, welche man, da sie nur zwei zusammengehörige Durchmesser als Coordinatenaxen voraussetzt, durch Wahl eines Hauptdurchmessers zur Abscissenaxe auch als auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen betrachten kann, folgert Euler ein wesentlich verschiedenes Aussehen der Curve, je nachdem γ positiv oder negativ oder Null ist. Bei $\gamma > 0$ besitzt die Curve vier ins Unendliche fortlaufende Aeste,

weil sowohl $x = \infty$ als $x = -\infty$ zu $y = \pm\infty$ führt. Bei $\gamma < 0$ besitzt die Curve keinen Punkt im Unendlichen, weil y imaginär wird, wenn $x = \pm\infty$. Bei $\gamma = 0$ besitzt die Curve zwei ins Unendliche fortlaufende Aeste, weil $y = \pm\infty$ wird, wenn βx im Unendlichen positiv ist, während y imaginär ist, wenn βx im Unendlichen negativ ist. Die drei Curvenarten werden Hyperbel, Ellipse, Parabel genannt, und nunmehr hat Euler das Recht erlangt, sie einzeln jede für sich zu betrachten, was in der Reihenfolge: Ellipse mit dem Kreise als Sonderfall, Parabel als Ellipse mit unendlichgrosser Axe, Hyperbel mit ihren beiden Asymptoten geschieht. Die Tangenteneigenschaften ergeben sich aus im 5. Kapitel bereits ermittelten Gleichungen. Von den Merkmalen, welche sonst zur Unterscheidung der drei Curvenarten gebraucht werden, und die sich unter Annahme der Gleichungsform $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$ auf die Werthe von $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ beziehen, ist hier noch nicht die Rede.

Das 7. Kapitel, Von den ohne Ende fortlaufenden Aesten, füllt diese Lücke aus, und zwar von einem Gesichtspunkte, der weit über die Curven 2ten Grades hinausreicht. Euler betrachtet die allgemeinste Curve $n$ten Grades, deren Gleichungspolynom in $n+1$ Gruppen zerfällt, in deren jeder solche Glieder vereinigt sind, welche die beiden Veränderlichen zusammen in gleicher Dimension aufweisen. Die höchste Gruppe wird also sein $P = \alpha y^n + \beta y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \cdots + \xi x^n$. Die zweithöchste Gruppe soll Q, die dritthöchste R u. s. w. heissen, die Gleichung selbst also $P + Q + R + S + \cdots = 0$. Nun kann P theils aus reellen einfachen Factoren, theils aus Factoren 2ten Grades $A^2y^2 - 2ABxy\cos\varphi + B^2x^2$ bestehen, welche letztere nur in imaginäre einfache Factoren zerfallen. Dass P ausschliesslich solche Factoren 2ten Grades besitze, verlangt ein grades n, mindestens $n = 2$. In solchem Falle kann die Curve keinen Punkt im Unendlichen besitzen, denn mag $x = \infty$ oder $y = \infty$ oder $x = \infty$ und $y = \infty$ gesetzt werden, immer ist $-2ABxy\cos\varphi$ kleiner als das wesentliche positive $A^2y^2 + B^2x^2$, so dass der betreffende Factor unter jenen Annahmen ∞^2 wird und mit ihm auch P unendlichgross werden muss. Gegen P verschwinden aber die Gruppen von niedrigerer Abmessung $Q + R + S + \cdots$, und die Curve kann, wie vorausgeschickt wurde, keinen Punkt im Unendlichen, also auch keinen ohne Ende fortlaufenden Ast besitzen. Bei $n = 2$ ist $P = \alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2$, und dessen beide einfache Factoren $\alpha y + \frac{x}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})$ und $y + \frac{x}{2\alpha}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})$ sind imaginär, wenn $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$. Darin besteht also das Merkmal für die nur im Endlichen verlaufende Ellipse. Nun besitze zweitens P ausser dem aus lauter in grader Anzahl

vorhandenen imaginären einfachen Factoren gebildeten Ausdrucke M noch den reellen einfachen Factor $p = ay - bx$, d. h. die Gleichung heisse $pM + Q + R + S + \cdots = 0$. Daraus folgt $p = \frac{-Q - R - S - \cdots}{M}$. Im Unendlichen verschwinden R, S, $\cdots$ gegen Q, und es bleibt $p = -\frac{Q}{M}$, wo Q und M von gleicher Abmessung sind und einen endlichen von x und y unabhängigen Quotienten geben können, wenn nur das Verhältniss von y zu x gegeben ist, welches aus $p = ay - bx = 0$ sich als $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ ergiebt. Mit anderen Worten: die Curve geht im Unendlichen in $ay - bx = 0$ über, in eine Gerade, welche der Curve von ungradem Grade als Asymptote dient, der sie sich mit zwei nach entgegengesetzter Richtung ins Unendliche sich erstreckenden Aesten nähert. In einem dritten Falle, wo $P = pqM$ und M sich aus in grader Anzahl vorhandenen imaginären einfachen Factoren zusammensetzt, während $p = ay - bx$, $q = cy - dx$ von einander verschiedene reelle Factoren sind, giebt es zwei Asymptoten $ay - bx = 0$, $cy - dx = 0$ bei vier ins Unendliche sich erstreckenden Aesten. Die Annahme $n = 2$ liefert hier die Hyperbel, so oft die beiden Factoren von $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2$ reell und von einander verschieden sind, d. h. so oft $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$. Die Parabel entsteht bei $n = 2$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, d. h. wenn die reellen einfachen Factoren p und q identisch sind. Geradlinige Asymptoten hat eine solche Curve $p^2M + Q + R + S + \cdots = 0$ nicht, wohl aber eine parabolische. Auch bei diesem Kapitel müssen wir es bei verhältnissmässig geringen Andeutungen bewenden lassen. Euler geht viel weiter. Er löst aus P mehr und mehr reelle einfache Factoren, die theils von einander verschieden sind, theils nicht, und die im letzteren Falle zu krummlinigen Asymptoten von der Gleichungsform $y^\mu = Ax^\nu$ führen.

Das 8. Kapitel, Von den Asymptoten, dringt tiefer in den gleichen Gegenstand ein und unterscheidet die ins Unendliche sich erstreckenden Curvenäste in hyperbolische und parabolische, von welchen nur die ersteren geradlinige Asymptoten besitzen.

Das 9. Kapitel, Von der Eintheilung der Linien 3ten Grades in Arten, benutzt als Eintheilungsgrund das Verhalten der ins Unendliche sich erstreckenden Curvenäste und zur Ermittelung desselben die cubischen Glieder des allgemeinsten Gleichungspolynoms $\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3$. Dieser Ausdruck besitzt entweder einen oder drei reelle einfache Factoren. Im letzteren Falle sind wieder drei Möglichkeiten zu unterscheiden: die Verschiedenheit der drei Factoren, die Gleichheit von zweien derselben, die Gleichheit aller drei.

So kommt Euler unter Berücksichtigung einiger anderer Bedingungen zu im Ganzen 16 Geschlechtern, wie er zu sagen vorschlägt, um einer Verwechslung mit Newton's Arten vorzubeugen.

Das 10. Kapitel, Von den vornehmsten Eigenschaften der Linien 3ten Grades, erläutert die Durchmesser dieser Curven in dem von Newton (S. 405) dem Worte beigelegten Sinne, beschäftigt sich mit der Frage, wann jene Curven einen Mittelpunkt, wieder in Newton's Sinne, nämlich einen gemeinsamen Durchschnittspunkt ihrer Durchmesser, besitzen, und mit der Natur ihrer ins Unendliche sich erstreckenden Aeste.

Das 11. Kapitel, Von den Linien 4ten Grades, will für diese die gleiche Aufgabe lösen, welche im 9. Kapitel für die Curven 3ten Grades behandelt worden war. Den Ausgangspunkt liefert die Zerlegung des Ausdrucks $\alpha y^4 + \beta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta y x^3 + \varepsilon x^4$ in seine theils imaginäre, theils reelle, theils verschiedene, theils gleiche einfache Factoren, und die acht in dieser Beziehung denkbaren Fälle führen zu nicht weniger als 146 Geschlechtern.

Das 12. Kapitel, Von der Erforschung der Gestalt der krummen Linien, geht nur in aller Kürze auf die an wenigen Beispielen erörterte Frage ein, wie die Curve im Endlichen aussehe, ob und wie viele reelle Ordinaten einer gegebenen Abscisse entsprechen, und ob solche Ordinaten auch unter einander gleich werden können, was einen vielfachen Curvenpunkt anzeigt, der auch ein einzelner conjugirter Punkt sein kann.

Das 13. Kapitel, Von den Eigenschaften der Curven, sucht Curven niedrigeren Grades auf, welche in der Nähe eines bestimmten Curvenpunktes der Gestalt der in Frage stehenden Curve sich anschmiegen. Niedrigsten Grades ist die geradlinige Berührungslinie, welche folgendermassen ermittelt wird. Weiss man, dass $x = p$, $y = q$ ein Punkt der betreffenden Curve ist, an welchen die Berührungslinie gesucht wird, so verlegt man dorthin den Anfangspunkt des in seiner Richtung unveränderten Coordinatensystems, indem man in die Curvengleichung $x = p + t$, $y = q + u$ einsetzt. Da die neue Gleichung durch $t = u = 0$ erfüllt werden muss, so kann ein constantes Glied nicht mehr in ihr vorkommen, sie muss vielmehr heissen $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + \cdots$. Bei unendlich kleinen t und u verschwinden sämmtliche Glieder gegen die beiden ersten, d. h. die Gerade $0 = At + Bu$ stellt die Gestalt der Curve im neuen Coordinatenanfangspunkte dar, berührt sie daselbst. Ist allerdings der ursprünglich $= 0$ gesetzte Ausdruck in der Gleichung der Curve keine rationale ganze Function von x und y, so geht die Umwandlung in die gewünschte Gleichung in t und u nicht ganz so leicht

vor sich, und solchen Schwierigkeiten zu begegnen war der Anlass zur Erfindung der Differentialrechnung. Wir wollen deshalb, setzt Euler in § 290 hinzu, die Methode, die Tangenten zu finden, wenn die für die Curve gegebene Gleichung keine rationale und ganze Gleichung ist, der Differentialrechnung aufbewahren. Das ist die Stelle, welche wir (S. 784) im Auge hatten, als wir von einer Bestätigung der Euler'schen Absicht, geometrische Anwendungen der Differentialrechnung zu schreiben, sprachen. Nach der Berührungslinie im neuen Coordinatenanfangspunkte sucht Euler die Normallinie ebendort, dann bespricht er den Fall, dass bei der vorgeschriebenen Verschiebung des Coordinatenkreuzes nicht bloss die Gleichungsconstante, sondern auch A und B verschwindet, dass also die neue Gleichung $0 = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + \cdots$ heisst und die Curve folglich in der unmittelbaren Nähe des Nullpunktes die Gestalt der Curve $0 = Ct^2 + Dtu + Eu^2$ besitzt. Hier ist $D^2 - 4CE$ für diese Gestalt ausschlaggebend. Bei $D^2 - 4CE < 0$ ist der neue Coordinatenanfangspunkt ein conjugirter Punkt der Curve; bei $D^2 - 4CE > 0$ ist er ein Doppelpunkt mit zwei verschiedenen Berührungslinien; bei $D^2 - 4CE = 0$ haben die beiden in dem Nullpunkte zusammentreffenden Curvenäste dort nur eine Berührungslinie, berühren einander. Das Wegfallen der quadratischen Glieder in Verbindung mit dem Wegfallen der Constanten und der Glieder ersten Grades und die Beziehungen dieser analytischen Erscheinung zum Vorhandensein eines dreifachen Punktes u. s. w. werden dann erörtert.

Das 14. Kapitel, Von der Krümmung der Curven, wendet sich der Lehre von den Osculationen zu, d. h. nachdem der Coordinatenanfangspunkt auf die Curve selbst gelegt ist, wird nicht die Gerade $At + Bu = 0$, sondern die krumme Linie $At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 = 0$ oder $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$ untersucht, welche in der Nähe des Nullpunktes sich an die Curve anschmiegt. In dem gewählten rechtwinkligen Coordinatensysteme (Fig. 129) ist $Mq = t$, $qm = u$. Unter der Voraussetzung, dass $At + Bu = 0$ Gleichung der Berührungslinie μM ist, welche in μ erfüllt sein muss, ist $q\mu = -\frac{A}{B}t$. Nun sei MN die Normallinie an die Curve in M und $mr \parallel MT$, während $Mr = r$, $mr = s$ heisst. Nennen wir τ den Winkel MTP, so ist tang $\tau = \frac{u}{t} = -\frac{A}{B}$, $\cos\tau = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,

Fig. 129.

$\sin\tau = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ und nach den Formeln der Coordinatendrehung, die Euler in seinem 2. Kapitel hergeleitet hat (S. 777), ist $t = \frac{Bs - Ar}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{A^2+B^2}}$, was Euler ohne weitere Begründung hinschreibt. Er findet alsdann $r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $s = \frac{Bt - Au}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Nun war $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + \cdots$ angenommen, d. h. der Ausdruck für r ist von mindestens zweiter Dimension nach t und u, während der für s nur von erster Dimension ist. Daraus folgt, wenn t und u beide unendlichkleine Grössen sind, dass r unendlichmal kleiner als s sein muss. Nach diesen Vorerörterungen setzt Euler die gefundenen Werthe von t und u in $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$ ein und findet $r\sqrt{A^2+B^2} = \frac{A^2C + ABD + B^2E}{A^2+B^2}r^2 + \frac{A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE}{A^2+B^2}rs + \frac{A^2E - ABD + B^2C}{A^2+B^2}s^2$. In dieser Gleichung ist, vermöge der erwähnten Kleinheitsbeziehung zwischen r und s, das Glied links vom Gleichheitszeichen unendlichklein 2ter Ordnung, während die Glieder rechts der Reihenfolge nach unendlichklein 4ter, 3ter, 2ter Ordnung sind, so dass die beiden ersten Glieder rechts neben dem dritten verschwinden und nur $r\sqrt{A^2+B^2} = \frac{A^2E - ABD + B^2C}{A^2+B^2}s^2$ oder $s^2 = \frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E - ABD + B^2C}r$ übrig bleibt, die Gleichung einer Parabel, welche ihren Scheitel in M besitzt und die Normallinie nebst der Berührungslinie in M als Coordinatenaxen benutzt. Die Curve aber hat im Coordinatenanfangspunkte M ebensolche Krümmung wie diese Parabel, deren Parameter $\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E - ABD + B^2C}$ ist. Nun kann, heisst es im § 308, die Krümmung keiner Curve so deutlich und leicht erkannt werden, als die des Kreises, weil dieselbe allenthalben gleich und desto grösser ist, je kleiner der Halbmesser wird. Deshalb ist es wünschenswerth, die osculirende Parabel durch einen osculirenden Kreis zu ersetzen. Man macht das so. Der Mittelpunkt des osculirenden Kreises oder Krümmungskreises liegt offenbar auf der Normallinie in einer Entfernung $MN = a$ von M, und dieses a ist dann der Halbmesser des Krümmungskreises oder der Krümmungshalbmesser. Man denkt sich die ursprüngliche x-Axe durch N gelegt, und deren Anfangspunkt A um a von N entfernt, so dass der Krümmungskreis ausser durch M auch durch A hindurchgeht. Euler sagt das Alles zwar nicht ausdrücklich, aber er nimmt die Gleichung des Krümmungskreises in der Gestalt $y^2 = 2ax - x^2$ an, woraus jene Bedingungen sich ablesen

lassen. Der Punkt M hatte die Coordinaten $x = p$, $y = q$, also muss auch $q^2 = 2ap - p^2$ sein. Die Verschiebung des Coordinatenkreuzes erfolgte mittels $x = p + t$, $y = q + u$. Die Kreisgleichung heisst alsdann $q^2 + 2qu + u^2 = 2ap + 2at - p^2 - 2pt - t^2$, oder nach Tilgung von q^2 links gegen $2ap - p^2$ rechts, auch $0 = (2a - 2p)t - 2qu - t^2 - u^2$. Vergleicht man diese Form mit $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2$, so ergiebt sich: $A = 2a - 2p$, $B = -2q$, $C = E = -1$, $D = 0$. Dann wird aber unter abermaliger Berücksichtigung von $q^2 = 2ap - p^2$ sofort $\frac{(A^2 + B^2)\sqrt{A^2 + B^2}}{A^2E - ABD + B^2C} = \frac{(4a^2 - 8ap + 4p^2 + 4q^2)^{\frac{3}{2}}}{-4a^2 + 8ap - 4p^2 - 4q^2} = -\sqrt{4a^2 - 8ap + 4p^2 + 4q^2} = -2a$. Der Kreis vom Halbmesser a wird folglich im Scheitel einer Parabel vom Parameter $2a$ sich innig mit ihr berühren, und umgekehrt ersetzt sich die Osculation einer Parabel vom Parameter b durch einen Krümmungskreis vom Halbmesser $\frac{b}{2}$, mithin ist der Krümmungshalbmesser der Curve $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + \cdots$ im Nullpunkte durch $\frac{(A^2 + B^2)\sqrt{A^2 + B^2}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$ gegeben, eine durchaus eigenartige Herleitung, über welche wir darum ausführlich berichtet haben. Um so mehr müssen wir uns mit vorübergehender Erwähnung der weiteren wichtigen Ergebnisse des 14. Kapitels begnügen. In der Formel für den Krümmungshalbmesser kommt die Quadratwurzel $\sqrt{A^2 + B^2}$ vor, die als solche positiv oder negativ sein kann. Euler zeigt, dass dieses mit der Art der Wölbung der Curve zusammenhängt. Er zeigt ferner, dass $A^2E - ABD + B^2C = 0$ die Bedingung für das Unendlichgrosswerden des Krümmungshalbmessers ist, und dass dieses in Inflexionspunkten eintrifft. Bei endlichem Krümmungshalbmesser kann weder ein Inflexionspunkt noch eine Spitze vorhanden sein, wenn auch umgekehrt das Unendlichgrosswerden des Krümmungshalbmessers nicht immer das Auftreten solcher sichtbar merkwürdigen Punkte bedingt.

Das 15. Kapitel, Von den Curven, die einen oder mehrere Durchmesser haben, erörtert die Fragen, welche bei einer symmetrischen Gestaltung der Curven auftreten, und welche zum Theil schon im voraus errathen lassen, wie die Gleichungen solcher Curven aussehen können.

Das 16. Kapitel, Von der Erfindung der Curven aus gegebenen Eigenschaften der Ordinaten, behandelt Gleichungen wie $y^2 - Py + Q = 0$, $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ u. s. w. mit von x abhängenden $P, Q, R \cdots$, deren algebraische Beziehungen zu den

abermals von x abhängenden Wurzelwerthen $y = p$, $y = q$, $y = r \cdots$ über manche Eigenschaften der Curve Auskunft geben, über das Vorhandensein von Durchmessern, über Proportionen von Streckenproducten u. dergl.

Das 17. Kapitel, Von der Erfindung der Curven aus anderen Eigenschaften, ist, so weit wir uns entsinnen können, die erste geschichtlich bekannte umfassende Behandlung von Curven, die keine Spirale sind, mittels Polarcoordinaten, wenn auch ein Name für dieses System nicht eingeführt ist. Die Entfernung des festen Punktes C von dem Curvenpunkte M bezeichnet Euler durch z, den Winkel der CM mit einer festen Geraden CA durch φ, und ist C zugleich Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y mit CA als Abscissenaxe, so findet der Uebergang aus dem einen Systeme in das andere durch $x = z \cdot \cos\varphi$, $y = z \cdot \sin\varphi$, $x^2 + y^2 = z^2$ statt. Allerdings ist für Euler die Anwendung dieser Polarcordinaten doch nur Mittel zum Zweck, und der Zweck ist die Bestimmung von Curven, welche durch eine von C ausgehende Gerade nur einmal, beziehungsweise zweimal geschnitten werden, den Punkt C selbst, falls er der Curve angehört, nicht als Schnittpunkt mitgerechnet. Dann wird bei zwei Schnittpunkten M und N die Frage nach der Curve gestellt, welche $CM^2 + CN^2$ constant sein lasse u. s. w.

Das 18. Kapitel, Von der Aehnlichkeit und Verwandtschaft der Curven, schickt gleich in seinem ersten Paragraphen (§ 435) den wichtigen Satz voraus, dass eine Gleichung mit geometrischem Sinne homogen sein müsse, wenn constante Strecken, sogenannte Parameter, von welchen eine auch als Einheit dienen kann, bei der Zählung der Dimensionen mitgerechnet werden, und dass eine nur zwischen den Coordinaten x und y ohne Parameter stattfindende homogene Gleichung überhaupt keine Curve, sondern eine Vereinigung von Geraden bedeute. Das ist also der Satz, dass jede homogene rationale ganze Function n^{ten} Grades von zwei Veränderlichen in n reelle oder imaginäre Factoren 1ten Grades zerfällt. Ist nur ein Parameter a in der Curvengleichung neben x und y vorhanden, so entstehen je nach Wahl dieses a lauter einander ähnliche Curven, welche die Eigenschaft besitzen, dass homologe Abscissen und Ordinaten in gleichem Verhältnisse stehen. Heissen etwa x, y die Coordinaten der einen, X, Y die Coordinaten der anderen ihr ähnlichen Curve, so muss $x = nX$ und $y = nY$ sein. Ist dagegen $x = mX$ und $y = nY$, so sind die beiden Curven immerhin verwandt, und Euler betrachtet nun verschiedene Formen solcher Verwandtschaft. Auch von Curven mit mehreren Parametern ist in diesem Kapitel die Rede, wo die Veränderung von einem, von zwei ...

Parametern eine Schaar von Curven in der Anzahl von unendlich, von unendlich mal unendlich ... hervorbringt, welche durch gewisse Bewegungen zu erzeugen sind.

Das 19. Kapitel, Von den Durchschnittspunkten der Curven, ist dasjenige, von welchem schon (S. 575) die Rede war, als wir ihm zwei Eliminationsmethoden entnahmen. In der That ist das Aufsuchen von Durchschnittspunkten stets nur eine Eliminationsaufgabe, insbesondere wenn neben den reellen Durchschnittspunkten auch die imaginären Berücksichtigung finden, in welchen nicht beide Coordinaten reell sind.

Das 20. Kapitel, Von der Construction der Gleichungen, benutzt das vorher über die Durchschnittspunkte der Curven Gesagte zur graphischen Darstellung der reellen Wurzeln einer Gleichung mit nur einer Unbekannten, welche zu diesem Zwecke als das Ergebniss der Elimination einer zweiten Unbekannten zwischen zwei Curvengleichungen aufgefasst wird. Es stellt sich heraus, dass zwei Gerade zur Auflösung einer Gleichung ersten Grades führen, eine Gerade und ein Kreis oder auch zwei Kreise zur Auflösung einer quadratischen Gleichung, zwei Kegelschnitte zur Auflösung einer biquadratischen Gleichung.

Das 21. Kapitel, Von den transcendenten Curven, kann selbstverständlich das Gebiet der aus transcendenten Gleichungen hervorgehenden Curven nicht entfernt erschöpfen. Nur einzelne Beispiele sind behandelt. Unter ihnen heben wir die in § 519 erörterte Curve $x^y = y^x$ hervor. Mittels $y = tx$ und $t - 1 = \frac{1}{u}$ verwandelt sich die Gleichung leicht in das Gleichungspaar $x = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$, $y = \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1}$, welches Punkte der Curve auffinden lässt. Man erhält z. B. als zusammengehörige Werte: $u = 1$, $x = 2$, $y = 4$; $u = 2$, $x = \frac{9}{4}$, $y = \frac{27}{8}$; $u = 3$, $x = \frac{64}{27}$, $y = \frac{256}{81}$.

Das 22. Kapitel, Auflösung einiger den Kreis betreffenden Aufgaben, beschliesst den der analytischen Geometrie der Ebene gewidmeten Theil, mit welchem es eigentlich gar nichts zu thun hat. In diesem Schlusskapitel handelt es sich ausschliesslich um näherungsweise Auflösung gewisser transcendenter Gleichungen mit Hilfe eines doppelten falschen Ansatzes. Die erste dieser Aufgaben verlangt die Auflösung von $s = \cos s$, die neunte und letzte die von $s = \operatorname{tng} s$.

Wir sind bei dem Anhang von den Flächen angelangt, bei dessen 1. Kapitel, Von den Oberflächen der Körper überhaupt. Nach einer rühmenden Erwähnung von Clairaut's Abhandlung über

die Curven doppelter Krümmung, deren Lehre aber nicht gesondert vorzutragen, sondern sie mit der von den Flächen zu verbinden in Euler's Absicht liege, werden die krummen Oberflächen in ihrem Gegensatze zu der Ebene als solche erklärt, die es nicht gestatten, durch irgendwelche vier Punkte derselben eine Ebene zu legen. Das dreiaxige rechtwinklige Raumcoordinatensystem der x, y, z wird eingeführt, und es wird gezeigt, wie eine Oberfläche als Versinnlichung einer Gleichung zwischen x, y, z zu betrachten sei. Die acht Octanten des Raumes, welche mit Bezug auf die Coordinatenaxen entstehen, werden unterschieden.

Das 2. Kapitel, Von den Schnitten der Flächen, wenn Ebenen durch sie gelegt werden, lehrt zunächst die Gleichungen einiger bestimmten Flächen kennen, von denen hier nur die Kugel, die Cylinderfläche, die Kegelfläche, die Umdrehungsfläche, die Fläche zweiten Grades genannt sein mögen, und zeigt dann, dass ein ebener Schnitt gefunden wird, wenn man in die Gleichung der Fläche $x = t \cdot \cos\vartheta + v \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta$, $y = v \cdot \cos\varphi \cdot \cos\vartheta - t \cdot \sin\vartheta - f$, $z = v \cdot \sin\varphi$ einsetzt. Als Kegelflächen, gebildet durch eine von A ausgehende Gerade, welche sich (Fig. 130) längs des Umfangs $MSTsm$ irgend einer Curve hinbewegt, geben sich diejenigen Flächen zu erkennen, deren Gleichung in den Coordinaten x, y, z homogen ist, also z. B. $z^2 = mzx + x^2 + y^2$. Jede einer der drei Coordinatenebenen, etwa der xy-Ebene APQ, parallele Ebene $z = h$ schneidet die Fläche in $h^2 = mhx + x^2 + y^2$, und diese Schnitte sind alle einander ähnlich, sowie sie auch von dem der Fläche angehörenden Coordinatenanfangspunkte A aus in dem Verhältnisse ihrer Entfernung von der Ebene APQ wachsen. Auf die parameterlose Homogenität der Gleichung einer Kegelfläche hatte auch Clairaut (S. 756) aufmerksam gemacht.

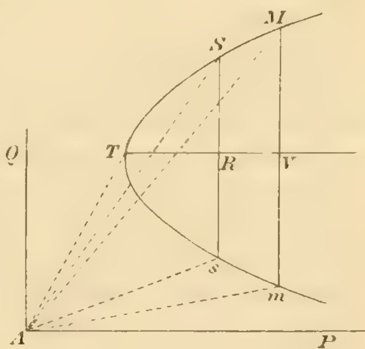


Fig. 130.

Das 3. Kapitel, Von den Cylinder-, Kegel- und Kugelschnitten, wendet das im 2. Kapitel Gelehrte auf die in der Ueberschrift genannten Flächen an und zieht insbesondere die Kegelschnitte in Betracht.

Das 4. Kapitel, Von der Verwechslung der Coordinaten, enthält die Gleichungen, welche als die Euler'schen Formeln zur Veränderung von Raumcoordinaten bekannt sind. Euler gelangt

allmälig zu denselben, indem er erstlich eine Verlegung des Anfangspunktes mittels $x = t \pm a$, $y = u \pm b$, $z = v \pm c$ vornimmt, zweitens drei Drehungen von Geraden und von Ebenen nach einander vollziehen lässt, welche zu den Endformeln $x = p(\cos\zeta \cdot \cos\vartheta - \sin\zeta \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\eta) + q(\cos\zeta \cdot \sin\vartheta + \sin\zeta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\eta) - r \sin\zeta \cdot \sin\eta \pm a$; $y = -p(\sin\zeta \cdot \cos\vartheta + \cos\zeta \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\eta) - q(\sin\zeta \cdot \sin\vartheta - \cos\zeta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\eta) - r \cos\zeta \cdot \sin\eta \pm b$; $z = -p \sin\vartheta \cdot \sin\eta + q \cos\vartheta \cdot \sin\eta + r \cos\eta \pm c$ führen. Die Coordinatenecke des ursprünglichen wie des umgewandelten Systems ist rechtwinklig. Der Grad der Gleichungen bleibt unverändert. Aehnlicherweise zeigen die im 2. Kapitel des Anhangs entwickelten Formeln, dass der ebene Schnitt einer Fläche von gleichem Grade wie die Fläche selbst ist. Die Fläche 1ten Grades $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ kann mithin durch eine Ebene nur in einer Linie 1ten Grades, d. h. in einer Geraden, geschnitten werden, und dadurch bestätigt sich, dass die Fläche 1ten Grades eine Ebene sein muss.

Das 5. Kapitel, Von den Flächen 2ten Grades, wagt sich an die vor Euler niemals gestellte Aufgabe, die allgemeine Gleichung $\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 + \eta z + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0$ auf ihren geometrischen Sinn zu befragen, beziehungsweise Unterscheidungen je nach dem Werthe der einzelnen Coefficienten zu versuchen. War bei den Curven die Frage nach dem Vorkommen unendlicher Aeste für die Eintheilung der Curven von Wichtigkeit, so stellt sich auch bei Flächen die Frage nach unendlich fernen Flächenpunkten ein. Sie erfordern, dass mindestens eine Coordinate unendlich gross werde, und, da man bei Benennung der Axen freie Wahl hat, so sei $z = \infty$ in einem unendlich fernen Punkte. Dort kommt $\eta z + \varkappa$ gegen αz^2, ϑy gegen βyz, ιx gegen γxz nicht mehr in Betracht, und die im Unendlichen den Ausschlag gebenden Gleichungsglieder vermindern sich auf $\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 = 0$, welches zwar eine von der ursprünglichen Fläche verschiedene Fläche ist, die aber gleichwohl bei $z = \infty$ mit jener zusammenfällt ähnlicherweise wie Asymptoten mit Curven. Da alle Glieder der neuen Gleichung vom 2ten Grade nach x, y, z sind, so hat man es, wie im 2. Kapitel des Anhangs gezeigt worden war, mit einer Kegelfläche zu thun, welcher der Name des Asymptotenkegels beigelegt wird. Aus dessen Gleichung folgt $2\alpha z = -\beta y - \gamma x \pm \sqrt{[(\beta^2 - 4\alpha\delta)y^2 + 2(\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)xy + (\gamma^2 - 4\alpha\zeta)x^2]}$. Ein unendlich ferner Flächenpunkt in der Richtung der z-Coordinate ist nicht vorhanden, wenn der Asymptotenkegel nur aus dem Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ besteht, d. h. wenn jede Wahl von x und y ausserhalb des Nullpunktes ein imaginäres z hervorbringt. Die Bedingungen dafür

sind $4\alpha\zeta > \gamma^2$, $4\alpha\delta > \beta^2$, $4\delta\zeta > \alpha^2$, $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta > \alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$, deren Eintreten eine rings begrenzte, im Endlichen verlaufende Fläche anzeigen. Das Fehlen auch nur einer dieser Bedingungen beweist das Vorhandensein eines Asymptotenkegels, der also sicherlich schon als Folge von $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 > \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ sich ergiebt. Ist $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, so wird die Gleichung des Asymptotenkegels zu $2\alpha z = -\beta y - \gamma x \pm \left[y\sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\delta)} + x\sqrt{(\gamma^2 - 4\alpha\zeta)}\right]$, d. h. sein Gleichungspolynom zerfällt in zwei Factoren, die reell verschieden, oder imaginär, oder reell einander gleich sein können. Im Ganzen sind folglich fünf Geschlechter von Flächen 2ten Grades zu unterscheiden. Nach Gewinnung dieser Erkenntniss wendet Euler eine Drehung der Coordinatenecke unter Anwendung seiner aus dem 4. Kapitel des Anhangs bekannten Formeln an, während eine Verschiebung zunächst unterbleibt, also $a = b = c = 0$ sind. Die drei Winkel, welche in jenen Formeln vorkommen, können so gewählt werden, dass drei Coefficienten in der neuen Gleichung verschwinden, und dass diese bei aller Allgemeinheit nur noch $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Gp + Hq + Jr + K = 0$ heisst. Die in diesem Augenblicke vorgenommene Verschiebung der Coordinatenecke gestattet auch die Coefficienten der ersten Potenzen der Coordinaten zum Verschwinden zu bringen, und alsdann bleibt die noch immer allgemeine Gleichung $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = a^2$ übrig. Aus ihr folgt, dass jede der drei Coordinatenebenen eine Diametralebene der Fläche sein muss, d. h. zu jedem Punkte einer Coordinatenebene giebt es zwei zu ihm symmetrisch liegende Flächenpunkte. Der Coordinatenanfangspunkt selbst ist Mittelpunkt der Fläche, ob er gleich, setzt Euler in § 115 des Anhangs sofort hinzu, in einigen Fällen unendlich weit entfernt ist. Die Unterscheidung von Geschlechtern der Fläche legt die Vorzeichen der Coefficienten A, B, C und deren Verschwinden zu Grunde. Man sieht, dass Euler bei seinem ersten Versuche einer Discussion der Flächengleichung 2ten Grades der Hauptsache nach bereits den Weg eingeschlagen hat, der noch heute vielfach gewählt wird, um die gleiche Aufgabe zu lösen.

Das 6. Kapitel, Von den Durchschnitten zweier Flächen, ist die Einlösung des von Euler in der Einleitung zum Anhange gegebenen Versprechens, die Curven doppelter Krümmung von den Flächen aus behandeln zu wollen. In der That bilden irgend zwei Flächen, deren keine eine Ebene ist, bei ihrem Durchschnitte eine Curve doppelter Krümmung, und will man dieselbe genauer kennen lernen, so löst sich diese Aufgabe dadurch, dass man zwischen den beiden Flächengleichungen der Reihe nach z, y, x eliminirt und so drei Gleichungen erhält: eine zwischen x, y, eine zweite zwischen x, z,

eine dritte zwischen y, z, von welchen aber nur zwei gegeben zu sein brauchen, da die dritte als Folgerung aus diesen beiden entsteht. Erschiene dabei eine Projectionsgleichung, welche geometrisch keinen Sinn besitzt, wie z. B. $x^2 + y^2 + a^2 = 0$, so wäre dieses ein Kennzeichen dafür, dass die beiden Flächen sich nirgend schneiden. Führt die Projectionsgleichung zu einem Punkte als bildliche Darstellung, so berühren die Flächen einander in einem Punkte. Berührung der beiden Flächen in einer Linie verlangt das Auftreten einer Projectionsgleichung des Durchschnittes mit gleichen Wurzeln. In einem Beispiele wird der Schnitt der Kugel $z^2 + y^2 + x^2 = a^2$ mit der Ebene $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ gesucht. Einsetzung von $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ in die Kugelgleichung giebt als xy-Projection des Durchschnittes die Ellipse $f^2 - \alpha^2 a^2 - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta^2) y^2 + 2\beta\gamma xy + (\alpha^2 + \gamma^2) x^2 = 0$, aus welcher $y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha\sqrt{[a^2(\alpha^2 + \beta^2) - f^2 + 2\gamma f x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) x^2]}}{\alpha^2 + \beta^2}$ entsteht. Nimmt man nun an, es sei $f = a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, so geht der Werth von y über in $y = \frac{\beta a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \beta\gamma x \pm \alpha\sqrt{-(\gamma a - x\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2})^2}}{\alpha^2 + \beta^2}$, welches nur dann reell ist, wenn die imaginäre Quadratwurzel verschwindet, d. h. wenn $x = \frac{\gamma\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$. Alsdann wird $y = \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$ und $z = \frac{\alpha a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$, d. h. Ebene und Kugel haben nur den einen Punkt gemein, welcher ihr Berührungspunkt ist. Als leichtestes Mittel, die Berührungsebene einer Fläche in einem bestimmten Punkte M zu finden, wird gelehrt, man solle die Fläche in dem Berührungspunkte durch eine Ebene schneiden und die Berührungslinie an die Schnittcurve in M suchen, diese müsse in der die Fläche berührenden Ebene liegen. Nehme man dann einen zweiten durch M hindurchgehenden ebenen Schnitt mit seiner Berührungslinie in M, so bestimmen die beiden Berührungslinien die gesuchte Berührungsebene. Wir erinnern uns auch dieses Satzes bei Clairaut (S. 757), und Euler's Beweisführung in § 147 des Anhangs ist um nichts schärfer als die Clairaut's. Allerdings könnte für Euler eine gewisse Entschuldigung leichter als für Clairaut gefunden werden. Dieser nämlich bediente sich aller Hilfsmittel, welche die Infinitesimalrechnung ihm bot, während Euler ohne dieselben auskommen wollte. Er beabsichtigte vielleicht, wie wir wiederholt gesagt haben, eine höhere Geometrie als besonderes Werk zu schreiben, und in diesem Sinne könnten die letzten Worte des Anhangs verstanden werden müssen: Reicht das Bisherige nicht hin, so ist dazu die Analysis des Unendlichen erforderlich, wozu die gegenwärtigen Bücher den Weg bahnen.

116. Kapitel.

Analytische Geometrie 1748—1756. Cramer.

Euler's Introductio, ein Werk, dem wir jetzt, nachdem wir über beide Bände berichtet haben, die Bezeichnung als eines der inhaltreichsten, der schönsten, der fruchtbarsten, die jemals die Presse verliessen, verleihen dürfen, ohne Widerspruch von unseren Lesern zu befürchten, war wahrscheinlich noch im Drucke begriffen, als Euler der Berliner Akademie zwei zusammenhängende Aufsätze einreichte, durchaus geeignet, bei den Geometern im engeren Sinne dieses Wortes Aufsehen zu erregen. Die Ueberschriften lauten: *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*[1], über einen scheinbaren Widerspruch in der Curvenlehre, und *Démonstration sur le nombre des points où deux lignes d'un ordre quelconque peuvent se couper*[2], über die Anzahl der Schnittpunkte zweier Curven beliebigen Grades.

Der im ersten Aufsatze gemeinte Widerspruch ist folgender. Eine Curve n^{ten} Grades besitzt in ihrer allgemeinsten Gleichung $\frac{n^2+3n}{2}$ Coefficienten, ist also durch ebensoviele Punkte bestimmt, z. B. eine Curve 2ten Grades durch 5 Punkte, eine Curve 3ten Grades durch 9 Punkte. Eine Curve m^{ten} Grades und eine solche n^{ten} Grades können einander höchstens in mn Punkten schneiden, zwei Curven 3ten Grades also in 9 Punkten. Dann giebt es aber zwei Curven 3ten Grades, die durch 9 gegebene Punkte gehen, und die 9 Punkte bestimmen die Curve nicht. Noch auffälliger ist der Widerspruch bei Curven von höherem als dem 3ten Grade, bei welchen immer $n^2 > \frac{n^2+3n}{2}$ ist. Euler zeigt, dass hierdurch nur der Beweis geliefert ist, es sei nicht immer wahr, dass $\frac{n^2+3n}{2}$ Punkte zur Bestimmung einer Curve n^{ten} Grades ausreichen, weil diese Bestimmung auf der Auffindbarkeit von $\frac{n^2+3n}{2}$ Coefficienten aus ebensovielen Gleichungen 1ten Grades, welche die erwähnten Coefficienten als Unbekannte besitzen, beruht, während jene Auffindbarkeit nur dann vorhanden ist, wenn die betreffenden Gleichungen alle von einander unabhängig sind. Seien z. B. (Fig. 131) 9 Punkte $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ quadratisch geordnet, und sei a

a •	b •	c •
d •	e •	f •
g •	h •	i •

Fig. 131.

[1] *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748, T. IV, 219—233.
[2] Ebenda T. IV, 234—248.

die Entfernung von je zwei neben einander oder senkrecht unter einander liegenden Punkten[1]). Sei e der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten mit der Abscissenaxe def und der Ordinatenaxe beh. Man erkennt sofort, dass die Curve $my(y^2 - \alpha^2) = nx(x^2 - \alpha^2)$ durch die 9 Punkte hindurchgeht, d. h. dass diese Gleichung durch die Coordinaten der 9 Punkte erfüllt ist, welchen Zahlenwerth auch m und n besitzen. Wählt man also einmal m_1 und n_1, ein andresmal m_2 und n_2 u. s. w., so erhält man beliebig viele Curven 3[ten] Grades, die alle durch jene 9 Punkte hindurchgehen, und die mit Ausnahme der Fälle $m = 0$, oder $n = 0$, oder $m = n$, oder $m = -n$ wirkliche Curven sind. In jenen Ausnahmefällen hat man es mit drei Geraden, oder mit einer Geraden und einer Ellipse zu thun, da die Gleichungen alsdann $x(x + \alpha)(x - \alpha) = 0$, $y(y + \alpha)(y - \alpha) = 0$, $(y - x)(y^2 + xy + x^2 - \alpha^2) = 0$, $(y + x) \cdot (y^2 - xy + x^2 - \alpha^2) = 0$ heissen.

Der zweite Aufsatz versucht den allgemein als wahr angenommenen, aber niemals streng bewiesenen Satz von den mn Durchschnittspunkten einer Curve m^{ten} Grades mit einer solchen n^{ten} Grades, wofern man die im Unendlichen liegenden, sowie die imaginären Durchschnittspunkte mitzählt, Curven dagegen, die in einzelnen gradlinigen oder krummlinigen Aesten zusammenfallen, nicht als einander schneidend auffasst, zu sichern. Wir haben wiederholt von diesem Satze gesprochen, haben auch über Euler's versuchten Beweis von 1748 bei Gelegenheit der Aufgabe, eine Unbekannte zwischen zwei Gleichungen zu eliminiren (S. 578), berichtet und damals hervorgehoben, Euler scheine selbst die Empfindung von der Unzulänglichkeit seiner Folgerungen besessen zu haben.

Auch in dem unmittelbar folgenden Bande der Berliner Veröffentlichungen[2]) begegnen wir einem Aufsatze Euler's: *Sur le point de rebroussement de la seconde espèce de M. le Marquis de l'Hôpital.* Es ist eine Rechtfertigung von De L'Hôpital's Rückkehrpunkten zweiter Art, die einem Schnabel gleichen[3]), gegen De Gua's Angriffe (S. 771). De Gua sei allerdings berechtigt gewesen anzunehmen, eine Curvengleichung lasse sich, wenn die Abscissenaxe die Curve im Coordinatenanfangspunkte berühre, in die Form $y = \frac{x^2}{2a} \pm Ax^m \pm Bx^n \pm Cx^k \pm \cdots$ bringen, aber die weitere Folgerung, jene

[1]) Bei Euler heisst die Entfernung a. Wir wählten α, um die Verwechslung mit dem Punkte a auszuschliessen. [2]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749. T. V, 204—221. [3]) *semblables à un bec d'oiseau* sagt Euler in § 1 seines Aufsatzes unter erstmaliger Anwendung dieses Ausdrucks.

Gleichung gehe in unmittelbarer Nähe jenes Anfangspunktes in $y = \frac{x^2}{2a}$ über, und deshalb müsse die Curve auf der positiven und auf der negativen Abscissenseite, unmittelbar nach wie unmittelbar vor dem Anfangspunkte, genau die gleiche Gestalt haben, sei irrig. Die Glieder mit höheren Exponenten verschwinden gegen x^2 nur, wenn sie reell sind, d. h. wenn $m, n, k \cdots$ ganze Zahlen oder Brüche mit ungradem Nenner sind. Sei etwa $y = x + x\sqrt{x}$ die Gleichung einer durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Curve. Nach De Gua's Auffassung müsste die Curve mit der Geraden $y = x$ nahezu zusammenfallen, also im Anfangspunkte die Abscissenaxe unter einem Winkel von 45° schneiden. Das findet aber nur nach der positiven Abscissenseite zu statt, während auf der negativen Seite $y = -x - x\sqrt{-x}$ imaginär ist und das Aufhören der Curve im Coordinatenanfangspunkte anzeigt. Die Curve $(y - x)^2 = x^3$ erstreckt sich nur nach der Seite der positiven x und hat im Coordinatenanfangspunkte einen Rückkehrpunkt erster Art. Nun betrachte man $(y - \alpha x^2)^2 = \beta^2 x^5$ oder $y = \alpha x^2 + \beta x^2 \sqrt{x}$ (Fig. 132). Die Parabel $y = \alpha x^2$ erstreckt sich als $L'AL$ rechts und links von der Ordinatenaxe, aber die Curve $(y - \alpha x^2)^2 = \beta^2 x^5$ hat nur die Aeste AM, AN mit gleichen Ordinatenentfernungen LM von der Parabel nach oben und unten, während auf der negativen Abscissenseite kein Curvenpunkt vorhanden ist. In A findet ein Rückkehrpunkt zweiter Art statt, welchen De Gua gemeint hatte, leugnen zu sollen. Euler macht dazu die Bemerkung, der Halbmesser der Evolute sei in jenem Punkte von endlicher Grösse[1]. Er meint damit, der Krümmungshalbmesser von $(y - \alpha x^2)^2 = \beta^2 x^5$ sei bei $x = y = 0$ von endlichem Werthe, und in der That wird derselbe dort $\frac{1}{2\alpha}$. Ist $y = \alpha x^k + \beta x^{k + \frac{m}{n}}$ und m eine ungrade, n eine grade Zahl, damit das Glied $\beta x^{k + \frac{m}{n}}$ ein doppeltes Vorzeichen besitze, so verläuft die Curve immer in zwei Aesten vom Coordinatenanfangspunkte nach der positiven Abscissenseite. Der Exponent k übt einen eigenthümlichen Einfluss auf die Gestalt der Curve[2], ohne dass auf

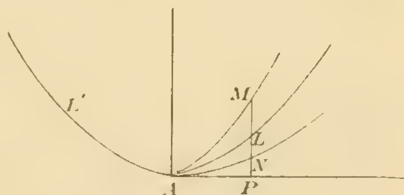


Fig. 132

[1] *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749, T. V, 210: *La courbe a au commencement où x = 0, un point de rebroussement de la seconde espèce, et le rayon de la développée est dans ce point d'une quantité finie.* [2] Ebenda T. V, 211—212.

die Ganzzahligkeit von k, vorausgesetzt dass es, wenn gebrochen, keinen graden Nenner besitzt, also keine Zweideutigkeit von ax^k bedingt, Gewicht zu legen wäre. Wir haben gesehen, dass im Anfangspunkte der Coordinaten, der zugleich Anfangspunkt der Curve ist, ein Rückkehrpunkt stattfindet. Er ist, wie wir auch schon gesehen haben, erster Art bei $k = 1$. Bei $k > 2$ ist er zweiter Art und der Krümmungshalbmesser unendlichgross. Bei $1 < k < 2$ ist der Rückkehrpunkt wieder zweiter Art und der Krümmungshalbmesser 0. Bei $k < 1$ wird die Curve senkrecht zur Abscissenaxe mit einem Rückkehrpunkte zweiter Art, in welchem die Ordinatenaxe beide Curvenäste berührt, und der Krümmungshalbmesser ist 0 bei $\frac{1}{2} < k < 1$ und ∞ bei $k < \frac{1}{2}$. Euler geht hier auch bezüglich des Krümmungshalbmessers wesentlich über das hinaus, was De L'Hôpital (S. 238) angegeben hatte.

Noch 1748 erschien in Mailand ein von einer Dame verfasstes Werk, dessen wir hier wie der Verfasserin, Maria Gaetana Agnesi[1]) (1718—1799), zu gedenken haben. Eine Hauptquelle für die Kenntniss ihres Lebens ist eine von Antonio Francesco Frisi herrührende Lobrede. Man darf diesen natürlich nicht mit seinem Bruder Paolo Frisi (1728—1784), Professor der Mathematik in Mailand und Verfasser verschiedener anderer Lobreden, welcher 15 Jahre vor der Agnesi starb, verwechseln. Maria Agnesi war in Sprachen ausserordentlich bewandert und hat auch der Mathematik erfolgreiche Bemühungen zugewandt. Nicht als ob sie, sagt ihr Lobredner, eine tiefe Spur von sich hinterlassen hätte, aber sie nahm einen ehrenvollen Platz unter den grossen Mathematikern des XVIII. Jahrhunderts ein. Im Juni 1748 nahm die Akademie von Bologna sie unter ihre Mitglieder auf, im gleichen Jahre erschienen die *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* von Maria Agnesi in zwei starken Quartbänden, und dieses Werk wurde so sehr geschätzt, dass es ins Englische und wenigstens der zweite Band auch ins Französische übersetzt wurde. Zwei Pariser Akademiker, De Mairan und Montigny, rühmten das Werk als das vollständigste und bestgearbeitete seiner Art. Unter mancherlei Curven, an welchen die Methoden der Infinitesimalrechnung geübt werden, ist auch eine, mit welcher schon Fermat bekannt war, der sich in seiner Abhandlung über die Quadraturen[2]) mit der Gleichung $b^3 = a^2e + b^2e$ und mit der Fläche der

[1]) J. Boyer, *La mathématicienne Agnesi* in der *Revue Catholique des Revues françaises et étrangères* vom 20. März 1897, pag. 451—458. — Gino Loria, *Versiera visiera e pseudo-versiera* in der *Bibliotheca mathematica* 1897, pag. 7—12 und pag. 33—34. [2]) Fermat, *Oeuvres* I, 279—280 und III, 233—234.

durch diese Gleichung bezeichneten Curve beschäftigte. Da Fermat a für die Abscissen, e für die Ordinaten, b für irgend eine constante Strecke zu schreiben pflegte (Bd. II, S. 745), so war jene Curve die mit der Gleichung $a^3 = (a^2 + x^2)y$, aber Fermat hat sie weder gezeichnet noch sich eingehender mit ihr beschäftigt. Er hat nur gezeigt, dass, wenn man Substitutionen vornimmt, welche wir in die Formeln $y = \frac{\eta^2}{a}$, $x = \frac{a\xi}{\eta}$ kleiden dürfen, die Kreisgleichung $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ entstehe, dass folglich die Quadratur der ursprünglichen Curve von der des Kreises abhängen müsse.

Maria Agnesi hat eine geometrische Definition der Curve ausgesprochen und hat ihr von ihrer geschwungenen Gestalt (Fig. 133) den Namen *versiera* beigelegt[1]), den wir bei der sprachwissenschaftlichen Gewandtheit seiner Erfinderin mit *vertere* (wenden) in Verbindung zu bringen alle Veranlassung haben. Die Definition ist folgende: Ein Kreis mit seinem Durchmesser $AC = a$ sei gegeben, ebenso seine Berührungslinien AG, CE an den Endpunkten des Durchmessers, AG und AC sind Theile der im Anfangspunkte A senkrecht zu einander stehenden Coordinatenaxen. Wird BM in irgend einem Punkte B der AC senkrecht errichtet und der Punkt M dieser Senkrechten mittels der Proportion $AB : AC = BD : BM$ bestimmt, so gehört er der Curve an. Eine bequeme Construction von M ist folgende: Nachdem $BD \perp AC$ gezogen ist, verbindet man A mit D gradlinig bis zum Durchschnitte mit CE und zieht dann $EM \parallel AC$. Ist $AB = y$, $BM = x$, so heisst die Proportion $y : a = \sqrt{y(a - y)} : x$, und daraus findet man die Gleichung $a^3 = (a^2 + x^2)y$.

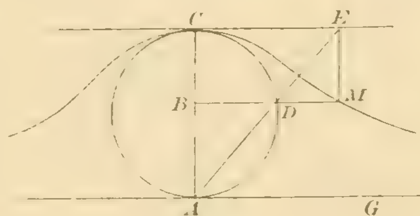


Fig. 133.

Wenn wir uns jetzt der im Jahre 1750 erschienenen *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* von Gabriel Cramer zuwenden, von welcher schon im 106. Kapitel (S. 584 flgg.) die Rede war, so könnte die Zeit der Veröffentlichung vermuthen lassen, das Werk sei unter dem ganzen Einflusse von Euler's Introductio verfasst, wenn nicht Cramer dem widerspräche, ein Widerspruch, der allerdings einen fast mehr als unbedingten Glauben an Cramer's Wahrhaftigkeit von dem Leser verlangt. Newton's Enumeratio, Stirling's Curven

1) Agnesi, *Istituzioni analitiche* I, 380—381 und 391—393.

3ten Grades, die Aufsätze von Nicole, von Bragelongne, die uns im 114. Kapitel bekannt geworden sind, De Gua's Usage de l'Analyse de Descartes nennt Cramer als von ihm benutzte Vorarbeiten, um alsdann fortzufahren[1]): Ich würde grossen Nutzen aus Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichkleinen gezogen haben, wenn dieses Buch mir früher bekannt geworden wäre. Da sein Gegenstand fast der gleiche wie der meinige ist, so ist darüber nicht zu staunen, dass unsere Folgerungen einander oftmals begegnen. Allein der Unterschied der Methode ist so gross, als er nur bei Bearbeitung des gleichen Gegenstandes sein kann. Ich sage das nicht, um dem Wege, den ich eingeschlagen habe, vor dem Euler's einen Vorzug zu beanspruchen, sondern nur um den Leser auf die Verschiedenheit hinzuweisen.

Wir wollen über Cramer's ungemein ausführliches auf 680 Quartseiten sich ausdehnendes Werk genauer, wenn auch so kurz als thunlich berichten und vorausschicken, dass Cramer nicht weniger als 33 Tafeln sorgfältig gezeichneter Figuren beigegeben hat, aus welchen man den Lauf vieler auch recht absonderlicher Curven genau kennen lernt.

Das 1. Kapitel, Von der Natur der Curven im Allgemeinen und ihren Gleichungen, beschränkt zunächst die Untersuchung auf ebene Curven unter Ausschluss derjenigen von doppelter Krümmung[2]). Jede Curve kennzeichnet sich durch eine Gleichung zwischen den in einem beständigen Winkel gegen einander geneigten Strecken x, y, welche ihre Coordinaten heissen. Die Art der Gleichung beeinflusst die Natur der Curven, und nun tritt die zweite Beschränkung auf algebraische Curven ein[3]). Zahlreiche Beispiele lehren die Eindeutigkeit und Vieldeutigkeit der Ordinaten, ihre endliche oder unendliche Grösse, ihr Imaginärwerden bei gewissen Abscissenwerthen kennen. Man erfährt von der Vereinigung mehrerer Curven, deren Gleichungspolynome mit einander vervielfacht $= 0$ gesetzt werden[4]), von der Erleichterung beim Aufsuchen einzelner Curvenpunkte, die darin liegt, dass man nicht y als Function von x, sondern x und y als Functionen einer dritten Veränderlichen z darstellt[5]), wie z. B. $y^4 + x^2y^2 + 2y^3 - x^3 = 0$, indem man $x = yz$ einsetzt, in $y = \frac{z^3 - 2}{z^2 + 1}$, $x = \frac{z^4 - 2z}{z^2 + 1}$ übergeht. Es fällt sehr schwer, hierbei nicht an das zu denken, was wir (S. 679) aus dem 3. Kapitel des I. Bandes der Introductio berichteten, insbesondere wenn man berück-

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes. Préface* pag. XI. [2]) Ebenda pag. 3. [3]) Ebenda pag. 8. [4]) Ebenda pag. 28. [5]) Ebenda pag. 34.

sichtigt, dass Cramer wie Euler bei dieser Parameterdarstellung der Curvengleichung, um einen unserer Zeit angehörenden Kunstausdruck zu gebrauchen, an nichts Anderes dachten, als an die Möglichkeit, dadurch ohne grosse Mühe beliebig viele einzelne Curvenpunkte ermitteln zu können. Auf die Gleichung einer Zusammensetzung von Raumgebilden zurückgreifend, bemerken wir, dass Cramer ein nicht in Factoren zerlegbares Gleichungspolynom irreductibel[1]) genannt hat, und dass er an einer späteren Stelle[2]) von reductiblen Gleichungen neben den irreductiblen spricht, um die Zerlegbarkeit oder Nichtzerlegbarkeit des Gleichungspolynoms in Factoren anzudeuten.

Das 2. Kapitel, Von den Veränderungen, welche die Gleichung einer Curve bei Beziehung derselben auf andere Coordinaten erleidet, unterscheidet die Fälle der Verlegung des Anfangspunktes, der Drehung der Coordinatenaxen, der Vereinigung beider Veränderungen und giebt für jeden Einzelfall die ihm entsprechenden Formeln.

Das 3. Kapitel, Von den verschiedenen Ordnungen der algebraischen Linien, spricht von dem Grade der Curvengleichungen, welcher mit der Ordnung der Curven oder Linien zusammenfällt[3]). Den gleichen Tausch der beiden Wörter gestatteten sich nahezu alle Schriftsteller. Wird eine Coordinatenveränderung von den x und y zu neuen geradlinigen Coordinaten z und u vorgenommen, was mittels $x = m + pz + ru$, $y = n + qz + su$ geschieht, so bleibt, wie De Gua bemerkt habe, der Grad der Gleichung unverändert[4]). Wir haben in der That auf diesen Satz bei de Gua (S. 772), auf eben denselben bei Euler (S. 777) hingewiesen. Nun folgt die Schilderung von Newton's Parallelogramm, von De Gua's Dreieck[5]), von welcher (S. 585) die Rede war, und auch was wir (S. 586—588) aus dem Anhange zu Cramer's Werke berichteten, schliesst sich eng an das 3. Kapitel an, denn nach der Bemerkung, dass die allgemeinste Curvengleichung v^{ten} Grades aus $\frac{(v+1)(v+2)}{2}$ Gliedern mit $\frac{v(v+3)}{2}$ Coefficienten bestehe, und dass diese Coefficienten aus der Kenntniss eben so vieler Punkte, welche der Curve angehören sollen, mittels lauter Gleichungen 1ten Grades gefunden werden können, verweist Cramer[6]) für die Ausführung dieser algebraischen Aufgabe auf seinen ersten Anhang und weiter unten[7]) auf seinen zweiten Anhang für den Beweis

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 29. [2]) Ebenda pag. 53. [3]) Ebenda pag. 53. [4]) Ebenda pag. 54. [5]) Ebenda pag. 54—57. [6]) Ebenda pag. 60. [7]) Ebenda pag. 76.

des Satzes, dass eine Curve m^{ten} und eine Curve n^{ten} Grades einander höchstens in mn Punkten schneiden. Findet sich eine Ausnahme davon, hat z. B. die in fünf Punkten erfüllte Gleichung 2ten Grades mit einer Gleichung 1ten Grades drei Wurzeln gemein, so stellt jene Gleichung 2ten Grades keine Curve, sondern zwei Gerade dar, deren eine durch drei von den gegebenen Punkten, die andere durch die zwei übrigen Punkte geht[1]. Gleichfalls als Paradoxon, dessen Lösung keine Schwierigkeit bereite, stellt Cramer es dar[2], dass zwei Curven 3ten Grades einander in neun Punkten schneiden, also beide durch diese neun Punkte hindurchgehen, während doch $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ Punkte eine cubische Curve bestimmen sollten, ein Paradoxon, welches bei Curven v^{ten} Grades noch schärfer hervortrete, sobald $\frac{v(v+3)}{2} < v^2$ sei. Der Grund dieser Erscheinung liege darin, dass n Gleichungen 1ten Grades zwar im Allgemeinen zur Bestimmung von n Unbekannten ausreichen, dass aber auch Umstände eintreten können, welche eine Unbestimmtheit einiger Unbekannten bedingen. Das ist auch (S. 793) von Euler 1748 bemerkt und veröffentlicht worden, doch scheint Cramer davon nicht gewusst zu haben, wenigstens nennt er Euler nicht. Die geometrisch merkwürdige Thatsache hat unter Benutzung von Cramer's Ausdruck den Namen des Euler-Cramer'schen Paradoxon erhalten.

Das 4. Kapitel, Einige Bemerkungen über die geometrische Construction von Gleichungen, will zeigen, wie die Durchschnittspunkte zweier Curven zur Auffindung der Wurzeln einer Gleichung mit nur einer Unbekannten nutzbar zu machen sind. Sei y die Unbekannte der aufzulösenden Gleichung, welche die Anfangsgleichung heissen mag, so kann fast nach Belieben eine Curvengleichung zwischen y und einer Hilfsunbekannten x aufgestellt und mit ihrer Hilfe eine Umformung der Anfangsgleichung vorgenommen werden, welche die zweite Curvengleichung erzeugt. Die Ordinaten der Durchschnittspunkte beider Curven sind die Wurzeln der Anfangsgleichung. Beispielsweise[3] wird $y^3 = a^2b$ auf $y^2 = ax$ in Verbindung mit $x^2 = by$ zurückgeführt. Allerdings hat die betonte angenäherte Willkür, die bei der Wahl der ersten Curvengleichung herrscht[4], ihre Grenzen. Der Schnittpunkt, der eine Gleichungswurzel liefern soll, darf kein imaginärer sein. Man hat $y^4 + 15a^3y$

[1] Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 77–78. [2] Ebenda pag. 78–79. [3] Ebenda pag. 80–81. [4] Ebenda pag. 83: *le choix de la première des deux équations indéterminées qui servent à construire une Egalité est presque arbitraire.*

$+ 14a^4 = (y + a)(y + 2a)\left(y - \frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{-19}\right)\left(y - \frac{3a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{-19}\right)$. Wählt man nun die Curvengleichungen $y^3 - ax^2 = 0$, $yx^2 + 15a^2y + 14a^3 = 0$, welche durch Elimination von x die Anfangsgleichung liefern, so zeigt sich, dass unter Voraussetzung von $a > 0$ die Curve $y^3 - ax^2 = 0$ nur oberhalb der Abscissenaxe, die Curve $yx^2 + 15a^2y + 14a^3 = 0$ nur unterhalb der Abscissenaxe verläuft, dass also ausschliesslich imaginäre Durchschnittspunkte der beiden Curven stattfinden, während die Anfangsgleichung zwei reelle Wurzeln besitzt[1]). Eine andere Schwierigkeit kann dadurch entstehen, dass die Curven mehr reelle Durchschnittspunkte besitzen, als die Anfangsgleichung reelle Wurzeln. Diese Unbequemlichkeit erscheint, wenn zwei Durchschnittspunkte in Bezug auf die Hilfsunbekannte zwar verschieden, in Bezug auf die anfängliche Unbekannte aber in Uebereinstimmung sind[2]).

Diese Schwierigkeiten bildeten schon den Inhalt einer wissenschaftlichen Auseinandersetzung zwischen Rolle und De la Hire in den Veröffentlichungen der Pariser Akademie von 1708, 1709, 1710, welche im 98. Kapitel ihre Erwähnung hätten finden sollen, sie bildeten dann 1727 den Gegenstand eines Aufsatzes von Jacob Hermann[3]). Hier findet sich die Bemerkung, man solle als erste Curve eine solche wählen, deren Ordinaten von 0 beginnend alle Werthe bis ∞ (Hermann meint wohl eigentlich bis $\pm\infty$) durchlaufen, damit unter ihnen jedenfalls die reellen Wurzelwerthe der Anfangsgleichung, deren Unbekannte die Ordinate geworden ist, vorkommen[4]). Dann findet sich bei Hermann eine zweite Regel[5]). Sei die Anfangsgleichung vom Grade $2n$, was entweder thatsächlich der Fall ist, oder, wenn ihr Grad $2n - 1$ gewesen sein sollte, durch Vervielfachung mit y erzielt werden kann. Dann giebt es einen Ausdruck $y^n + gy^{n-1} + \cdots + k$, welcher genau oder annähernd die Quadratwurzel des Gleichungspolynoms der Anfangsgleichung darstellt, und dessen Coefficienten man soviel als möglich durch Vergleichung von $(y^n + gy^{n-1} + \cdots + k)^2$ mit dem Gleichungspolynome der Anfangsgleichung bestimmt. Man soll alsdann die parabolische Curve $mx = y^n + gy^{n-1} + \cdots + k$ als erste Curvengleichung wählen und mittels ihrer und der Anfangsgleichung durch Einsetzung von mx in letztere die zweite Curvengleichung sich verschaffen.

---

[1] Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 84—85. [2] Ebenda pag. 85—86. [3]) *Observatio in schediasma Rollii de constructione aequationum. Miscellanea Berolinensia* T. III, 131—146. [4] Ebenda III, 135. [5]) Ebenda III, 142—143.

Cramer eignet sich in seinem 4. Kapitel unter Berufung auf Hermann diesen Vorschlag in der Form an, man solle die erste Curve so wählen, dass in ihrer Gleichung die Hilfsunbekannte nur in erster Potenz auftrete, weil dann sicherlich nur eindeutige reelle Werthe derselben in Frage kommen können[1]). Auch eine andere Grenze hat man der Wahl der ersten Curvengleichung gesteckt, indem man die beiden Curven von so wenig als möglich verschiedenem Grade zu erhalten wünscht oder noch andere Zwecke erfüllen will, wofür Cramer gleichfalls Regeln aufstellt, die zwar schon von Jacob Bernoulli, von De L'Hôpital, von Stirling ähnlich gegeben waren, die aber Cramer einer eingehenden Prüfung unterwirft[2]).

Das 5. Kapitel, Werth des Productes der zu einer Abscisse gehörenden Ordinaten, gilt einem Satze, der, wie so Vieles bei Cramer, nicht grade neu ist, für den er sich auch auf Newton, Stirling, De Gua unter genauer Stellenangabe beruft, der aber in seiner Behandlung durch die eingehendste Erörterung an Bedeutung gewinnt. Sei (Fig. 134) die Curve $QMSLRN$ vom Grade v. Ihre Gleichung, die man nach y geordnet und auf 0 gebracht hat, beginne mit $(\alpha x^s + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2} + \cdots) y^{v-s}$ und schliesse mit $A x^{v-t} + B x^{v-t-1} + C x^{v-t-2} + \cdots$. Betrachtet man $\alpha x^s + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2} + \cdots = 0$ und denkt sich AT, AV, $AX \cdots$ als die ausschliesslich reellen Wur-

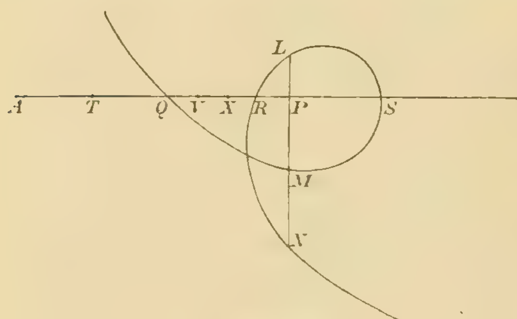


Fig 134.

zeln dieser Gleichung, so kann man $\alpha x^s + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2} + \cdots = \alpha (x - AT)(x - AV)(x - AX) \cdots$ setzen. Ferner geht die Curvengleichung bei $y = 0$ in $A x^{v-t} + B x^{v-t-1} + C x^{v-t-2} + \cdots = 0$ über, und die wieder ausschliesslich reellen Wurzeln dieser letzteren Gleichung sind nothwendig AQ, AR, $AS \cdots$, wenn die Curve die Abscissenaxe in Q, R, $S \cdots$ schneidet; man kann daher $A x^{v-t} + B x^{v-t-1} + C x^{v-t-2} + \cdots = A (x - AQ)(x - AR)(x - AS) \cdots$ setzen. Dividirt man die Curvengleichung durch den Coefficienten von y^{v-s}, was immer gestattet ist, weil man das Gleichungspolynom nicht mit dem ersten denkbaren, sondern mit dem ersten wirklich vor-

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 86—87.
[2]) Ebenda pag. 88—108.

handenen Gliede hat beginnen lassen, und setzt für ihn sowie für das letzte von y freie Glied die soeben gefundenen Werthe, so nimmt die Curvengleichung die Gestalt an $y^{r-s} + \cdots + \frac{A}{\alpha} \cdot \frac{(x-AQ)(x-AR)(x-AS)\cdots}{(x-AT)(x-AV)(x-AX)\cdots} = 0$, welche bei jedem Werthe von x die zugehörigen Ordinaten y liefern muss, z. B. $y = LP$, $y = MP$, $y = NP \cdots$, wenn $x = AP$ gesetzt wird. Dadurch erkennt man, dass $LP \cdot MP \cdot NP \cdots = \frac{A}{\alpha} \frac{PQ \cdot PR \cdot PS \cdots}{PT \cdot PV \cdot PX \cdots}$, und darin besteht der in der Ueberschrift des 5. Kapitels gemeinte Satz von dem Producte der Ordinaten[1]. Cramer verfolgt seine Bedeutung bei verschiedenen Werthen von x auch in den Fällen, in welchen die verschiedenen in dem Satze vorkommenden Gleichungswurzeln nicht sämmtlich reell sind.

Das 6. Kapitel, Von den Durchmessern, Gegendurchmessern und Mittelpunkten der Curven, geht aus von dem Coefficienten des zweithöchsten Gliedes der wie im 5. Kapitel nach y geordneten Curvengleichung $(\alpha x^t + \beta x^{t-1} + \cdots) y^{r-t} + (a x^{t+1} + b x^t + \cdots) \cdot y^{r-t-1} + \cdots = 0$, welche auch in $y^{r-t} + \frac{a x^{t+1} + b x^t + \cdots}{\alpha x^t + \beta x^{t-1} + \cdots} y^{r-t-1} + \cdots = 0$ umgeformt werden kann. Bei Annahme irgend einer Abscisse x, zu welcher $r-t$ Ordinaten y gehören, ist $-\frac{a x^{t+1} + b x^t + \cdots}{\alpha x^t + \beta x^{t-1} + \cdots}$ die Summe aller dieser Ordinaten, und das Gleiche findet statt, wenn man die $r-s$ Ordinaten einer Curve $y^{r-s} + \frac{a x^{t+1} + b x^t + \cdots}{\alpha x^t + \beta x^{t-1} + \cdots} + \cdots = 0$, welche zur Abscisse x gehören, negativ zu einer Summe vereinigt. Heissen die zu $x = AP$ gehörenden Ordinaten der ersten Curve PM, Pm, $P\mu \cdots$, die der zweiten Curve PN, Pn, $P\nu \cdots$, so ist also $PM + Pm + P\mu + \cdots = PN + Pn + P\nu + \cdots$. Der Satz hat die einfachste Gestalt, wenn $t = s$, d. h. wenn die beiden Curvengleichungen in ihren zwei ersten Gliedern und mithin auch in der Anzahl der in jeder derselben zu einer Abscisse gehörenden Ordinaten genau übereinstimmen. Dann ist $(PM - PN) + (Pm - Pn) + (P\mu - P\nu) + \cdots = NM + nm + \nu\mu + \cdots = 0$, und die gegenseitige Lage der Punkte N und M, n und m, ν und $\mu \cdots$ giebt dafür den Ausschlag, welche Strecken positiv, welche negativ sind[2]. Cramer beschränkt hierauf die Allgemeinheit des Satzes weiter. Er nimmt $t = 0$ an und $y^r + (ax + b) y^{r-1}$ als die Anfangsglieder beider

[1] Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 108—110.
[2] Ebenda pag. 129—131.

Curvengleichungen. Die eine Gleichung kann als Vereinigung von v Geraden gedacht werden, d. h. ihre Gleichung als $(y + a_1 x + b_1) \cdot (y + a_2 x + b_2) \cdots (y + a_v x + b_v) = 0$, wobei es genügt, a_1, a_2, $\cdots a_v$ und b_1, b_2, $\cdots b_v$ so zu wählen, dass $a_1 + a_2 + \cdots + a_v = a$, $b_1 + b_2 + \cdots + b_v = b$ werde. Es steht des Weiteren nichts im Wege $a_1 = a_2 = \cdots = a_v = \frac{a}{v}$, $b_1 = b_2 = \cdots = b_v = \frac{b}{v}$ zu wählen, so dass die v Geraden zusammenfallend die Gleichung $\left(y + \frac{a}{v} x + \frac{b}{v}\right)^n = 0$ erhalten und mit der Ordinate PS, die zur Abscisse AP gehört, nur einen Durchschnittspunkt S besitzen. Alsdann ist $SM + Sm + S\mu + \cdots = 0$ und die v-fache Gerade ist ein Durchmesser der Curve[1]) in dem von Newton diesem Worte beigelegten Sinne (S. 405). Da aber jede Curve v^{ten} Grades, wenn sie nicht von vorn herein eine Gleichung mit den Anfangsgliedern $y^v + (ax + b)y^{v-1}$ besitzt, durch Drehung der Coordinatenaxen zu einer solchen gelangen kann[2]), so hat jede algebraische Curve geradlinige Durchmesser. Wie das zweithöchste Glied der Gleichung $y^v + (ax + b)y^{v-1} + (cx^2 + dx + e)y^{v-2} + \cdots = 0$ durch seinen Coefficienten die entgegengesetzte Summe der Wurzeln darbietet, so steht der Coefficient von y^{v-2} in Beziehung zu der Summe der Producte der Wurzeln zu je zweien u. s. w., und daraus folgen Sätze über sogenannte krummlinige Durchmesser. Die in der Ueberschrift des 6. Kapitels genannten Gegendurchmesser stellen einen von Bragelongne eingeführten Begriff dar[3]), der sich aber in der Geometrie nicht zu erhalten wusste, und dessen Erörterung wir unterlassen. Als Mittelpunkt[4]) wird in vollständigem Anschluss an De Gua (S. 768) der Punkt bezeichnet, von dem aus nach allen Richtungen symmetrisch gelegene Curvenpunkte zu erkennen sind.

Das 7. Kapitel, Bestimmung der grössten Glieder einer Gleichung; Grundzüge der Methode der Reihen, soll den Uebergang zur Beschäftigung mit den unendlichen Aesten der Curven bilden. In einem unendlich fernen Punkte überwiegen diejenigen Glieder, welche höhere Potenzen einer unendlichgrossen Strecke enthalten, gegen andere, und diese letzteren dürfen vernachlässigt werden. Das ist ungemein einfach, wenn nur eine Grösse, etwa x, unendlichgross wird, aber wenn zwei Veränderliche x und y vorkommen, von denen man zum voraus, namentlich bei vielgliedrigen Gleichungen, nicht weiss, ob sie beide unendlichgross werden, und, wenn das der Fall sein sollte, welche Ordnung der Unendlichkeit jede erreicht, ist

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 131—134. [2]) Ebenda pag. 134—135. [3]) Ebenda pag. 141. [4]) Ebenda pag. 144.

es viel schwieriger, die grössten Glieder des Gleichungspolynoms zu ermitteln, gegen welche alle anderen verschwinden. Klar ist vor allen Dingen, dass mindestens zwei Glieder des Gleichungspolynoms unendlichgross von gleicher Ordnung sein müssen[1]), weil ein einzelnes Unendlichgrosses, neben welchem alle anderen Glieder vernachlässigt werden, unmöglich $= 0$ sein kann. Man wird also versuchsweise irgend zwei Glieder als die von überwiegender Unendlichkeit betrachten, daraus das Verhältniss der Unendlichkeitsgrade von x und y ermessen und schliesslich zusehen, ob unter Festhaltung dieses Verhältnisses alle anderen Gleichungsglieder unendlichgross von niedrigerer Ordnung oder gar endlich oder unendlichklein werden. Bei der Gleichung[2]) $x^2y + ay^2 - a^2x = 0$ sind drei Möglichkeiten. Entweder kann x^2y zugleich mit ay^2 überwiegend unendlichgross werden, oder x^2y und $-a^2x$, oder ay^2 und $-a^2x$. Im ersten Falle folgt aus $x^2y + ay^2 = 0$, dass $y = -\frac{x^2}{a}\cdot$ Hier ist x unendlichgross erster, y unendlichgross zweiter Ordnung, x^2y und ay^2 sind beide vierter Ordnung, $-a^2x$ nur erster Ordnung und bleibt mit Recht weg. Im zweiten Falle folgt aus $x^2y - a^2x = 0$, dass $xy = a^2$, x wird unendlichgross erster Ordnung, $y = \frac{a^2}{x}$ unendlichklein erster Ordnung, x^2y und $-a^2x$ sind beide unendlichgross erster Ordnung, ay^2 unendlichklein zweiter Ordnung und bleibt mit Recht weg. Im dritten Falle folgt aus $ay^2 - a^2x = 0$, dass $y^2 = ax$, x wird unendlichgross erster Ordnung, y unendlichgross von der Ordnung $\frac{1}{2}$, ay^2 und $-a^2x$ sind beide unendlichgross von der Ordnung 1, x^2y unendlichgross von der Ordnung $\frac{5}{2}$ und darf nicht weggelassen werden. Der dritte Fall führt mithin auf einen Widerspruch, und nur die beiden ersten sind zur Annahme gestattet. Ganz ähnliche Betrachtungen sind anzustellen, wenn die kleinsten Glieder eines Gleichungspolynoms gesucht werden, wobei nur zu beachten ist, das bei unendlichkleinen Grössen die höherer Ordnung neben denen niedrigerer Ordnung verschwinden. Das Zeitraubende einer so geführten Untersuchung, insbesondere wenn das Gleichungspolynom aus zahlreichen Gliedern besteht, ist ein wahrer Missstand, und Cramer beseitigt ihn durch Anwendung des analytischen Dreiecks. Wie auf demselben allen Gliedern des Gleichungspolynoms Felder entsprechen, welche bemerklich gemacht werden, wie man ein Lineal durch je zwei solcher Felder zu legen und dabei zu beobachten hat, dass nur diejenigen Geraden nähere

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 152. [2]) Ebenda pag. 153.

Betrachtung finden, welche kein bemerklich gemachtes Feld über, beziehungsweise unter sich erkennen lassen, je nachdem unendlichgrosse oder unendlichkleine Glieder aufgesucht werden, dass sind Dinge, die weitläufig bei Cramer beschrieben sind. Hat er unabhängig von Maclaurin, den er nicht nennt, gearbeitet, und ist er mit Maclaurin auf gleichen Vorarbeiten fussend selbständig zu Ergebnissen gelangt, welche mit dem, was wir aus Maclaurin's Algebra berichtet haben (S. 574), so nahe übereinstimmt, dass wir ein erneutes Eingehen darauf uns ersparen dürfen? Wir müssen uns auch hier auf Cramer's wissenschaftliche Redlichkeit verlassen. Er beruft sich an so zahlreichen Stellen auf Newton, auf Taylor, auf Stirling, auf De Gua u. s. w., dass wir nicht wüssten, warum er Maclaurin's Namen hier hätte übergehen sollen, wenn er dessen Algebra studirt gehabt hätte. Wir haben übrigens zweierlei hinzuzufügen, das Eine, dass es der Gedankenübereinstimmung zwischen Cramer und Maclaurin keinen Abbruch thut, dass Letzterer das Newton'sche Parallelogramm, Ersterer De Gua's analytisches Dreieck anwendet, das Andere, dass Cramer vielleicht als Erster die Namen der Zeilen (*lignes*) und Columnen (*colomnes*) einführte[1]), um Felder zu bezeichnen, die sich in einer wagrechten oder senkrechten Linie befinden. Ausserdem müssen wir feststellen, dass, wie es auch mit Cramer's Unabhängigkeit von Maclaurin beschaffen sein möge, er unter allen Umständen wesentlich über diesen seinen Vorgänger hinausgegangen ist. Cramer wendet nämlich seine Aufmerksamkeit auch dem Falle zu, dass das Lineal mehr als zwei mit Marken versehene Felder berühre[2]). Ist $x^m y^n$ ein berührtes Feld, so heissen die anderen längs des Lineals folgenden Felder vermöge der unmittelbar vorausgehenden Auseinandersetzung $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$ u. s. w., und die im Unendlichen übrig bleibenden Gleichungsglieder liefern $0 = a x^m y^n + b x^{m+k} y^{n+l} + c x^{m+2k} y^{n+2l} + d x^{m+3k} y^{n+3l} + \cdots$, wo einzelne der Coefficienten $a, b, c, d \cdots$ auch 0 sein können. Dividirt man diese Gleichung durch $x^m y^n$ und setzt dann $x^k y^l = z$, so geht die Gleichung über in $0 = a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots$, oder nach weiterer Division durch den Coefficienten der höchsten auftretenden Potenz von z und darauf folgender Zerlegung des Gleichungspolynoms in einfache Factoren $0 = (z - R)(z - r)(z - \varrho) \cdots$, d. h. die Gleichung zerfällt in $z = x^k y^l = R$, $x^k y^l = r$, $x^k y^l = \varrho$ u. s. w. Cramer unterscheidet hier zwischen reellen und imaginären Werthen $R, r, \varrho \cdots$, worüber wir aber zu berichten unterlassen. Cramer ist nun bei dem zweiten

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 158. [2]) Ebenda pag. 169 sqq.

in der Ueberschrift des 7. Kapitels genannten Gegenstande angelangt, bei der Methode der Reihen, d. h. bei der Darstellung von y durch eine nach Potenzen von x geordnete Reihe auf Grund einer zwischen x und y vorhandenen Gleichung. Cramer löst die Aufgabe mittels des analytischen Dreiecks mit Unterscheidung der beiden Fälle, dass die Reihe nach steigenden oder nach fallenden Potenzen von x geordnet sein soll. Die ersteren Reihen nennt er[1]) wachsend, *séries croissantes*, oder ansteigend, *s. ascendantes*, die zweiten abnehmend, *s. décroissantes*, oder absteigend, *s. descendantes*. Beide Gattungen von Reihen sollen convergiren, nicht divergiren. Die Reihe ist convergent, wenn man dem gesuchten Wurzelwerthe um so näher kommt, je mehr Reihenglieder man zusammenfasst; sie würde divergent sein, wenn man sich von dem Wurzelwerthe um so mehr entfernte, je mehr Reihenglieder man zusammenfasste. Es ist klar, dass eine divergente Reihe irreführend oder mindestens nutzlos ist[2]). Wann aber das Eine, wann das Andere der Fall sei, fragt Cramer gar nicht, geschweige denn, dass er darüber Auskunft ertheilte. Soll eine steigende Reihe für y gesucht werden, so dient das analytische Dreieck zur Auffindung ihres Anfangsgliedes Ax^h unter Voraussetzung eines unendlichkleinen x, wie die Voraussetzung eines unendlichgrossen x zur Auffindung des Anfangsgliedes Ax^h einer fallenden Reihe führt. Dann setzt man $y = Ax^h + u$ in die zwischen x und y gegebene Gleichung, welche dadurch in eine solche zwischen x und u übergeht, die nach der gleichen Methode behandelt $u = Bx^i + \cdots$, also auch $y = Ax^h + Bx^i + \cdots$ mit Kenntniss zweier Reihenglieder liefert. Bei Fortsetzung des Verfahrens könnte entweder u oder ein späteres Reihenglied mehr als nur einen Werth annehmen. Alsdann giebt es mehrere mit denselben Gliedern beginnende, später aber sich gabelnde Reihen[3]). Die Punkte, wo eine Gabelung eintritt, nennt Cramer unregelmässige[4]). Wir möchten in diesem hochinteressanten Kapitel nur noch auf zwei Einzelheiten hinweisen. Cramer bemerkt[5]), dass, wenn ein einziges Reihenglied imaginär ausfalle, die ganze Reihe imaginär sei. Das ist genau der Gedanke Euler's in der Abhandlung von 1749 (S. 795), die Cramer kaum noch zu Gesicht bekommen haben konnte. Ferner spricht Cramer von des Descartes *méthode des indéterminées*[6]). Das dürfte das erste Vorkommen dieses Kunstausdruckes sein.

---

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 177. [2]) Ebenda pag. 174: *Il est clair qu'une série divergente est trompeuse ou du moins inutile.* [3]) Ebenda pag. 184: *La série se fourche.* [4]) Ebenda pag. 200: *termes irreguliers.* [5]) Ebenda pag. 184. [6]) Ebenda pag. 205.

Das 8. Kapitel, Von den unendlichen Aesten der Curven, ist von einem Reichthume und einer Langathmigkeit des Inhaltes[1]), welche nur die Wahl übrig lässt, sehr ausführlich oder ungemein knapp zu berichten. Wir ziehen das Letztere vor und erklären, dass hier die geometrischen Folgerungen aus den Lehren des 7. Kapitels gezogen werden, indem wir nur wenige allgemeine Gedanken hervorheben. Das Hinausrücken eines Punktes in die Unendlichkeit kann ebenso bei $x = \infty$ als bei $y = \infty$ erfolgen. Es genügt also nicht, die Reihe $y = Ax^h + Bx^i + Cx^k + \cdots$ sich zu verschaffen, man muss auch, wozu freilich neue Vorschriften nicht erforderlich sind, x in eine nach y geordnete Reihe entwickeln[2]). Es genügt ferner nicht, um einen unendlichen Curvenast kennen zu lernen, bei dem ersten Gliede der Entwicklung $y = Ax^h$ stehen zu bleiben[3]). Es war gezeigt, dass man auch $u = Bx^i$, $t = Cx^k$ finden könne, und dass alsdann die ganze zu $x = \infty$ gehörende Ordinate des wirklichen Curvenpunktes $y + u + t + \cdots$ sei. So wichtig es nun ist, dass bei der Ausrechnung das reelle u gegen y, das reelle t gegen $u \cdots$ als unendlichklein vernachlässigt werden kann, so hört diese Erlaubniss auf, wenn u oder $t \cdots$ imaginär wird. In diesem Falle wiederholt sich die im 7. Kapitel hervorgehobene Bemerkung, dass ein imaginärer Bestandtheil der Ordinate sie ganz imaginär macht, und dass alsdann der unendliche Ast nicht wirklich vorhanden ist. Aber selbt bei lauter reellen Bestandtheilen ist eine Untersuchung von $u, t \cdots$ erforderlich, um zu wissen, ob keine Gabelung des unendlichen Astes stattfinde. Die unendlichen Aeste sind entweder hyperbolische mit geradlinigen Asymptoten oder parabolische ohne solche[4]). Den Schluss des Kapitels bilden zehn Sätze über geradlinige Asymptoten, die fast insgesammt nicht neu sind, vielmehr als schon bei Newton, Stirling, Nicole, De Gua vorkommend in Fussnoten nachgewiesen sind. Die Beweisführung Cramer's von der Methode der Reihen aus ist jedoch so durchaus eigenartig, dass wir uns nicht versagen können, wenigstens über die des ersten Satzes von dem paarweisen Vorkommen unendlicher Aeste[5]) zu berichten. Die Ordinate des unendlichfernen Punktes sei $y = Ax^h + Bx^i + Cx^k + \cdots$, und diese Reihenentwicklung sei durchaus reell, möge man x positiv oder negativ wählen. In diesem Falle muss es auf beiden Seiten der Abscissenaxe bei $x = \infty$ und bei $x = -\infty$ einen unendlichfernen Punkt geben, der einem unendlichen Aste

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 215—351.
[2]) Ebenda pag. 215. [3]) Ebenda pag. 216—217. [4]) Ebenda pag. 230.
[5]) Ebenda pag. 342—343.

angehören muss. Zweitens kann die Entwicklung imaginär sein, dann führt sie überhaupt zu keinem unendlichen Aste. Aber die Entwicklung kann drittens auch das sein, was Cramer an einer früheren Stelle[1]) halbimaginär genannt hat, d. h. sie enthält Potenzen von x mit gebrochenem Exponenten mit gradzahligem Nenner, z. B. $x^{\frac{m}{2n}}$ mit ungradem m, und wird dadurch bei negativem x imaginär. Alsdann giebt es freilich nur bei $x = +\infty$ eine reelle Entwicklung, aber sie ist doppelt vorhanden, weil die Ausziehung der $2n^{\text{ten}}$ Wurzel dazu nöthigt, das betreffende Glied in die Entwicklung einmal mit dem Pluszeichen und einmal mit dem Minuszeichen eingehen zu lassen.

Das 9. Kapitel, Allgemeine Eintheilung der Linien der fünf ersten Grade, bedient sich schon bei den Kegelschnitten der unendlichen Aeste als Unterscheidungsmerkmal[2]). Die im Unendlichen den Ausschlag gebenden Glieder der Gleichung 2ten Grades $a + by + cx + dy^2 + exy + fx^2 = 0$ sind $dy^2 + exy + fx^2$ und dieser dreigliedrige Ausdruck ist entweder bei $e < 2\sqrt{df}$ das Product zweier imaginärer einfacher Factoren, oder bei $e > 2\sqrt{df}$ das Product zweier verschiedener reeller einfacher Factoren, oder bei $e = 2\sqrt{df}$ das Product zweier gleicher reeller einfacher Factoren, und diese drei Möglichkeiten entsprechen der Ellipse ohne unendlichen Ast, der Hyperbel mit vier hyperbolischen unendlichen Aesten und zwei gradlinigen Asymptoten, der Parabel. Bei den Curven 3ten Grades heissen die im Unendlichen den Ausschlag gebenden Glieder $gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3$ und ihre Zerlegung in einfache Factoren führt zur Unterscheidung von vier Fällen: ein reeller Factor ist mit zwei imaginären Factoren vervielfacht, oder alle drei Factoren sind reell und von einander verschieden, oder von den drei reellen Factoren sind zwei einander gleich oder alle drei reelle Factoren sind einander gleich. Diese vier Fälle lassen dann weiter 14 Geschlechter unterscheiden[3]), was mit Newton's Abzählung (S. 406) übereinstimmt. Aehnlich ist die Eintheilung der Curven 4ten und 5ten Grades, welche letztere Cramer zuerst unternahm. Es handelt sich immer um das Reellsein oder Imaginärsein der einfachen Factoren der im Unendlichen den Ausschlag gebenden Glieder des Gleichungspolynoms der betreffenden Curve, deren Zerlegbarkeit in Factoren vorausgesetzt ist, und wenn diese Factoren reell sind, um ihre Verschiedenheit oder Gleichheit, Unterscheidungen, welche Cramer allerdings hier in andere Worte kleidet, indem er von der Anzahl der parabolischen und der

---

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 171. [2]) Ebenda pag. 352—359. [3]) Ebenda pag. 369.

hyperbolischen Aeste und der den letzteren zukommenden geradlinigen Asymptoten redet. Cramer kommt zu neun Gruppen von Curven 4ten Grades[1]) und zu elf Gruppen von Curven 5ten Grades[2]), jede mit zahllosen Unterabtheilungen.

Das 10. Kapitel, Von den singulären Punkten, den vielfachen Punkten, den Inflexionspunkten, den Schlängelungspunkten, behandelt zuerst die Inflexionspunkte und Schlängelungspunkte, in welchen eine Berührungslinie nicht bloss zwei, sondern mehrere coincidirende Punkte[3]) mit der Curve gemein hat, und zwar $2n + 1$ Punkte in den Inflexionspunkten, $2n$ Punkte in den Schlängelungspunkten oder unsichtbaren Inflexionspunkten, welche nur die Analysis erkennt, deren Auge schärfer ist als das leibliche[4]). Dann kommen die vielfachen Punkte, deren immer wieder durch das analytische Dreieck erleichterte Auffindung darauf hinausläuft, dass man den Coordinatenanfangspunkt mittels $x = m + z$, $y = n + u$ verlegt. Lassen sich Werthe von m und n bestimmen, vermöge deren die umgeformte Gleichung kein constantes Glied mehr besitzt, so liegt der neue Coordinatenanfangspunkt auf der Curve, und er ist ein einfacher, doppelter, dreifacher $\cdots$ Punkt, je nachdem die Unbekannten z und u in der neuen Gleichung zusammengerechnet von der 1ten, 2ten, $3^{\text{ten}} \cdots$ Dimension anfangend vorhanden sind[5]). Cramer zeigt dabei, wie man sich viele überflüssige Rechnung zu ersparen vermöge, wenn man die Glieder der einzelnen Dimensionen nach einander berechne, also aufhöre, sobald ein Glied irgend einer Dimension nicht mit dem Coefficienten 0 behaftet erscheine. Ein isolirter Punkt tritt in einem Beispiele hervor[6]). Bei der Berechnung anderer Beispiele erscheinen auch Gleichungen mit nur einer Unbekannten und mehrfachen Wurzeln. Cramer bemerkt[7]), dass eine von Hudde herrührende Methode bei der Aufsuchung solcher Wurzeln gute Dienste leiste und verweist für dieselbe auf den dritten Anhang.

Das 11. Kapitel, Von der Methode der Tangenten. Von den Inflexionspunkten u. s. w. Von den grössten und kleinsten Abscissen oder Ordinaten u. s. w., baut auf die im 10. Kapitel festgestellte Thatsache weiter, dass die Verlegung des Coordinatenanfangspunktes auf die Curve selbst die Curvengleichung in die Gestalt bringt, dass sie nunmehr durch die Dimension ihrer niedersten Glieder

---

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 395—396. [2]) Ebenda pag. 397—398. [3]) Ebenda pag. 401: *Points infiniment proches l'un de l'autre et coïncidents.* [4]) Ebenda pag. 403: *L'inflexion ne parait plus, quoiqu'elle existe réellement dans un espace infiniment petit, et qu'elle soit sensible à l'Analyse, dont la vuë, si l'on ose parler ainsi, est plus perçante que la nôtre.* [5]) Ebenda pag. 415. [6]) Ebenda pag. 449. [7]) Ebenda pag. 445.

die Vielfachheit des zum neuen Anfangspunkt gewählten Curvenpunktes anzeigt. Wir hätten vielfach auf Parallelstellen im II. Bande von Euler's Introductio hinzuweisen Gelegenheit gehabt. Wenn wir es in der Regel unterliessen, so wollen wir doch hier an das 13. Kapitel jenes Bandes erinnern (S. 783—784). Euler wusste, dass der Grad der Vielfachheit des als Anfangspunkt gewählten Curvenpunktes dem Grade des niedersten Gleichungsgliedes entspricht. Er wusste, dass, wenn nur das constante Glied in der umgewandelten Curvengleichung fehlt, die $= 0$ gesetzten Glieder erster Dimension die Gleichung der Berührungslinie im Coordinatenanfangspunkte darstellen. Auch diese Folgerung entging Cramer nicht, aber er verallgemeinerte sie noch. Er erkannte in den $= 0$ gesetzten Gleichungsgliedern niedersten Ranges $gy^t + hxy^{t-1} + \cdots + lx^t$ die vereinigten Gleichungen der Berührungslinien an die im Anfangspunkte zusammentreffenden t Curvenäste[1]; er sprach beweislos aus, was er im 9. Kapitel schon vorausgesetzt hatte, dass jene Glieder t^{ter} Dimension in t einfache Factoren $(Ay + \alpha x)(By + \beta x)(Cy + \gamma x)\cdots$ zerfallen, worin eine Begegnung mit dem 18. Kapitel des II. Bandes von Euler's Introductio (S. 787) zu erkennen ist. Ein maschinales Verfahren zur Bestimmung der Vielfachheit des Coordinatenanfangspunktes und der Gleichung der dort vorhandenen Berührungslinien[2]) gestattet das analytische Dreieck. Sei etwa die Conchoide $y^2x^2 + x^4 - 2axy^2 - 2ax^3 + a^2y^2 + (a^2 - b^2)x^2 = 0$ zu untersuchen. Man legt das Dreieck mit der Spitze nach unten, so dass die Felder von unten nach oben im rechten Schenkel 1, x, x^2, x^3, x^4 und im linken Schenkel 1, y, y^2, y^3, y^4 heissen. Man bezeichnet die Felder, welche mit vorhandenen Gliedern gleichnamig sind, durch einen Stern, die leeren Felder durch ein Ringelchen. Das Leersein der beiden unteren Horizontalzeilen (Fig. 135) zeigt, dass der Coordinatenanfangspunkt (er ist der Pol derjenigen Abart der Conchoide, welche eine Schleife besitzt) ein zweifacher Punkt ist. In der dritten Zeile von unten tragen die Felder x^2 und y^2 Sterne, also ist $x^2y^2 + (a^2 - b^2)x^2 = 0$ die Gleichung der beiden Berührungslinien, welche in $ay + \sqrt{a^2 - b^2}\,x = 0$ und $ay - \sqrt{a^2 - b^2}\,x = 0$ zerfällt. Eine durch die Substitutionen $x = ru$, $y = su$ bewirkte Drehung der Ordinatenaxe lässt $\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$ erscheinen und verwandelt die Curvengleichung $a + (by + cx)$

```
o   o   *   o   *
  o   *   o   *
    *   o   *
      o   o
        o
```

Fig. 135.

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 463. [2]) Ebenda pag. 412 und pag 466.

$+ (dy^2 + cxy + fx^2) + \cdots = 0$ in $a + (bs + cr)u + (ds^2 + crs + fr^2)u^2 + \cdots = 0$. Fehlt bei der, wie gelehrt wurde, bewirkten Ausbreitung der Gleichung auf dem analytischen Dreiecke eine gewisse Anzahl unterer Horizontalreihen, so zeigt die erste übrigbleibende Potenz von u durch ihren Exponenten diese Anzahl an. Bringt das Verhältnis $\frac{r}{s} = \frac{x}{y}$, welches aus der Nullsetzung des Coefficienten jener ersten übrigen Potenz von u hervorgeht, auch den Coefficienten der nächsthöheren Potenz von u zum Verschwinden, so ist im Anfangspunkte ein Inflexionspunkt erkannt[1]). Cramer sucht auch die Gleichung der Berührungslinie an einen ausserhalb des Coordinatenanfangspunktes liegenden Curvenpunkt. Sie findet sich am Leichtesten durch Verlegung des Coordinatenanfangspunktes in den Berührungspunkt, und die dazu führenden Rechnungen entsprechen einer Differentiation. Cramer sagt das zwar nicht, aber die Vorschriften, wie man es machen solle, sind in genauer Uebereinstimmung mit den Lehren der Differentialrechnung[2]) und ebenso auch die Aufsuchung der Subtangente[3]) und die Ermittelung eines Inflexionspunktes[4]), in welchem der zweite Differentialquotient der Ordinate nach der Abscisse verschwinden muss. War bis dahin das Ergebniss so zu fassen, dass man die Gleichung, d. h. die Lage und Richtung der Berührungslinie an einen bestimmten Curvenpunkt finden könne, so kann man auch umgekehrt nach den Curvenpunkten fragen, in welchen die Berührungslinie eine bestimmte Richtung besitze, und wählt man dazu die Richtung parallel zur Abscissenaxe, so findet man die Punkte eines Maximum oder Minimum der Ordinate, es sei denn, dass ein sichtbarer Inflexionspunkt auftrete[5]). Abermals treibt Cramer verhüllte Differentialrechnung in umfassender Weise. Auch die Methode der Reihen führt zur Kenntniss der in unserem Berichte erwähnten Dinge. Wird die geometrische Eigenthümlichkeit eines Curvenpunktes M gesucht, so wählt Cramer einen senkrecht unter demselben gelegenen Punkt P zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Ordinatenaxe mit MP zusammenfällt. Die Ordinaten dieses Systems heissen u, die Abscissen z, und die Reihentwicklung $u = A + Bz + Cz^2 + \cdots$ wird vorgenommen, welche um so richtiger ist, je kleiner z gewählt wird. Alsdann ist[6]) A die Ordinate von M, B die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührungslinie an M mit der Abscissenaxe bildet, C nach Grösse und Vorzeichen der Unterschied zwischen den Ordinaten von unendlich nahe bei M

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 467. [2]) Ebenda pag. 471—472. [3]) Ebenda pag. 473—475. [4]) Ebenda pag. 481—482. [5]) Ebenda pag. 487. [6]) Ebenda pag. 517—525.

liegenden Punkten der Curve und der Berührungslinie. Ein Maximum oder Minimum der Ordinate in dem Sinne, dass die rechts und links befindlichen Nachbarordinaten beide kleiner oder beide grösser als die zwischen ihnen befindliche Ordinate sind, findet meistens statt, wenn die Berührungslinie der Abscissenaxe parallel läuft, kann aber auch bei dem Parallelismus der Berührungslinie mit der Ordinatenaxe in einem Rückkehrpunkte eintreten[1]).

Das 12. Kapitel, Von der Krümmung der Curven in ihren verschiedenen Punkten, bringt die erste nähere Begründung, warum der Kreis zum Vergleiche mit der Krümmung einer Curve gewählt wurde. Zwar dass der Kreis überall gleich gekrümmt sei, haben schon Andere, dass seine Krümmung um so grösser sei, je je kleiner der Halbmesser ist, hat auch Euler ausgesprochen (S. 785), aber Cramer erläutert es. Biegt man, sagt er[2]), zwei gleiche Strecken kreisförmig zusammen, und zwar so, dass man aus der einen Strecke einen ganzen Kreis bildet, aus der anderen einen Halbkreis, so ist letzterer zweimal weniger gekrümmt als ersterer, und sein Halbmesser ist zweimal so gross als der des ganzen Kreises. Stehen, fährt er fort, die Halbmesser AC, ac zweier Kreise im Verhältnisse von m zu n, und ist der Bogen AB des ersten Kreises genau gleich lang mit dem Bogen ab des zweiten Kreises, misst man dann die Bogen AB, ab in Graden, Minuten u. s. w., so verhält sich AB zu ab, wie n zu m, d. h. wie ac zu AC, oder wie $\frac{1}{AC}$ zu $\frac{1}{ac}$, d. h. die Krümmung gleich langer Kreisbogen steht im reciproken Verhältnisse ihrer Halbmesser. Die Auffindung des Krümmungskreises einer Curve lehrt Cramer folgendermassen[3]). Sei (Fig. 136) $M m \mu$ die auf das Coordinatensystem der AP und AQ bezogene Curve, und sei $AP = x$, $MP = y$, $Pp = Mn = z$. Im 11. Kapitel war gezeigt, dass, wenn die Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ gebildet wird, A die Ordinate y bedeutet, Bz das Stück nO, $Cz^2 + Dz^3 + \cdots$ das Stück Om. Nun ist OM Berührungslinie wie an die Curve $Mm\mu$, so auch an den Kreis $MmiJH$, und Omi ist eine Secante dieses letzteren Kreises, also $OM^2 = Om \cdot Oi$, $Oi = \frac{OM^2}{Om}$ $= \frac{Mn^2 + On^2}{Om} = \frac{z^2 + B^2 z^2}{Cz^2 + Dz^3 + \cdots} = \frac{1 + B^2}{C + Dz + \cdots}$ nebst $OM = z\sqrt{1 + B^2}$.

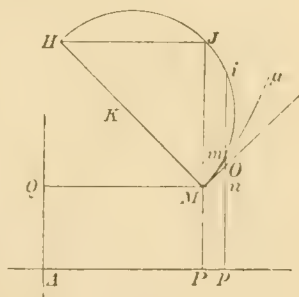


Fig. 136.

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 527. [2]) Ebenda pag. 539. [3]) Ebenda pag. 541—542.

Bei $z = 0$ fällt Oi mit MJ zusammen, und man hat $MJ = \frac{1+B^2}{C}$. Nun ist ferner $\triangle MJH \sim MnO$ und deshalb $\frac{MH}{MJ} = \frac{MO}{Mn}$, $MH = \frac{MJ \cdot MO}{Mn} = \frac{1+B^2}{C} \cdot \frac{z\sqrt{1+B^2}}{z} = \frac{(1+B^2)^{\frac{3}{2}}}{C}$, der Krümmungshalbmesser aber ist $MK = \frac{(1+B^2)^{\frac{3}{2}}}{2C}$. Der Krümmungshalbmesser wird ∞, die Krümmung also 0, wenn $C = 0$, und das ist nur in Inflexionspunkten oder Schlängelungspunkten, aber nicht in allen solchen der Fall, es giebt vielmehr auch Inflexionspunkte, in denen die Krümmung ∞, der Krümmungshalbmesser also 0 ist[1]). Die Krümmung einer Curve in einem Punkte wird am leichtesten erkannt, indem man den Punkt zum Coordinatenanfangspunkte wählt und die Curvengleichung in die Form $y = Ax^h + Bx^i + Cx^k + \cdots$ bringt, d. h. sie als eine parabolische Curve betrachtet[2]), womit die Voraussetzung $h > 0$ verbunden ist. Innerhalb der positiven Werthe von h sind alsdann Unterscheidungen wie $0 < h < \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < h < 1$, $h = 1$, $1 < h < 2$, $h > 2$ zu treffen, welchen Folgerungen bezüglich der Krümmungsgrösse entsprechen.

Das 13. Kapitel, Von den verschiedenen Arten vielfacher Punkte, welche bei Curven der sechs ersten Grade vorkommen, beschliesst das Werk. Es nimmt die ermittelten Sätze noch einmal im Zusammenhange und unter Vorführung zahlreicher Beispiele in Betrachtung.

So wenig wir einer Entschuldigung dafür zu bedürfen glaubten, dass wir dem II. Bande von Euler's Introductio fast das ganze 115. Kapitel widmeten, ebensowenig werden wir unser langes Verweilen bei Cramer's Einführung in die Lehre von den algebraischen Curven besonders rechtfertigen müssen. Beide Bände, in Vielem übereinstimmend, in Mehrerem einander ergänzend, stellen die ersten wirklichen Lehrbücher der algebraischen Curven dar, in einer Vollendung auftretend, wie sie nur als Frucht jahrelanger Vorbereitung erreicht werden kann. Grade diese Vortrefflichkeit des Cramer'schen Werkes kann als Bestätigung seines Ausspruches dienen, er habe die Euler'sche Introductio allzuspät kennen gelernt, um den Nutzen aus ihr zu ziehen, den er sonst davon hätte haben können (S. 798). Es ist nicht möglich, in noch nicht zwei Jahren, wenn man die Druckzeit von

---

[1]) Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes* pag. 549. [2]) Ebenda pag. 555.

Cramer's dickem Bande von dem Zwischenraume zwischen dem Erscheinen beider Werke in Abzug bringt, ein Manuscript wie das Cramer'sche herzustellen, beziehungsweise unter Zuhilfeziehung eines neu erschienenen Werkes ganz umzuarbeiten. Euler's Erstlingsrecht auf gemeinschaftliche Entdeckungen bleibt natürlich unangetastet, aber Cramer's Unabhängigkeit im Allgemeinen, abgesehen von kleinen Einschaltungen, deren Vorhandensein die von Cramer gebrauchte Redewendung gar nicht ausschliesst, ist anzuerkennen.

Wir haben gelegentlich (S. 511) ein im Jahre 1750 erschienenes Buch des Abbé De la Chapelle über Kegelschnitte genannt und von dessen rascher Beliebtheit gesprochen. Wir haben gegenwärtig, wo wir das Buch um seines Gegenstandes willen abermals nennen müssen, unserer früheren Kennzeichnung nichts hinzuzufügen. De la Chapelle unterschied in seiner Vorrede zum *Traité des sections coniques* erfindende Mathematiker von solchen, die es verstehen, Erfindungen angenehm und leicht vorzutragen. Er beansprucht nur einen Platz unter den Letzteren, und den darf die Geschichte ihm gönnen.

In gleicher Kürze mögen die *Institutiones geometriae sublimioris* von Georg Wolfgang Krafft erwähnt werden, deren wir auch schon (S. 485) gedachten. Das als I. Band bezeichnete Buch kündet in der vom 5. April 1753 datirten Vorrede eine Fortsetzung an, welche man allerdings nicht gar bald erwarten dürfe. Wäre diese erschienen, was bei dem 1754 eingetretenen Tode des Verfassers unmöglich wurde, so hätte sie vielleicht sich mit höheren Curven beschäftigt und dem Namen des Werkes mehr entsprochen, als der I. Band, der es nur mit Kegelschnitten und dem Kreise zu thun hat, und der ein Interesse fast ausschliesslich durch die zahlreichen geschichtlichen Angaben verdient, um derenwillen wir das Werk im 101. Kapitel nannten. Wir fügen hier noch bei, dass die geschichtlichen Angaben bis auf die Druckzeit hinabgreifen, und dass z. B. mehrere angenäherte Rectificationen des Kreises aus der ersten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts dort Platz gefunden haben.

Noch rascher müssen wir an zwei Schriften vorübergehen, welche wir nur aus zweiter Quelle erwähnen können. Der Minoritenpater François Jacquier[1]) (1711—1788), aus Vitri-le-Français, der in Rom lebte und lehrte, gab dort 1755 Elemente der Perspective nach Taylor's Grundgedanken bearbeitet heraus. In Form eines Anhanges soll dort die perspectivische Erzeugung aller Curven 3ten Grades von den fünf divergirenden Parabeln aus behandelt sein.

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 146 (deutsch 142). Poggendorff I, 1184—1185.

Achille Pierre Dionis du Séjour (1734—1794) und dessen Freund Mathieu Bernard Goudin[1]) (1734—1817), von denen der Erstere der Pariser Akademie der Wissenschaften angehörte, gaben 1756 gemeinschaftlich ein Werk über algebraische Curven heraus, worin sich, wie unser Gewährsmann sich ausdrückt, die Aufgaben über die Eigenschaften der Curven, über ihre Tangenten, Asymptoten, Krümmungshalbmesser u. s. w. nur mit Hilfe der Analysis des Descartes mit Klarheit und Genauigkeit aufgelöst finden. Ueber das Verhältniss dieses Buches zu den älteren Schriften ähnlichen Inhaltes von De Gua, von Euler, von Cramer, ist nichts bemerkt.

117. Kapitel.

Maximal- und Minimalaufgaben. Euler's Methodus inveniendi.

Den Arbeiten, welche Aufgaben der analytischen Geometrie in thunlich elementarster Weise behandeln, schliessen sich am natürlichsten solche an, welche die Mittel der höchsten Mathematik der damaligen Zeit in den Dienst der Geometrie stellten, und wir kommen so zu der (S. 773) für dieses Kapitel in Aussicht gestellten Erzählung der Fortschritte, welche aus dem im 92. und im 100. Kapitel geschilderten Streit der Brüder Jacob und Johann Bernoulli über grösste und kleinste Werthe hervorgingen[2]). Wir haben (S. 234—235) gesehen, dass Johann Bernoulli zu Ende August 1698 die Lehre von den kürzesten Linien darauf gründen wollte, dass die Ebene durch drei consecutive Punkte einer kürzesten Linie senkrecht zur Berührungsebene an die Oberfläche in einem jener drei Punkte stehe, und dass er Ende 1728 eine Abhandlung über diesen Gegenstand an Professor Klingenstierna von Upsala mitgetheilt haben will, welche aber erst 1742 im IV. Bande der damals im Druck erscheinenden Gesammtausgabe von Johann Bernoulli's Schriften mit anderen vorher noch nicht herausgegebenen Arbeiten in die Oeffentlichkeit gelangte[3]). Ueber diese Abhandlung haben wir zu berichten, vorher allerdings über Arbeiten Euler's und Clairaut's, welche gleichfalls höheren Aufgaben aus der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen gewidmet waren.

---

[1]) Chasles, *Aperçu hist.* 153 (deutsch 150). Poggendorff I, 574—575 und 932. [2]) F. Gięsel, Geschichte der Variationsrechnung I. Theil (Torgau 1857). P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der kürzesten Linien (Leipzig 1893). Abhandlungen zur Variationsrechnung I. Theil, herausgegeben von P. Stäckel (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 46, Leipzig 1894). [3]) Joh. Bernoulli *Opera* T. IV, 108—128.

Euler war durch Johann Bernoulli auf die Frage nach kürzesten Linien mit dem Bemerken, er selbst besitze die allgemeine Gleichung zur Auffindung derselben, hingewiesen worden. Darauf löste er ebenfalls die Aufgabe und legte seine Ergebnisse in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie für 1728, welche aber erst 1732 im Drucke erschienen, nieder[1]). Er hatte, wie vielleicht in Erinnerung gebracht zu werden verdient, bei Niederschrift dieser Abhandlung *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente* etwa das 21. Lebensjahr erreicht. Wohl könne man, sagt Euler, eine mechanische Auflösung sofort erhalten, wenn man einen Faden von einem Punkte der als convex gedachten Oberfläche nach einem zweiten Punkte straff anziehe, aber schon bei einer concaven Oberfläche genüge dieses Verfahren nicht, welches nur eine Sehne der Oberfläche liefere, wenn man den Faden nicht zwinge, sich überall der Oberfläche anzuschmiegen, und geometrisch sei das Verfahren unter keiner Bedingung. Der Geometer müsse damit beginnen, die Gleichung einer Oberfläche herzustellen, und dazu bedürfe man dreier Coordinaten x, y, z, wie zwei Coordinaten in der Ebene dazu dienen, die Natur einer Curve in eine Gleichung zu kleiden.

Wir schalten hier ein, dass wir nicht absichtslos auf das Druckjahr 1732 aufmerksam gemacht haben. Wir entnehmen ihm, dass Clairaut, als er 1730 seine *Recherches sur les courbes à double courbure* herausgab, Euler's Aufsatz noch nicht kennen konnte, wie Euler's Unabhängigkeit von Clairaut durch das Einreichungsjahr 1728 verbürgt ist.

Eine Curve auf der Oberfläche, fährt Euler fort, könne man, nachdem die Flächengleichung gegeben sei, entweder dadurch bestimmen, dass man einer der drei Coordinaten einen festen Werth gebe, oder dadurch, dass man sich eine zweite Flächengleichung verschaffe, so dass die Curve der Durchschnitt der zwei Oberflächen werde. Endlich einen Flächenpunkt liefere die Verleihung fester Werthe an zwei von den drei Coordinaten der Flächengleichung oder die Vereinigung dreier Flächengleichungen. So läuft die Auffindung der kürzesten Linie auf einer Oberfläche von gegebener Gleichung darauf hinaus, eine zweite Gleichung zwischen x, y, z zu ermitteln, was unter Zugrundelegung der für die Auffindung grösster und kleinster Werthe giltigen Methode erfolge, unter Berücksichtigung des Satzes, dass die Minimaleigenschaft der ganzen Curve auch irgendwelchen Elementen der Curve zukommen müsse.

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1728. T. III, 110—124.

Das war der Satz, welchen Jacob Bernoulli 1697 aussprach (S. 226), welchen ebenderselbe 1701 wiederholt benutzte (S. 430), von welchem auch Johann Bernoulli 1706 Gebrauch machte (S. 437), ebenso wie die Bemerkung Euler's über eine mechanische Lösung der Aufgabe an Redewendungen Johann Bernoulli's aus dem Jahre 1698 (S. 233—234) anknüpft.

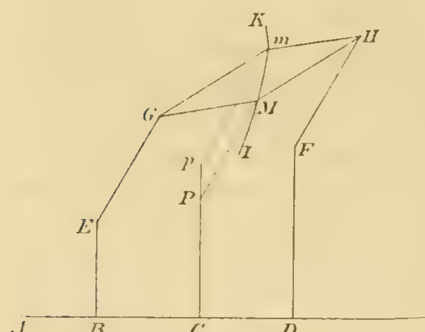


Fig. 137.

Euler sagt: Es mögen (Fig. 137) G und H irgend zwei Punkte der Oberfläche sein, deren Coordinaten $AB, BE (= b)$, $EG (= c)$, und $AD (= AB + 2a)$, $DF (= f)$, $FH (= g)$ heissen. Zwischen ihnen liege der Punkt M mit den Coordinaten $AC (= AB + a)$, $CB (= x)$, $PM (= y)$. Dann ist $GM = \sqrt{a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2}$, $MH = \sqrt{a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2}$ und soll $GM + MH = \sqrt{a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2}$ ein Minimum werden, so ist die Bedingung dafür das Verschwinden seines Differentials, d. h. $\frac{(x-b)dx + (y-c)dy}{\sqrt{a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2}} = \frac{(f-x)dx + (g-y)dy}{\sqrt{a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2}}$, welches sich rechtfertigt, indem m als unendlichnahe bei M gelegen und alsdann $GM + MH = Gm + mH$ angenommen wird. Die vorhergehende Annahme $BC = CD = a$ rechtfertigt sich, wenn die Punkte G und H selbst unendlichnahe bei M auf der als bekannt angesehenen kürzesten Linie IK liegen. Alsdann ersetzen sich aber a, b, c, f, g durch andere Bezeichnungen. Es ist nämlich $a = dt$, $f = x + dx$, $g = y + dy$, $b = x - dx + d^2x$, $c = y - dy + d^2y$, wie Euler ohne weitere Begründung hinschreibt. Ferner ist, sagt er, durch die Kenntniss der IK auch die Kenntniss des Verhältnisses von dx zu dy im Punkte M bedingt als $\frac{dx}{dy} = \frac{Q}{P}$, und die erhaltene Gleichung geht, wenn in den Zählern der darin vorkommenden Brüche dx und dy durch Q und P, wenn sodann a, b, c, f, g durch ihre erwähnten Werthe ersetzt werden, über in $\frac{Q(dx - d^2x) + P(dy - d^2y)}{\sqrt{dt^2 + (dx - d^2x)^2 + (dy - d^2y)^2}}$ $= \frac{Q dx + P dy}{\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2}}$. Der links vom Gleichheitszeichen stehende Bruch ist dasjenige, was aus dem rechts befindlichen entsteht, wenn dx um d^2x, dy um d^2y abnimmt, während P, Q, dt constant bleiben, d. h. die Gleichung behauptet, das unter der Voraussetzung constanter

P, Q, dt gewonnene Differential von $\frac{Qdx + Pdy}{\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2}}$ sei Null, oder

$$\frac{(dt^2 + dx^2 + dy^2)(Qd^2x + Pd^2y) - (Qdx + Pdy)(dx\,d^2x + dy\,d^2y)}{(\sqrt{dt^2 + dx^2 + dy^2})^3} = 0$$

beziehungsweise $\frac{Qd^2x + Pd^2y}{Qdx + Pdy} = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$. Neben dieser ersten Differentialgleichung bedarf man einer zweiten, welche durch Differentiation der Flächengleichung als $Pdx = Qdy + Rdt$ gewonnen wird. Dass in ihr die Grössen P, Q vorkommen müssen, geht daraus hervor, dass, wenn in dem der kürzesten Linie angehörenden Flächenpunkte M das Coordinatenstück t constant geworden ist, nur $Pdx = Qdy$ übrig bleiben kann, wie vorher angenommen war.

Will man Euler's Gleichung auf ihre Uebereinstimmung mit der heute üblichen Form der Gleichung der kürzesten Linie prüfen, welche $F(x, y, z) = 0$ als Flächengleichung und $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial F}{\partial z} = R$ voraussetzend $P(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + Q(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + R(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0$ lautet, so ist zu beachten, dass bei Euler t steht, wo wir heute z, und $-P$, wo wir heute P schreiben, dass er ferner dt (beziehungsweise dz) als constant betrachtet, wodurch $d^2z = 0$ wird. Die heutige Gleichung verwandelt sich dadurch in $Pdt\,d^2y + Qdt\,d^2x + R(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0$. Vervielfacht man sie mit dt, so nimmt sie die Gestalt an $(Pd^2y + Qd^2x)dt^2 + Rdt(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0$ oder $(Pd^2y + Qd^2x)dt^2 = (Qdy - Pdx)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = -Pd^2y\,dx^2 - Qd^2x\,dy^2 + dx\,dy(Pd^2x + Qd^2y) - Pd^2y\,dy^2 - Qd^2x\,dx^2 + Pd^2y\,dy^2 + Qd^2x\,dx^2$ oder endlich $\frac{Qd^2x + Pd^2y}{Qdx + Pdy} = \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$ wie bei Euler.

Die weitere Fortsetzung des Aufsatzes wendet die bisher allgemein gehaltenen Betrachtungen auf besondere Oberflächen an.

Von viel grösserer Tragweite waren die Ergebnisse des um vier Jahre späteren Aufsatzes *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*[1]. Euler wusste hier, unter dem Titel einer allgemeinen Auflösung des im weitesten Sinne des Wortes gefassten isoperimetrischen Problems, alle auf die Auffindung grösster oder kleinster Werthe gerichteten Aufgaben in ein System von Classen zu bringen, welche die Art ihrer Behandlung sofort von selbst enthüllen.

1. Solle eine Curve bestimmt werden, welche eine Eigenschaft A im grössten oder kleinsten Maasse besitze, so müsse man zwei aneinanderstossende Curvenelemente in Betrachtung ziehen.

---

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T VI, 123—155.

2. Solle eine die Eigenschaft A besitzende Curve bestimmt werden, welche ausserdem die Eigenschaft B im grössten oder kleinsten Maasse besitze, so müsse man drei aneinanderstossende Elemente in Betrachtung ziehen.

3. Solle eine die Eigenschaften A und B besitzende Curve bestimmt werden, welche ausserdem eine Eigenschaft C im grössten oder kleinsten Maasse besitze, so müsse man vier aneinanderstossende Curvenelemente in Betrachtung ziehen u. s. w.

4. Solle man also eine mit n Eigenschaften bereits versehene Curve so bestimmen, dass sie eine $(n+1)^{\text{te}}$ Eigenschaft im grössten oder kleinsten Maasse besitze, so müsse man $n+2$ aneinanderstossende Curvenelemente in Betrachtung ziehen.

Euler erkennt ferner die Vertauschbarkeit der Bedingungen in dem Sinne, dass, wenn von $n+1$ geometrischen Thatsachen n der Curve bereits anhaften, die $(n+1)^{\text{te}}$ im grössten oder kleinsten Maasse erzielt werden soll, jede der $n+1$ Eigenschaften als die $(n+1)^{\text{te}}$ gewählt werden darf, ohne den Classencharakter der Aufgabe zu verändern. Als Princip gilt ihm[1]), dass die Maximal- oder Minimaleigenschaft der ganzen Curve jedem ihrer Theile innewohnen müsse. Als Regel schreibt er vor[2]), dass man von der Curve, welche bereits als gefunden gedacht werde, zu einer nächsten Lage derselben übergehen und dann die bedungene Eigenschaft als noch bestehend in Rechnung bringen solle. Dann giebt er genauere Vorschriften für die Aufgaben der aufeinanderfolgenden Classen, jedem Kenner sein Studium der Jacob Bernoulli'schen Abhandlung vom Mai 1697 (S. 226, Fig. 41) sofort enthüllend.

Fig. 138.

In der ersten Aufgabenclasse ist (Fig. 138) $a\beta c$ die neue Lage der früheren Curve abc, in welche der Uebergang so stattfindet, dass das Curvenelement ab zu $a\beta$ wird und um βm zunimmt, während das Curvenelement bc zu βc wird und um bn abnimmt; eine Zunahme (Abnahme) um das Stück $b\beta$ hat auch $bM(cN)$ erlitten. Nun ist $\triangle\, \beta b m \sim b a M$ und $\triangle\, \beta b n \sim b c N$ und deshalb $\beta m = \frac{bM \cdot b\beta}{ab}$ sowie $bn = \frac{cN \cdot b\beta}{cb}$, sodass alle Veränderungen auf $b\beta$ zurückgeführt erscheinen. Als Beispiel wird die Aufgabe[3]) behandelt, die-

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T. VI, 128. [2]) Ebenda T. VI, 129. [3]) Ebenda T. VI, 129—130

jenige Curve zu finden, für welche $\int x^n ds$ ein Minimum sei. Das findet statt, wenn jedes Element des Integrals ein Minimum ist, also auch $OA^n \cdot ab$ und $OB^n \cdot bc$, sowie deren Summe. Der Summe $OA^n \cdot ab + OB^n \cdot bc$ entspricht in der Neulage $OA^n \cdot a\beta + OB^n \cdot \beta c$, und Gleichsetzung der Summen führt zu $OA^n \cdot \beta m = OB^n \cdot bn$ oder zu $\frac{OA^n \cdot bM \cdot b\beta}{ab} = \frac{OB^n \cdot cN \cdot b\beta}{cb}$ oder zu $\frac{OA^n \cdot bM}{ab} = \frac{OB^n \cdot cN}{cb}$. Der Ausdruck rechts ist das, was aus dem Ausdrucke links wird, wenn die denselben bildenden Strecken sich je um ihr Differential verändern. Die Gleichung besagt also, dass das Differential von $\frac{OA^n \cdot bM}{ab}$ verschwinde, beziehungsweise dass $\frac{OA^n \cdot bM}{ab}$ eine Constante sei, welche man durch a^n bezeichnen darf. Dabei ist $OA = x$, $bM = dy$, $ab = ds$, folglich $\frac{x^n dy}{ds} = a^n$ die Differentialgleichung der gesuchten Curve. Wäre die Bedigung allgemeiner die gewesen, es soll $\int P ds$ ein Minimum sein, wo P irgend eine Function von x bezeichnet, so hiesse die Differentialgleichung der gesuchten Curve $Pdy = Ads$, wo A eine Constante ist.

Bei der zweiten Aufgabenclasse bildet sich (Fig. 139) die neue Lage $a\beta\gamma d$ der als bekannt gedachten Curve $abcd$ in der Weise[1]), dass $OA = x$, $Aa = y$, $oa = s$, $AB = BC = CD = dx$, $bM = dy$, $ab = ds$, $cN = dy + d^2y$, $bc = ds + d^2s$, $dP = dy + 2d^2y + d^3y$, $cd = ds + 2d^2s + d^3s$ war, und dass $a\beta = ab + m\beta$, $\beta\gamma = bc - b\mu - \nu c$, $\gamma d = cd + \gamma n$, $M\beta = Mb + b\beta$, $N\gamma = Nc - b\beta - c\gamma$ wird, und auch Pd ist gegen das frühere Pd um $c\gamma$ gewachsen.

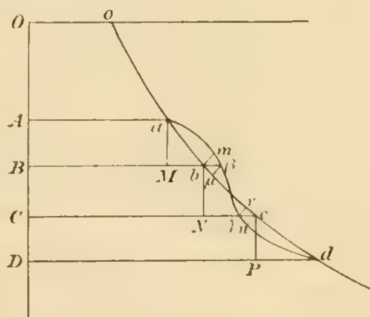


Fig. 139.

Dreiecksähnlichkeiten fordern $\beta m = \frac{bm \cdot b\beta}{ab}$, $b\mu = \frac{cN \cdot b\beta}{ab}$, $c\nu = \frac{cN \cdot c\gamma}{cb}$, $\gamma n = \frac{dP \cdot c\gamma}{cd}$. Zwei Bedingungen sollen erfüllt werden, führen mithin zu zwei Gleichungen, in welchen nach den erforderlichen Einsetzungen $b\beta$ und $c\gamma$ im ersten Grade hervortreten, so dass die Gleichungen die Form haben $P \cdot b\beta - Q \cdot c\gamma = 0$, $R \cdot b\beta - S \cdot a\gamma = 0$. Meistentheils, fährt Euler fort[2]), ist dabei $Q = P + dP$, $S = R + dR$; haben aber die Grössen P, Q und R, S diese formelle

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T. VI, 132—134. [2]) Ebenda T. VI, 134.

Eigenschaft nicht, so können sie dieselbe immer erhalten, indem man die Gleichungen mit einem Factor vervielfacht oder durch einen Divisor theilt[1]).

Bleiben wir einen Augenblick bei dieser Aeusserung stehen. Sie sagt nichts Anderes als dass $Q - P$, und genau das Gleiche gilt für $S - R$, ein vollständiges Differential sei, beziehungsweise dass diese Behauptung immer für $M(Q - P)$ Geltung habe, wo M irgend einen Factor bezeichnet, der im einfachsten Falle die Einheit ist. Euler muss also damals das Vorhandensein des integrirenden Factors bereits erkannt haben, von welchem allerdings ein ganz besonderer Fall schon bei Johann Bernoulli (S. 218) Anwendung fand. Wir haben (S. 734) zum voraus auf diese Stelle verwiesen.

Sei nun der einfachste Fall $M = 1$ als vorhanden gedacht, und dividirt man die Gleichungen $P \cdot b\beta = (P + dP)c\gamma$, $R \cdot b\beta = (R + dR)c\gamma$ durch einander, so entsteht $\frac{P}{R} = \frac{P + dP}{R + dR}$ und daraus leicht $\frac{dP}{P} = \frac{dR}{R}$, woraus durch Integration $P + aR = 0$ folgt, worin a eine Integrationsconstante ist. Die Aufgabe ist aber damit auf die der Auffindung der Functionen P und R zurückgeführt, und ist diese gelungen, so ist ein maschinales Hinschreiben der Endgleichung ermöglicht. Euler führt specielle Annahmen für die in der Einleitung (S. 820) als A und B bezeichneten Eigenschaften ein, d. h. er wählt gewisse Integrale, von denen das eine constant bleiben, das andere ein Maximum oder ein Minimum werden soll, und zeigt wie unter dieser Voraussetzung P und R ausfallen. Soll etwa die ebene Curve gesucht werden[2]), welche bei gleichem Umfange die grösste Fläche umschliesst, so ist $A = \int y\,dx$, $B = \int ds$. Euler findet $P = dx$ und $R = dq$, wo q eine Abkürzung für $\frac{dy}{ds}$ ist[3]). Die gesuchte Differentialgleichung heisst demnach $dx = a\,dq$ und nach der Integrirung $x = aq = a\frac{dy}{ds}$ oder $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, welche neuerdings integrirt zu $x^2 + y^2 = a^2$ führt.

Bei der dritten Aufgabenclasse werden an einer den vorigen Figuren im Ganzen ähnlichen und nur durch die Berücksichtigung von vier Curvenelementen von ihnen abweichenden Zeichnung und mit gleichfalls im Ganzen ähnlichen Schlüssen drei Gleichungen ermittelt[4]), deren jede die Form $P \cdot b\beta - Q \cdot c\gamma + R \cdot d\delta = 0$ besitzt,

---

[1]) *Si vero huiusmodi formam non habuerint poterunt semper multiplicando vel dividendo aequationes ad talem reduci.* [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1732 *et* 1733. T. VI, 143. [3]) Ebenda T. VI, 142. [4]) Ebenda T. VI, 149.

zwischen welchen alsdann $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ sich eliminiren, so dass eine Endgleichung $P + mp + n\pi = 0$ entsteht, innerhalb deren m und n willkürliche Constanten sind, hervorgegangen aus zwei nach einander vollzogenen Integrationen.

Euler's Aufsatz war noch nicht gedruckt, da reichte Clairaut 1733 der Pariser Akademie eine Arbeit über einige Maximal- und Minimalaufgaben, *Sur quelques questions de maximis et minimis*[1], ein. Die Aufgaben, welche er erwähnt, sind ungemein sinnreich erdacht, z. B. diejenige, welche verlangt, auf einer gegebenen Oberfläche den Weg zwischen zwei gegebenen Punkten der Art zu vollziehen, dass der auf diesem Wege sich Befindende die geringstmögliche Einwirkung von mehreren Kräften empfinde, welche selbst auf der Fläche ihre Wirkungsmittelpunkte besitzen und jede von dem ihrigen aus nach irgend einem bekannten Gesetze sich äussern. Insbesondere behandelt alsdann Clairaut die Aufgabe: Auf einer durch ihre Gleichung nach x, y, z gegebenen Oberfläche eine Curve zwischen den gegebenen Punkten f und g zu zeichnen, so dass für die Ausdehnung der Curve fGg das Integral $\int X ds$ einen constanten Werth besitze, das Integral $\int X^2 ds$ dagegen ein Minimum werde[2]. Dabei bedeuten X und X^2 irgend welche Functionen von x, y, z, also X^2 nicht etwa das Quadrat von X. Auch Clairaut benutzt drei consecutive Curvenelemente[3] GH, HJ, JK und sucht sie so zu bestimmen, dass, wenn X und X^2 in H die Werthe Y, Y^2, in J die Werthe Z, Z^2 annehmen, $X \cdot GH + Y \cdot HJ + Z \cdot JK$ constant und $X^2 \cdot GH + Y^2 \cdot HJ + Z^2 \cdot JK$ ein Minimum werde. Ein wesentlich neuer Gedanke ist zu dem, was man schon längere Zeit wusste, nicht hinzugetreten.

Ausserdem hat Clairaut in dem gleichen Jahre 1733 einen wenigstens zum Theil hierher gehörenden Aufsatz über die Gestalt der Erde veröffentlicht[4], welchem er 1739 eine Fortsetzung folgen liess[5]. Beide Aufsätze hängen mit den Gradmessungen in Lappland und in Peru zusammen, an deren ersterer Clairaut theilnahm. In dem Aufsatze von 1733 bewies Clairaut den Satz, dass bei jeder kürzesten Linie auf einer Umdrehungsfläche das Product aus dem Radius des Parallelkreises, dem einer ihrer Punkte angehört, in den Sinus des Winkels, den ihre ebendort gezogene Berührungslinie mit dem Meridiane bildet, einen constanten Werth besitzt; in der Fortsetzung von

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1733 pag. 186—194. [2]) Ebenda pag. 188. [3]) Ebenda pag. 189: *Soient GH, HJ, JK trois côtes consécutifs de la courbe cherchée.* [4]) Ebenda: *Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini avec plusieurs méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la terre.* [5]) Ebenda. Année 1739: *Suite du mémoire de* 1733.

1739 sind die kürzesten Linien auf wenig von der Kugelgestalt abweichenden Umdrehungsellipsoiden mit Hilfe von Reihen, die nach Potenzen der Excentricität fortschreiten, näherungsweise bestimmt.

Wollen wir die der Zeitfolge nach sich hier anschliessenden Arbeiten Euler's, dessen Interesse an verwickelteren Maximal- und Minimalaufgaben 1732 keineswegs erschöpft war, besprechen, so fordert der Zusammenhang, dass wir rückgreifend einen älteren Aufsatz kurz erwähnen. Euler hatte 1726 in den A. E. einen Aufsatz über die Isochrone im widerstehenden Mittel veröffentlicht, und dabei gelegentlich die Aufgabe gestellt[1]): Die Brachystochrone im widerstehenden Mittel unter der Voraussetzung einer gleichmässig wirkenden Schwerkraft zu finden. Hermann gab 1727 eine Auflösung dieser Aufgabe[2]) in einem ausserdem noch mannigfache mechanische Fragen behandelnden Aufsatze und kam darin auf Irrwege, welche ihn zu einem anderen Ergebnisse führten als Euler erlangt hatte. Euler machte ihn brieflich darauf aufmerksam und erhielt von Hermann die Antwort, er sei selbst an seiner Untersuchung zweifelhaft geworden und behalte sich vor, die Frage neuerdings zu prüfen. Bevor ihm dieses möglich war, starb Hermann im Juli 1733, und nun glaubte Euler es dem Andenken des verstorbenen Freundes schuldig zu sein, den Sachverhalt so, wie wir es ihm folgend gethan haben, zu schildern, damit man Hermann nicht später einmal beschuldige, Unrichtiges veröffentlicht zu haben, ohne jemals seinen Irrthum eingesehen zu haben. Zugleich theilte Euler seine eigene Auflösung mit[3]), und es kennzeichnet die für die damalige Zeit noch unbesiegbare Schwierigkeit der Aufgabe, dass auch Euler's Behandlung als eine verfehlte bezeichnet werden muss, was Daniel Bernoulli in einem Briefe vom 12. September 1736[4]) (also bevor der betreffende Band der Petersburger Abhandlungen 1740 in die Oeffentlichkeit gelangte) Euler selbst gegenüber aussprach.

In eben diesem Jahre 1736 erschien Euler's erstes umfangreiches Werk, seine *Mechanica sive motus scientia analytice exposita.* Wie wir, um uns nicht allzuweit von der reinen Mathematik zu entfernen, Hermann's Phoronomie von 1716 nur im Vorübergehen (S. 216) genannt haben, wie wir auch auf Daniel Bernoulli's Hydrodynamik von 1738 keine Rücksicht zu nehmen gedenken, so werden wir uns versagen müssen ausführlich über Euler's Mechanik zu berichten. Was indessen in ihrem II. Theile in nächster Beziehung

---

[1]) A. E. 1726 pag. 363. [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1727. T. II, 139sqq. [3]) Ebenda 1733 *et* 1734. T. VII, 135—149. [4]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 434.

zu den in diesem Kapitel behandelten Fragen steht, dürfen wir nicht übergehen.

Schon in der Vorrede zum II. Theile der Mechanik[1]) sagt Euler: Ich habe bewiesen, dass ein durch keine Kräfte angetriebener Körper sowohl auf einer gegebenen Linie als auch auf einer gegebenen Oberfläche sich gleichförmig bewegen müsse: dass aber auf der letzteren der Weg des Körpers die kürzeste Linie sein werde, welche auf dieser Oberfläche gezogen werden kann.

Gleich im 1. Kapitel von der nichtfreien Bewegung im Allgemeinen ist der 8. und 9. Satz[2]) dazu bestimmt, die in der Vorrede ausgesprochene Behauptung zu rechtfertigen. Der 8. Satz hat folgenden Inhalt. Sei (Fig. 140) auf der Oberfläche ABC ein Weg DM durch einen bewegten Körper durchlaufen. An und für sich hätte der Körper alsdann die Neigung, sich in der Tangentialrichtung Mn zur seitherigen Bahn weiter zu bewegen, wenn dem nicht der Zwang auf der Oberfläche zu bleiben entgegenstünde. Um die thatsächliche Bahn der Fortbewegung des Körpers zu ermitteln, zerlegt man das in einem Zeitelemente zu durchlaufende Wegelement Mn in zwei Componenten, in die zur Oberfläche senkrechte $nm \parallel MO$ und in die der Oberfläche selbst angehörende Mm. Die Bewegung nm wird durch den genannten Zwang aufgehoben, die Bewegung Mm wird durch jenen Zwang nicht verändert und bleibt die eigentliche Bahn des Körpers. Die Ebene Mmn auch nach rückwärts in der Richtung der MD fortgesetzt, enthält die zur Oberfläche senkrechte nm, ist also selbst senkrecht zu dem als Ebene aufzufassenden Flächenelement, die Bewegungsbahn hat also die Eigenschaft, dass die Ebene, in welcher zwei beliebige zusammenhängende Elemente derselben liegen, normal zur Oberfläche steht. Das ist die Eigenschaft der kürzesten Linie, welche Johann Bernoulli schon 1698 kannte (S. 234), welche aber, da dessen Briefwechsel mit Leibniz erst 1745 im Drucke erschien, 1736 für die Oeffentlichkeit noch neu war. Euler dürfte sie selbständig erkannt haben und musste sie beweisen. Das that er im 9. Satze. Der Krümmungshalbmesser der Curve DMm liegt in der durch zwei zusammenhängende Curvenelemente bestimmten Ebene und fällt deshalb in die Richtung der Flächen

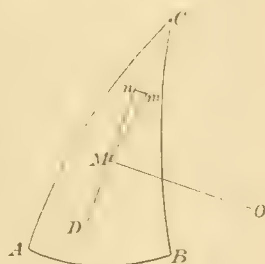


Fig. 140.

[1]) Euler's Mechanik (deutsch von J. Ph. Wolfers) II, 3. [2]) Ebenda II, 24—29.

normale MO, während er zugleich senkrecht zur Curve DMm ist. Es war also einestheils der Krümmungshalbmesser einer beliebigen Flächencurve im Punkte M, anderentheils die Flächennormale in ebendemselben Punkte M zu ermitteln und alsdann die Frage zu beantworten, unter welcher Bedingung beide Richtungen zusammenfallen. Die Antwort bringt Euler in die Gestalt einer Differentialgleichung, welche genau ebendieselbe ist, die er im III. Bande der Petersburger Commentarien, auf den er sich ausdrücklich bezieht, als Gleichung der kürzesten Linie (S. 819) gefunden hatte. Soweit war Doppeltes erreicht: es war gezeigt, dass die Bewegungsbahn eines zum Verbleiben auf einer Oberfläche genöthigten Körpers eine kürzeste Linie sei, es war die geometrische Haupteigenschaft der kürzesten Linien entdeckt, nachentdeckt, wie wir sagen müssen, da Johann Bernoulli's Vorrecht durch seinen vorerwähnten Briefwechsel gesichert ist.

Ein Zusatz zum 8. Satze[1] sagt: Ein auf der Oberfläche ausgespannter Faden bezeichnet die kürzeste Linie, und daher wird derselbe zugleich den Weg angeben, auf welchem der Körper an der Oberfläche fortgeht. Vielleicht darf man annehmen, Euler sei ziemlich gleichzeitig auf Satz 8 und auf diesen Zusatz gestossen, der ihn dann veranlasste, in Satz 9 den Nachweis des Besitzes der Eigenschaft des Satzes 8 für die kürzesten Linien zu liefern. Hat man doch auch für Johann Bernoulli die Entdeckung eben jener Eigenschaft der kürzesten Linien mit mechanischen Untersuchungen, nämlich mit der Aufsuchung der Kettenlinie, in Verbindung zu bringen gewusst[2].

Im 4. Kapitel, von der Bewegung eines Punktes auf einer gegebenen Oberfläche[3], ist wiederholt von kürzesten Linien die Rede, ist wiederholt auf die Abhandlung von 1728 Bezug genommen. Wir begnügen uns damit, dieses zu bemerken und zu gleicher Zeit darauf aufmerksam zu machen, dass Euler schon hier eine volle Beherrschung der analytischen Geometrie des Raumes an den Tag legte, wenn auch die im Anhange zum II. Bande der Introductio zusammengestellten Entdeckungen noch fehlten, vielleicht auch nur noch nicht zum Ausspruche kamen, weil keine Gelegenheit dazu vorlag.

In dem Erscheinungsjahre 1736 der Mechanik legte Euler der Petersburger Akademie eine Abhandlung unter dem Titel *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis*[4]) vor.

---

[1]) Euler's Mechanik (deutsch von J. Ph. Wolfers) II, 25, Zusatz 2. [2]) P. Stäckel, Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig vom 3. Juli 1893. S. 447—448. [3]) Euler's Mechanik (deutsch von J. Ph. Wolfers) II, 419—460. [4]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 159—190.

Die Bedeutung dieser neuen und leichten Auffindung von mit Maximal- oder Minimaleigenschaften versehenen Curven ist schon aus folgendem ihrer Einleitung entnommenen Satze ersichtlich: „Ich bin jüngst auf derartige Fragen gestossen, zu deren Erledigung die früher von mir aufgestellten Formeln nicht genügten, so dass ich mich genöthigt sah, neue weitere Aussichten eröffnende Formeln zu betrachten und für sie zur Auflösung der Aufgabe geeignete Werthe zu suchen.“ Er will also die 24 früher betrachteten Einzelformeln (S. 822) zunächst durch eine einzige ersetzen und dann früher noch Unberücksichtigtes erledigen. Euler bedient sich dabei römischer Zahlzeichen als Stellenzeiger, welche über den Buchstaben angebracht andeuten sollen, dass von einem Raumpunkte zu einem zweiten, dritten u. s. w. Consecutivpunkte übergegangen sei, für welche die mit dem Stellenzeiger versehenen Buchstaben das Gleiche bedeuten, wie die nichtindicirten Buchstaben für den ursprünglichen Punkt. Demnach ist $\overset{\mathrm{I}}{y} = y + dy$, $\overset{\mathrm{II}}{y} = y + 2dy + d^2y$, $\overset{\mathrm{I}}{dy} = dy + d^2y$, $\overset{\mathrm{II}}{dy} = dy + 2d^2y + d^3y$, $\overset{\mathrm{I}}{d^2y} = d^2y + d^3y$, $\overset{\mathrm{I}}{Q} = Q + dQ$ u. s. w. Ferner bedeutet p die erste Ableitung von y nach x, s die Bogenlänge, so dass $dy = p\,dx$, $ds = \sqrt{1+p^2}\,dx$ ist, wobei dx als constant gilt. Stellt nun $\int Q\,dx$ das Integral vor, von welchem gewünscht wird, dass es eine Maximal- oder Minimaleigenschaft erhalte, und ist Q eine Function von s, y, x, p, so wird $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp$, oder mit anderen Worten: es ist $\frac{\partial Q}{\partial s} = L$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = M$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = N$, $\frac{\partial Q}{\partial p} = V$. Das auf das einzelne Element ab der gesuchten Curve bezügliche $Q\,dx$ wird in dem consecutiven Elemente bc zu $\overset{\mathrm{I}}{Q}\,dx$, und für die beiden Curvenelemente $ab + bc$ zusammen findet $Q\,dx + \overset{\mathrm{I}}{Q}\,dx$ statt. Bei einer benachbarten Curve, welche zwischen a und c einen Zwischenpunkt β besitzt, bringt der Uebergang von ab nach $a\beta$ nur die Veränderung von p in $p + \frac{b\beta}{dx}$ zu Stande, während die dem Punkte a entsprechenden x, y, s unverändert bleiben, daher ist hier $dQ\,dx = V \cdot b\beta$. Der Uebergang von bc nach βc dagegen verlangt, dass in $\overset{\mathrm{I}}{Q}$ die Grössen $\overset{\mathrm{I}}{y}, \overset{\mathrm{I}}{s}, \overset{\mathrm{I}}{p}$ in $\overset{\mathrm{I}}{y} + b\beta$, $\overset{\mathrm{I}}{s} + \frac{dy \cdot b\beta}{ds}$, $\overset{\mathrm{I}}{p} - \frac{b\beta}{dx}$ übergehen, und dadurch wird $\overset{\mathrm{I}}{dQ}\,dx = \left[\overset{\mathrm{I}}{L}\,\overset{\mathrm{I}}{ds} + \overset{\mathrm{I}}{M}\,\overset{\mathrm{I}}{dy} + \overset{\mathrm{I}}{N}\,dx + \overset{\mathrm{I}}{V}\,\overset{\mathrm{I}}{dp}\right] dx = \overset{\mathrm{I}}{L}\,\frac{dx \cdot dy \cdot b\beta}{ds} + \overset{\mathrm{I}}{M}\,dx \cdot b\beta - \overset{\mathrm{I}}{V} \cdot b\beta$. Der Unterschied zwischen den Ausdrücken, welche der Elementensumme $ab + bc$ und derjenigen

$\alpha\beta + \beta c$ entsprechen, ist daher $\left[V + \frac{\overset{\mathrm{I}}{L}\,dx\,dy}{ds} + \overset{\mathrm{I}}{M}\,dx - \overset{\mathrm{I}}{V}\right] b\beta$ oder $\left[\frac{\overset{\mathrm{I}}{L}\,dx\,dy}{ds} + \overset{\mathrm{I}}{M}\,dx - dV\right] b\beta$, und da derselbe $= P \cdot b\beta$ sein und $P = 0$ die Curvengleichung darstellen soll, so heisst eben diese[1] $\overset{\mathrm{I}}{L}\,dx\,dy + \overset{\mathrm{I}}{M}\,dx\,ds = ds\,dV$, wo alsdann die Indicirung von L und M weggelassen ist. Euler zeigt die Anwendung dieser Formel an Beispielen, auch an solchen, deren Maximal- beziehungsweise Minimaleigenschaft sich nicht auf ein einfaches Integral $\int Q\,dx$, sondern auf ein Doppelintegral $\int Q\,dx \int R\,dx$ bezieht[2]), und wo das gelehrte Verfahren weniger einfache, aber doch dem Grundgedanken nach ganz ähnliche Ergebnisse zu Tage fördert.

Wesentlich anderer Natur wird aber die Aufgabe, wenn die Function ausser x, y, s und deren erste Differentiale auch zweite Differentiale in sich schliesst[3]) und vier Curvenelemente der Betrachtung zu unterziehen sind. Euler fügt seinen bisherigen Bezeichnungen noch r für die zweite Ableitung von y nach x bei, setzt also $d^2y = r \cdot dx^2$ und $d^2s = \frac{pr\,dx^2}{\sqrt{1+p^2}}$, und nimmt $\frac{\partial Q}{\partial r} = W$ an. In diesem Falle erhält er die Curvengleichung[4]): $d^2W - dV \cdot dx + \frac{L\,dx^2 \cdot dy}{ds} + M \cdot dx^2 = 0$, und unter den Beispielen für diese Annahme ist die berichtigte Herleitung der Brachistochrone im widerstehenden Mittel zu finden[5]). Im noch allgemeineren Falle, dass wieder ein Doppelintegral in Frage komme, führt die Darstellung von P zu einer äusserst verwickelten Exponentialgrösse[6]).

Gegen Ende der Abhandlung kommt Euler zu dem wichtigsten Ergebnisse von der Unrichtigkeit von Jacob Bernoulli's Voraussetzung, von welcher er selbst, wie alle seine Vorgänger, bis zu diesem Zeitpunkte unbedenklich ausgegangen war. Wenn, sagt er[7]), unter allen die Punkte o und z verbindenden Curven eine bestimmt werden soll, bei welcher die bedingende Function Q weder s noch ein Integral einschliesst, dann wird die Curve oz die betreffende Bedingung erfüllen, insofern jedes ihrer Elemente oa die gleiche Eigenschaft besitzt; hängt dagegen Q von s oder von einem Integrale ab, so kann die Curve oz die Grösse $\int Q\,dx$ zu einem Maximum oder Minimum machen, auch ohne dass irgend eines ihrer Elemente der gleichen Eigenschaft theilhaftig wäre.

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 164. [2]) Ebenda VIII, 165. [3]) Ebenda VIII, 167. [4]) Ebenda VIII, 169. [5]) Ebenda VIII, 172—174 und 180—181. [6]) Ebenda VIII, 184. [7]) Ebenda VIII, 188.

Man begreift, dass Johann Bernoulli, auch wenn sein Charakter ein anderer gewesen wäre, und wenn er nicht so eifersüchtig darüber gewacht hätte, dass ihm der Ruhm seiner unleugbar ausserordentlichen Verdienste nicht vorenthalten bliebe, nur mit einigem Verdrusse sehen konnte, wie Euler und, wenn auch in geringerem Maasse, Clairaut die Aufgabe von der kürzesten Linie erledigten, ohne dass seiner anders gedacht wurde als dadurch, dass Euler ihn 1728 als Denjenigen nannte, durch welchen er selbst auf den Gegenstand hingewiesen worden sei, und der sich in Besitz der allgemeinen Lösung befinde (S. 817). Bernoulli musste die Gelegenheit der Herausgabe seiner Gesammtwerke 1742 benutzen, um zu veröffentlichen was, weil schon überholt, in Akademieschriften nicht mehr gut unterzubringen war, und er fügte, wie schon (S. 235) angedeutet wurde, eine Fussnote des Inhalts bei, die Niederschrift rühre nicht von ihm selbst her, sondern von Professor Klingenstierna in Upsala, welchem er Ende 1728 die entsprechenden Mittheilungen gemacht habe, eine Datirung, welche sich sehr gut damit deckt, dass Euler schon etwas früher die Aufgabe vorgelegt erhielt. Johann Bernoulli hat dann der Klingenstierna'schen Fassung noch Verschiedenes beigefügt, Erläuterungen und Zusätze, für welche er auch die stylistische Verantwortung übernahm[1]). Nach einleitenden Bemerkungen über ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, z, zwischen welchen eine Gleichung als Flächengleichung gedacht ist, stellt Johann Bernoulli die Aufgabe der kürzesten Linie und findet ihre Lösung darin[2]), es werde die Ebene, welche durch drei einander unendlich nahe liegende Punkte einer kürzesten Linie bestimmt sei, senkrecht zur Berührungsebene der Oberfläche stehen. Einen Beweis für diese Behauptung sucht man vergeblich. Was Johann Bernoulli giebt, ist eine Gleichung, welche unter der Voraussetzung des gegenseitigen Senkrechtstehens jener beiden Ebenen zu einander erfüllt wird, und welche die Differentialgleichung der kürzesten Linie ist. Aendert man die Buchstaben und einige Annahmen, so zeigt sich volle Uebereinstimmung mit Euler's Ergebnisse von 1728, wie in einem Scholium gezeigt wird[3]). Johann Bernoulli hat bei dieser Gelgenheit der durch drei Consecutivpunkte einer Raumcurve bestimmten Ebene den Namen der osculirenden Ebene, *planum osculans*[4]), beigelegt, welcher von manchen Schriftstellern beibehalten worden ist, während andere ihn durch den der Schmiegungsebene ersetzten. Den Rest der Abhandlung bilden Beispiele.

[1]) Joh. Bernoulli, *Opera* IV, 111, Fussnote: *Scholii hujus ut et sequentium sunt ipsius Authoris verba.* [2]) Ebenda IV, 109. [3]) Ebenda IV, 112. [4]) Ebenda IV, 113 und 115.

Wir mussten diesen Seitenblick auf die Abhandlung Johann Bernoulli's werfen und kehren nun wieder zu Euler zurück. Die Ergebnisse von 1736, mit welchen er theilweise sich selbst widerlegte, hatten ihn noch fester an den Gegenstand gefesselt. Es war an der Zeit, die Summe aller Forschungen zu ziehen, und er that es in einem 320 Quartseiten starken Bande, der 1744 unter dem Titel: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* bei dem bekanntesten Verleger mathematischer Schriften in jener Zeit, bei Bousquet in Lausanne und Genf, erschien. Der lange Titel wird gemeiniglich abgekürzt, und man spricht schlechtweg von Euler's *Methodus inveniendi*. Der Band zerfällt in 6 Kapitel und 2 Zusätze, von welchen Unterabtheilungen jede aus Paragraphen mit immer neu beginnender Nummerirung besteht.

Kapitel 1, Von der zur Auffindung krummer Linien dienenden Methode der Maxima und Minima im Allgemeinen, zeigt zuerst das Unterscheidende der Aufgabe. Nicht eine Curve sei gegeben, auf welcher Punkte gesucht werden, in denen gewisse Grössen Maxima oder Minima werden, die Curve selbst werde gesucht. Die Brüder Bernoulli hätten zuerst solcherlei Aufgaben gestellt, und zwar hätten sie die Brachistochrone erforscht. Man hat mit Recht darauf aufmerksam gemacht[1]), dass darin eine geschichtliche Ungenauigkeit liege. Schon Newton hat in der in seinen Principien behandelten Frage nach dem Körper des kleinsten Widerstandes (S. 279) eine Aufgabe gestellt und gelöst, welche dem gleichen Gebiete angehört, und welche Euler selbst in § 36 des 2. Kapitels seiner Methodus inveniendi sich vorgelegt hat. Dass er weder an jener späteren Stelle noch hier bei den geschichtlichen Bemerkungen Newton genannt hat, kann in seiner unleugbar vorhandenen, durch die Art, wie der Prioritätsstreit gegen Leibniz geführt worden war, hervorgerufenen Abneigung gegen Newton und dessen nächste Anhänger begründet sein, doch halten wir auch nicht für ganz ausgeschlossen, dass Euler die Newton'schen Behauptungen im Scholium zum 34. Satze des 7. Abschnittes des 2. Buches der Principien nicht als eine Behandlung der eigentlichen Frage gelten liess, wenn er sie auch wohl gekannt haben wird. Als Brachistochrone, sagt Euler, bezeichne man nicht etwa eine Curve, auf welcher die Zeit des Herabfallens die kürzeste wird, denn dann wäre eine verticale Gerade die Brachistochrone, vielmehr sei nur diejenige Curve gemeint, längs welcher das

---

[1]) Stäckel in Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 46, S. 139, Anmerkung 18.

Herabgleiten von einem gegebenen Punkte nach einem zweiten in der kürzesten Zeit erfolge. Die Differentialgleichung der Brachistochrone, zu welcher man gelange, sei zweiter Ordnung. Deren Integration führe also zwei Constanten ein, und diese werden durch die zwei Punkte als Anfangspunkt und Endpunkt der Bewegung bestimmt[1]. Innerhalb der schon als nothwendig gekennzeichneten Einschränkung der Aufgabe ist eine weitere Unterscheidung geboten. Entweder hat man es mit der absoluten Methode der Maxima und Minima zu thun, welche lehrt[2], unter der Gesammtheit aller Curven diejenige zu bestimmen, in welcher eine vorgelegte veränderliche Grösse den grössten oder kleinsten Werth erhält, oder mit der relativen Methode der Maxima und Minima, welche das Gleiche nur für diejenigen Curven lehrt[3], welche überdies eine vorgeschriebene Eigenschaft besitzen. Man weiss, dass die von Euler den Methoden beigelegten Benennungen als absolut und relativ später auf die Maxima und Minima selbst übertragen worden sind. Was die Bezeichnung betrifft, so schreibt Euler in der Methodus inveniendi[4] $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = sdx$ und w für die meistens s genannte Bogenlänge[5]. Formel des Maximum oder Minimum heisst, und wird durch W bezeichnet[6], die Grösse, welche in der gesuchten Curve einen grössten oder kleinsten Werth annehmen soll. Ob es um ein Maximum oder um ein Minimum sich handelt, ist für den Gang der Untersuchung unwesentlich und wird am sichersten nachträglich zur Entscheidung gebracht[7]. Das erwähnte W ist ein Integral mit der Integrationsvariabeln x und muss auf einen bestimmten Abscissenabschnitt bezogen werden[8], d. h. W ist ein bestimmtes Integral zwischen Grenzen x_1 und x_2. In ihm müssen ausser x auch noch andere Variable vorkommen[9], sei es y oder Ableitungen von y nach x, oder w oder andere Integrale, in welchen wiederum x nicht allein vorkommen darf, die aber wie W selbst erst dann bestimmbar werden, wenn der Zusammenhang zwischen y und x gefunden ist[10]. In diesem Sinne heisst $W = \int Zdx$, wo Zdx aber nicht integrirt werden kann, ohne dass eine Gleichung zwischen y und x festgestellt wird[11], und drei Fälle sind zu unterscheiden[12]. Erstens kann Z eine algebraische oder doch eine bestimmte Function von $x, y, p, q, r \cdots$ sein; zweitens können in Z ausserdem Integrale vorkommen; drittens kann Z durch eine Differentialgleichung gegeben sein, deren Integration man nicht

[1] Euler, *Methodus inveniendi*, Cap. I, § 6. [2] Ebenda Cap. I, § 7. [3] Ebenda Cap. I, § 10. [4] Ebenda Cap. I, § 16. [5] Ebenda Cap. I, § 20. [6] Ebenda Cap. I, § 23 und 29. [7] Ebenda Cap. I, § 33. [8] Ebenda Cap. I, § 25. [9] Ebenda Cap. I, § 28. [10] Ebenda Cap. I, § 34. [11] Ebenda Cap. I, § 36. [12] Ebenda Cap. I, § 37.

zu vollziehen weiss. Im ersten Falle waltet das Princip, dass die Eigenschaft des Maximum oder Minimum für jeden noch so kleinen Theil der Curve gilt, wenn sie für die ganze Curve stattfinden soll[1]), während in den anderen Fällen von diesem Principe abgesehen und auf die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung Rücksicht genommen werden muss[2]). Die Beweisführung für diesen schon 1736 von Euler ausgesprochenen Satz (S. 828) ist folgende. Man will $W = \int\limits_{x_1}^{x_2} Z dx$ zu einem Maximum oder Minimum machen, sage man etwa, um Zweideutigkeiten auszuschliessen, zu einem Maximum. Die Curve amz werde durch die Ordinate in m (bei $x = x_m$) in zwei Theile getheilt, und es sei $\int\limits_{x_1}^{x_m} Z dx = P$, $\int\limits_{x_m}^{x_2} Z dx = Q$, also $W = P + Q$. Ist Q unabhängig von P, so muss allerdings, damit W Maximum werde, auch P und Q ein solches sein. Kommt aber in Z ein ohne die Kenntniss der Functionalität von y in x unbestimmbarer Ausdruck vor, so findet jene Unabhängigkeit zwischen P und Q nicht statt. Das Curvenstück mz könnte ausser von seinem Anfangspunkte m auch von dem nach m hinführenden Curvenstücke am abhängen, und in Folge dessen könnte, nachdem das Curvenstück am etwas geändert wurde, P in $P - p$, Q in $Q + q$, W in $P - p + Q + q$ übergehen. Ist alsdann $q > p$, so wird W für die ganze neue Curve ein Maximum, aber nicht für deren einzelne Stücke. Zur bequemeren Uebersicht werden weitere Bezeichnungen eingeführt[3]), nicht übereinstimmend mit denen von 1736 (S. 827), aber doch ihnen ähnlich. Statt der römischen Zahlzeichen über den Buchstaben dient eine rechts oben angebrachte Bestrichelung, um den Zustand in einem späteren consecutiven Punkte anzudeuten, und eine rechts unten angebrachte Bestrichelung weist auf den Zustand in einem früheren Punkte hin. So ist z. B. $y' = y + dy$, $y'' = y' + dy' = y + 2dy + d^2y$, während $y = y_, + dy_,$, $y_, = y_{,,} + dy_{,,}$ bezeichnet. Auch irgend eine durch F dargestellte Function von x erleidet solche Bestrichelung, wie an $F = F_, + dF_,$ und $F' = F + dF$ ersichtlich ist. Dem F als Functionalzeichen die Variable x beizuschreiben unterliess Euler in der Methodus inveniendi, wiewohl er schon zehn Jahre früher (S. 712) diese Bezeichnungsweise benutzt hatte. Die Methode, deren man sich zu bedienen hat, um die Curve zu entdecken, für welche $\int\limits_{x_1}^{x_2} Z dx$ einen

[1]) Euler, *Methodus inveniendi* Cap. I, § 38. [2]) Ebenda Cap. I, § 43.
[3]) Ebenda Cap. I, § 48—55.

grössten oder kleinsten Werth annimmt, ist die gleiche, deren Euler sich seit 1728 bediente, in der Methodus inveniendi begründet er sie aber[1]. Jeder Ausdruck, sagt er, der ein Maximum wird, d. h. bis zu einem gewissen Werthe ansteigt und dann wieder abnimmt, nähert sich dem Maximalwerthe in der Weise, dass die Zunahme, beziehungsweise die Abnahme, vor und nach dem grössten Werthe unmerklich ist. In Ausnahmefällen sei freilich die Zu- und Abnahme nahe beim Maximum unendlich gross, doch dürfe man von diesen absehen. Sei nun die Curve *amnoz* diejenige, für welche $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ Maximum (Minimum) wird. Bei einer anderen von a nach z sich erstreckenden Curve wird $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ einen anderen Werth annehmen, der sich von dem vorhergehenden um so mehr unterscheidet, je mehr die Curven von einander abwichen. Der Unterschied wird nur dann unmerklich, wenn die Abweichung unendlich klein ist. Man wähle daher einen Punkt ν unendlich nahe bei n, berechne den Werth von $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ einmal über die Curve *amnoz* und einmal über die Curve *amvoz* und setze beide Werthe einander gleich, beziehungsweise deren Unterschied gleich Null, so erhält man die Bedingung dafür, dass *amnoz* die gewünschte Maximal- oder Minimaleigenschaft besitzt, d. h. die Differentialgleichung von *amnoz*. Man darf ja nicht ausser Augen lassen, dass die Aenderung der Curve unendlichklein sein muss, es genügt also z. B. nicht, den Bogen *mno* unendlichklein zu wählen, die Entfernung $n\nu$ muss im Verhältnisse zum Bogen *mno* unendlichklein sein[2]. Der vorerwähnte Unterschied zwischen den beiden Werthen von $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ wird der Differentialwerth der Formel, *valor differentialis formulae*, genannt[3].

Kapitel 2, Ueber die absolute Methode der Maxima und Minima zur Auffindung von Curven, wendet die am Schlusse des 1. Kapitels gegebene Vorschrift auf bestimmte Aufgaben an, welche selbst wieder vom Allgemeinen zum Besonderen fortschreiten, indem zuerst die Gestaltung von Z im weiteren Sinne des Wortes zur Rede kommt, woran einzelne Beispiele sich anschliessen. Die erste Aufgabe ist und muss sein, die Aenderungen zu finden, welche in einer Curve *amz* die einzelnen bestimmten, auf die Curve bezüg-

[1]) Euler, *Methodus inveniendi* Cap. I, § 58. [2]) Ebenda Cap. I, § 59. [3]) Ebenda Cap. I, § 62.

lichen Grössen erleiden, wenn die Ordinate Nn eines Punktes um ein unendlich kleines Stück nv vermehrt wird[1]) (Fig. 141). Die Ordinate $Mm = y$, welche zur Abscisse $AM = x$ gehört, bleibt unverändert, ebenso $Ll = y_,$, welches zu $x - dx$ gehört, und $Oo = y''$, $Pp = y'''$ u. s. w., denen die Abscissen $x + 2dx$, $x + 3dx$ u. s. w. entsprechen. Die zu $x + dx$ gehörende Ordinate $Nn = y'$ erhält den Zuwachs nv. Daraus folgt aber das Uebrige. Es ist z. B. $p = \frac{y' - y}{dx}$, $p' = \frac{y'' - y'}{dx}$. Die Veränderung von

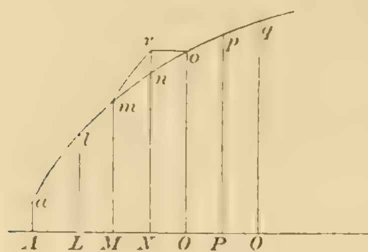


Fig. 141.

p ist folglich $\frac{nv}{dx}$ und die von p' ist $-\frac{nv}{dx}$. Ferner ist $q = \frac{p' - p}{dx}$ $= \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}$, dessen Veränderung also $-\frac{2nv}{dx^2}$ u. s. w. Euler stellt in einer kleinen Tabelle die Aenderungen von y', p, p', $q_,$, q, q', $r_{,,}$, $r_,$, r, r', r'' zusammen. Ist die Aenderung eines aus solchen Grössen zusammengesetzten Ausdruckes zu ermitteln[2]), so differentiirt man den betreffenden Ausdruck und ersetzt die Differentiale der einzelnen Grössen durch die ihnen der Tabelle gemäss zukommenden Aenderungen. Ist z. B. $y'\sqrt{1 + p^2}$ zu behandeln, so sucht man $d(y'\sqrt{1 + p^2}) = dy'\sqrt{1 + p^2} + \frac{y'pdp}{\sqrt{1 + p^2}}$. Man hatte aber nv als Aenderung von y' und $\frac{nv}{dx}$ als Aenderung von p. Die gesuchte Aenderung von $y'\sqrt{1 + p^2}$ ist mithin $nv\sqrt{1 + p^2}$ $+ \frac{y'p \cdot nv}{dx\sqrt{1 + p^2}}$. Als zweite Aufgabe wird die Curve gesucht, welche $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ zu einem Maximum oder Minimum macht, während Z eine bestimmte Function von x und y ist[3]). Theilt man das Abscissenintervall von x_1 bis x_2 in lauter gleiche Elemente dx von unendlicher Kleinheit, so lässt das Integral $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ sich als Summe ebensovieler Theile von der Gestalt Zdx betrachten, welche aber in jedem Theilpunkte der Abscissen ein anderes Z in sich schliessen, d. h. man hat $\int_{x_1}^{x_2} Zdx = \cdots + Z_{,,}dx + Z_,dx + Zdx + Z'dx + Z''dx + \cdots$. Der

[1]) Euler, *Methodus inveniendi* Cap. II, § 1. [2]) Ebenda Cap. II, § 3 u. 4.
[3]) Ebenda Cap. II, § 7.

Differentialwerth der Formel wird, wenn $Nn = y'$ um nv wächst, alle übrigen Ordinaten aber ungeändert bleiben, einzig in dem Differentialwerthe von $Z'dx$ bestehen. Ist $dZ = Mdx + Ndy$, $dZ' = M'dx + N'dy'$, und erwägt man, dass infolge der unmittelbar vorhergehenden Erörterung in dZ' für dx der Werth 0 (weil die Abscisse sich nicht ändert), für dy' der Werth nv gesetzt werden muss, so entsteht als Aenderung von Z' ausschliesslich $N' \cdot nv$, und als den 0 gleich zu setzenden Differentialwerth von $Z'dx$ erhält man $N' \cdot dx \cdot nv = (N + dN) dx \cdot nv = N \cdot dx \cdot nv$, weil dN gegen N verschwindet. Als gesuchte Curvengleichung behält man schliesslich $N = 0$. So wird[1] z. B. das Integral $\int (15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5) dx$ zu einem Maximum oder Minimum, wenn $a^2x^2 - a^3x + a^2y^2 - y^4 = (ax - y^2)(ax + y^2 - a^2) = 0$ ist. Enthält Z neben x und y auch p, so dass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ ist, so verleiht die Curve $N - \frac{dP}{dx} = 0$ dem Integrale $\int\limits_{x_1}^{x_2} Zdx$ einen Maximal- oder Minimalwerth[2]. Als Beispiel wird eine kürzeste Linie in der Ebene gefordert, oder verlangt, dass $\int \sqrt{1 + p^2}\, dx$ ein Minimum werde[3]. Zunächst wird darauf aufmerksam gemacht, dass der Sinn der Aufgabe es mit sich bringe, dass kein Maximum, sondern nur ein Minimum eintreten könne. Ferner ist $Z = \sqrt{1 + p^2}$, $dZ = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} dp$, also $N = 0$, $P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ und $dP = 0$ die verlangte Gleichung, welche integrirt zu $P = C$, d. h. $\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = C$, $p = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} = n$ führt. Dann ist weiter $dy = ndx$ und $y = a + nx$ eine Gerade, deren beide Integrationsconstanten n und a sich bestimmen, sobald man die beiden Punkte der Ebene kennt, zwischen denen die kürzeste Linie verlangt wird. Ein anderes Beispiel[4] fordert, dass $\int \frac{y\,dy^3}{dx^2 + dy^2}$ ein Maximum oder Minimum werde, welches, wie Euler sagt, bei der Frage nach dem Rotationskörper auftritt, der in der Richtung seiner Axe, in einer Flüssigkeit bewegt, den geringsten Widerstand erleidet. Das ist also die Newton'sche Aufgabe ohne Newton's Namen, wie wir (S. 830) ankündigten. Durch $dy = pdx$ nimmt das früher W genannte Integral eine andere Gestalt an. $\int \frac{y\,dy^3}{dx^2 + dy^2} = \int \frac{yp^3\,dx}{1 + p^2}$ mit $Z = \frac{yp^3}{1 + p^2}$, $dZ = Mdx + Ndy + Pdp = \frac{p^3}{1 + p^2} dy + \frac{y(3p^2 + p^4)}{(1 + p^2)^2} dp$. Nun hatte Euler schon etwas

[1] Euler, *Methodus inveniendi* Cap. II, § 18. [2] Ebenda Cap. II, § 21. [3] Ebenda Cap. II, § 33. [4] Ebenda Cap. II, § 36.

früher[1]) die Bemerkung gemacht, eine einmalige Integration der Differentialgleichung der gesuchten Curve vollziehe sich leicht, wenn (wie hier) $M = 0$ sei. Die Curvengleichung war $N - \frac{dP}{dx} = 0$, oder nach Multiplication mit dy und Ersetzung von $\frac{dy}{dx}$ durch p auch $Ndy - pdP = 0$, oder $Ndy + Pdp - Pdp - pdP = 0$, oder $Ndy + Pdp = Pdp + pdP$, d. h. $dZ = d(Pp)$, woraus $Z + a = Pp$ folgt. In unserem Beispiele heisst diese Gleichung $\frac{yp^3}{1+p^2} + a = \frac{py(3p^2+p^4)}{(1+p^2)^2}$ oder $y = \frac{a(1+p^2)^2}{2p^3}$. Nun kann man aus $p = \frac{dy}{dx}$ den Schluss ziehen $dx = \frac{dy}{p}$, $x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{p^2}$ und in unserem Falle $x = \frac{a(1+p^2)^2}{2p^4} + \int \frac{a(1+p^2)^2}{2p^5}\,dp = \frac{a}{2}\left[\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \log p\right]$, so dass die Curve ermittelt oder wenigstens construirt werden kann. Der weitere allgemein gehaltene Fortschritt lässt ausser x, y, p auch q in Z vorkommen, so dass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$ ist. Dann wird $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ ein Maximum oder Minimum für die Curve[2]) $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$. Kommen aber in Z ausser x und y beliebig hohe Ableitungen von y nach x vor, so dass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \cdots$ wird, dann ist $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \cdots$ die Gleichung der Curve, welche dem Integrale $\int_{x_1}^{x_2} Zdx$ einen Maximal- oder Minimalwerth verleiht[3]). Wir gehen an den Beispielen für die beiden letzterwähnten Fälle, an den Bemerkungen über die vollständige oder mindestens theilweise Integrirbarkeit der Gleichung für den bisher allgemeinsten Fall vorüber.

Kapitel 3. Ueber die Auffindung von mit Maximal- oder Minimaleigenschaften versehenen Curven, wenn in der Formel des Maximum oder Minimum unbestimmte Grössen vorkommen. Euler versteht unter unbestimmten Grössen, welche in Z vorkommen sollen, ein unbestimmbares Integral $\Pi = \int [Z]dx$, wo $[Z]$ eine Function von x, y, p, q, $r \cdots$ bezeichnet und $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \cdots$ ist. Euler zeigt nun[4]), dass, wenn $[Z]$ etwa α aufeinanderfolgende Ableitungen von y nach x enthält (er wählt $\alpha = 5$, d. h. er lässt p, q, r, s, t vorkommen), man

[1]) Euler, *Methodus inveniendi* Cap. II, § 30. [2]) Ebenda Cap. II, § 40. [3]) Ebenda Cap. II, § 56. [4]) Ebenda Cap. III, § 1.

Π für zwei Curvenpunkte mehr mit um gleiche Stückchen dx zunehmenden Abscissen, also $\Pi, \Pi', \Pi'', \cdots \Pi^{(\alpha+1)}$ beachten müsse, deren Veränderung in Folge der Zunahme einer Ordinate um das Element nv zu suchen ist. Für noch spätere Punkte sind die Aenderungen des entsprechenden Π dieselben, wie die zuletzt gefundene, d. h. $d\Pi^{(\alpha+1)} = d\Pi^{(\alpha+2)} = d\Pi^{(\alpha+3)} = \cdots$. Dieser Satz dient als Grundlage zur Auflösung von Aufgaben, bei welchen $\int Z dx$ ein Maximum oder Minimum werden soll, während in Z ausser Π mehr und mehr andere veränderliche Grössen vorkommen. Zuletzt ist vorausgesetzt[1], es sei $dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq$, neben $\Pi = \int [Z] dx$. Die Allgemeinheit erstreckt sich bezüglich des Π so weit, dass dasselbe sogar nur durch eine Differentialgleichung $d\Pi = [Z] dx$ gegeben zu sein braucht, während Π selbst innerhalb $[Z]$ vorkommt[2]).

Kapitel 4, Von der Anwendung der bisher gelehrten Methode auf die Auflösung verschiedener Aufgaben, fügt den schon unmittelbar an die gegebenen Vorschriften sich anschliessenden Beispielen noch weitere hinzu. Da begegnen wir, um nur wenige Einzelheiten zu erwähnen, der Aufgabe, die ebene Curve von geringster Bogenlänge zu finden, welche über einer gegebenen Strecke mit Hilfe zweier der Lage nach gegebenen Endordinaten einen gegebenen Flächenraum bilde, nebst ihrer Auflösung den Kreis[3]). Da finden wir die Aufgabe, auf irgend einer nach aussen oder nach innen gewölbten Oberfläche die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten zu ermitteln[4]), welche zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung führt. Ein andermal soll das Product zweier Integrale $\int\limits_0^x Z dx \cdot \int\limits_0^x Y dx$ bei $x = a$ ein Maximum oder Minimum werden und die Curve gesucht sein, bei welcher dieses stattfindet[5]). Euler nimmt die Curvengleichung zwischen x und y als bereits gefunden an, wodurch $\int\limits_0^a Z dx = A$, $\int\limits_0^a Y dx = B$ sich ergiebt und A und B Constante sind. Nimmt y um nv zu, so wird A in $A + dA$, B in $B + dB$, AB in $AB + AdB + BdA + dA \cdot dB$ übergehen. Die Veränderung von AB ist also, da $dA \cdot dB$ gegen die anderen Glieder verschwindet, $AdB + BdA$, welches $= 0$ gesetzt werden muss. Allerdings dürfe man, fährt Euler fort, von dieser Gleichung aus nicht weiter schliessen $0 = AdB + BdA = d(AB)$, also $AB =$ Const., denn dA und dB

---

[1]) Euler, *Methodus inveniendi* Cap. III, § 31. [2]) Ebenda Cap. III, § 38. [3]) Ebenda Cap. IV, § 8. [4]) Ebenda Cap. IV, § 11. [5]) Ebenda Cap. IV, § 14.

seien nur uneigentlich so geschrieben und bedeuten die Differentialwerthe von $\int\limits_0^x Z dx$ und $\int\limits_0^x Y dx$, aus welchen die Constanten A und B mittels $x = a$ hervorgingen[1]).

Kapitel 5, Methode unter allen mit der gleichen Eigenschaft ausgestatteten Curven diejenige zu finden, welche überdies ein Maximum oder Minimum hervorbringt, geht zur relativen Methode über und beginnt nach Schilderung dessen, was gemeinschaftliche Eigenschaft von beliebig vielen Curven heisse, mit der Behauptung[2]), dass, wenn eine Curve unter der Gesammtheit aller zu derselben Abscisse gehörenden eine vorgeschriebene Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade besitze, sie zugleich diese Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade unter denjenigen Curven besitzen müsse, welche mit ihr irgend eine Eigenschaft gemeinsam haben. Der allgemeine Gang bei Behandlung der Aufgabe[3]), unter allen Curven mit der Eigenschaft B diejenige zu ermitteln, welche eine andere Eigenschaft A im höchsten oder im geringsten Grade besitze, wird folgender sein. Die der Aufgabe genügende Curve az (Fig. 142) wird, weil es um ein Maximum oder Minimum von A sich handelt, diesem A den gleichen Werth bewahren, nachdem eine unendlich kleine Aenderung vorgenommen wurde, welche aber die gemeinsame Eigenschaft B nicht stören darf. Zwei Bedingungen — Unveränderlichkeit von A und von B — können unmöglich durch Beachtung einer einzigen der Veränderung unterworfenen Ordinate in Rechnung gezogen werden. Der Anzahl der Bedingungen entsprechend müssen vielmehr bei der abweichenden Gestalt der Curve zwei Ordinaten Nn und Oo sich um Elemente $n\nu$ und $o\omega$ verändert haben. Darauf werden beide Bedingungen gesondert berücksichtigt. Man setzt den Differentialwerth von B für sich $= 0$ und ebenso den von A, so weit beide durch die Verschiebung von n und o nach ν und ω zu Stande kommen. Beide Gleichungen haben die Form $S \cdot n\nu + T \cdot o\omega = 0$ mit S und T als auf die Curve bezüglichen Grössen. Sie gestatten die Elimination von $n\nu$ und $o\omega$, und deren

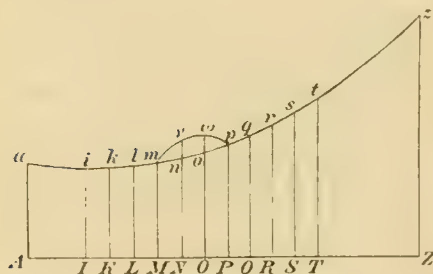


Fig. 142.

[1]) Euler, *Methodus inveniendi* Cap. IV, § 18. [2]) Ebenda Cap. V, § 10.
[3]) Ebenda Cap. V, § 14.

Ergebniss ist die gesuchte Differentialgleichung der fraglichen Curve. Die beiden Ausdrücke A und B werden ganz gleichmässig behandelt, und es kommt nicht in Betracht, welcher von ihnen die gemeinsame Eigenschaft, und welcher das Maximum oder Minimum bezeichnet. Beide können daher unter einander vertauscht werden[1]). Da die ganze Rechnung auf die Bildung der beiden Gleichungen $S \cdot n\nu + T \cdot o\omega = 0$ hinausläuft, d. h. auf die Bildung der Differentialwerthe von B und von A, so ist die grundlegende Aufgabe die, den Differentialwerth irgend eines unbestimmten auf ein gegebenes Stück der Abscissenaxe sich beziehenden Ausdruckes zu finden, welcher aus der Verschiebung der beiden Curvenpunkte n und o nach ν und ω hervorgeht[2]). Eine die Aenderungen der Ordinaten y und ihrer drei ersten Ableitungen p, q, r für fünf aufeinanderfolgende Curvenpunkte enthaltende Tabelle lässt als Differentialwerth jedes unbestimmten Ausdruckes ein $I \cdot n\nu + K \cdot o\omega$ erkennen, in welchem $K = I'$, d. h. gleich dem Werthe von I im nächstfolgenden Curvenpunkte. Mit anderen Worten: hat ein Ausdruck V unter der Voraussetzung alleiniger Zunahme von Nn um $n\nu$ nach den Regeln der früheren Kapitel den Differentialwerth $I \cdot n\nu$, so ist sein Differentialwerth bei gleichzeitiger Zunahme von Nn um $n\nu$ und von Oo um $o\omega$ durch $I \cdot n\nu + I' \cdot o\omega$ gegeben. Zu den gleichen Folgerungen führt folgende Betrachtung[3]). Der aus den beiden Ordinatenzuwächsen $n\nu$, $o\omega$ hervorgehende Differentialwerth $I \cdot n\nu + K \cdot o\omega$ eines Ausdruckes geht bei $o\omega = 0$ in den einzig $n\nu$ enthaltenden Theil $I \cdot n\nu$ über, bei $n\nu = 0$ dagegen in den einzig $o\omega$ enthaltenden Theil, welcher, weil der Zuwachs $o\omega$ einer nachfolgenden Ordinate angehört, $I' \cdot o\omega$ heissen muss. Werden beide Zuwächse $n\nu$ und $o\omega$ zusammen betrachtet, so muss der Differentialwerth $I \cdot n\nu + I' o\omega$ sein (vervielfacht mit dem in unserer ganzen Darstellung weggelassenen gemeinschaftlichen Factor dx), denn bei der Rechnung beeinflussen die Stückchen $n\nu$ und $o\omega$ einander nicht. Ebenso leicht wie die Gleichungen, welche oben $S \cdot n\nu + T \cdot o\omega = 0$ hiessen, sich beschaffen lassen, ist auch die Elimination von $n\nu$ und $o\omega$ zwischen denselben auszuführen. Soll nämlich die Curve gesucht werden, für welche W mit anderen über einem gegebenen Stücke der Abscissenaxe gezeichneten Curven gemeinschaftlich und zugleich V am grössten oder am kleinsten ist, und ist $dA \cdot n\nu + dA' \cdot o\omega$ der Differentialwerth von V, nebst $dB \cdot n\nu + dB' \cdot o\omega$ der Differentialwerth von W, so vervielfache man die der Null gleichgesetzten Differentialwerthe mit zwei Factoren α und β, so dass man erhält:

---

[1]) Euler, *Methodus inveniendi* Cap. V, § 19. [2]) Ebenda Cap. V, § 22.
[3]) Ebenda Cap. V, § 26.

$$\alpha \cdot dA \cdot nv + \alpha \cdot dA' \cdot o\omega = 0$$
$$\beta \cdot dB \cdot nv + \beta \cdot dB' \cdot o\omega = 0.$$

Dann setzt man $\alpha \cdot dA + \beta \cdot dB = 0$ und $\alpha \cdot dA' + \beta \cdot dB' = 0$, woraus α und β proportionale Werthe sich bestimmen lassen müssen. Ist aber $\alpha \cdot dA + \beta \cdot dB = 0$, so muss auch $\alpha' \cdot dA' + \beta' \cdot dB' = 0$, d. h. beim Vergleich mit $\alpha dA' + \beta dB' = 0$ unter Berücksichtigung des Umstandes, dass α' sich von α nicht um ein Endliches unterscheiden kann[1]), muss $\alpha = \alpha'$ und zugleich $\beta = \beta'$ sein. Der Sinn dieser Gleichungen $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ ist der, dass α und β constant sind, und zwar willkürliche Constante, und die mit diesen Constanten behaftete Gleichung $\alpha dA + \beta dB = 0$ ist die Differentialgleichung der gesuchten Curve[2]). Mit Herstellung dieser Gleichung hat aber Euler die Aufgabe, welche er sich vorlegte, so weit bewältigt, dass der ganze übrige Theil des Kapitels, so lesenswerth er ist, gewissermaassen als Folgerung oder als Anhäufung von Beispielen zu dem in unserem Berichte Enthaltenen aufgefasst werden kann.

Kapitel 6, Methode unter allen Curven, welchen mehrere Eigenschaften gemeinschaftlich sind, diejenige zu bestimmen, bei der ein grösster oder ein kleinster Werth auftritt, erweitert nur die im Vorhergehenden benutzten Methoden, ohne sie, abgesehen von der Anzahl der in der Schlussgleichung auftretenden willkürlichen Constanten, wesentlich zu verändern. Auch über die beiden Anhänge, Von den elastischen Curven und Von der nach der Methode der grössten und kleinsten Werthe zu behandelnden Bewegung geworfener Körper im widerstandlosen Mittel, eilen wir schweigend hinweg.

Dagegen müssen wir bei zwei Euler'schen Abhandlungen von 1753 kurz verweilen, von welchen schon (S. 541) in einem ganz anderen Zusammenhange die Rede war. In der ersten Abhandlung: *Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits*[3]), schickt Euler gewissermaassen eine Entschuldigung voraus. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie auf die Lehre von den kürzesten Linien stützen zu wollen, scheine eine Anwendung allzuhoher Mittel zu niedrigeren Zwecken, wenn man nicht bedenke, dass damit der Weg zur Trigonometrie kürzester Linien überhaupt auf jeder Oberfläche gezeigt sei. Sei (Fig. 143) O der Pol einer Kugel, AB der Aequator, M ein beliebiger Punkt

[1]) Auf diese nothwendige in der *Methodus inveniendi* fehlende Ergänzungsbemerkung hat P. Stäckel in seiner Uebersetzung (Ostwald's Klassiker Nr. 46, S. 141, Note 28) hingewiesen. [2]) Euler, *Methodus inveniendi* Cap. V, § 27. [3]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 223—257.

mit der Breite MP und der Länge AP, AM die kürzeste Linie von A nach M; sei ferner AM um das Element Mm bis zum Durchschnitte mit dem Meridiane Op verlängert und Mn senkrecht zu Op.

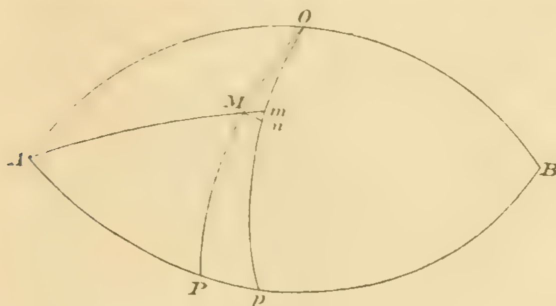


Fig. 143.

Euler führt dabei folgende abkürzende Bezeichnungen ein: $AP = x$, $PM = y$, $Pp = dx$, $mn = dy$, $AM = s$, $Mm = ds$, $\angle AMP = \vartheta$, $\angle PAM = \zeta$. Der Kugelhalbmesser ist als Einheit gewählt. Euler nimmt ferner als bekannt an, dass Mn und Pp im Verhältnisse von $\sin OM$ und $\sin OP$ stehen, d. h. $Mn : dx = \sin(90^0 - y) : \sin 90^0$ und $Mn = \cos y \cdot dx$. In dem bei n rechtwinkligen Dreieckchen Mnm ist mithin $ds^2 = dy^2 + \cos y^2\, dx^2$, oder unter Einsetzung von $dy = p dx$ auch $ds = dx\sqrt{p^2 + \cos y^2}$, beziehungsweise $s = \int dx\sqrt{p^2 + \cos y^2}$. Damit AM eine kürzeste Linie sei, muss also $\int dx\sqrt{p^2 + \cos y^2}$ ein Minimum werden. Euler beruft sich jetzt auf seine früheren Arbeiten. Er setzt $\sqrt{p^2 + \cos y^2} = Z$, er erinnert daran, dass $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$ zu suchen sei, dass, wenn x in Z nicht unmittelbar vorkomme, wenn also $M = 0$ sei, die Curvengleichung $Ndx - dP = 0$ in $Ndy - pdP = 0$ übergehe, wodurch $dZ = pdP + Pdp = d(Pp)$ sich ergebe, beziehungsweise $Z = Pp + C$ (S. 836). Auf das hier vorliegende Z angewandt führt die Vorschrift zu $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos y\sqrt{\cos y^2 - C^2}}{C}$ und zu $dx = \frac{C dy}{\cos y\sqrt{\cos y^2 - C^2}}$, sowie zu $ds = \frac{\cos y\, dy}{\sqrt{\cos y^2 - C^2}}$. Nun soll die Integrationsconstante C bestimmt werden. Im Dreieckchen Mmn ist $\angle Mmn = \vartheta$ und $\operatorname{tng} \vartheta = \frac{Mn}{mn} = \frac{dx \cdot \cos y}{dy} = \frac{\cos y}{p} = \frac{C}{\sqrt{\cos y^2 - C^2}}$, woraus weiter $\sin \vartheta = \frac{C}{\cos y}$ folgt. C ist als Constante unabhängig von der Lage von M, man kann also M auch auf A fallen lassen. In diesem Augenblicke wird $y = 0$, $\cos y = 1$,

$\sin\vartheta = \cos\zeta$, also $C = \cos\zeta$. Die beiden gefundenen Differentialgleichungen gehen also über in

$$dx = \frac{\cos\zeta\, dy}{\cos y\sqrt{\cos y^2 - \cos\zeta^2}}$$

und
$$ds = \frac{\cos y\, dy}{\sqrt{\cos y^2 - \cos\zeta^2}},$$

neben welchen die endliche Gleichung

$$\sin\vartheta = \frac{\cos\zeta}{\cos y}$$

besteht. Die Integration jener Differentialgleichungen, welche keine neue Integrationsconstante erfordert, weil im Punkte A sowohl x, als y, als s verschwindet, führt zu $x = \arcsin\frac{\cos\zeta\cdot\sin y}{\cos y\cdot\sin\zeta}$ und $s = \arccos\sqrt{\frac{\cos y^2 - \cos\zeta^2}{1 - \cos\zeta^2}}$ oder zu $\sin x = \frac{\cos\zeta\cdot\sin y}{\cos y\cdot\sin\zeta}$ und $\cos s = \frac{\sqrt{\cos y^2 - \cos\zeta^2}}{\sin\zeta}$ immer wieder neben $\sin\vartheta = \frac{\cos\zeta}{\cos y}$. Mit Hilfe dieser drei Gleichungen lassen sich aber alle möglichen Beziehungen zwischen je vier von den sechs Grössen x, y, s, ϑ, ζ und $90^0 = \angle AMP$ herstellen, d. h. die Formeln der sphärischen Trigonometrie für das rechtwinklige Dreieck sind gefunden, ohne dass die eigentliche Natur der kürzesten Linien auf der Kugeloberfläche sich hätte wahrnehmen lassen müssen. Da es nur in unserer Absicht lag anzudeuten, welchen Weg Euler einschlug, so dürfen wir uns damit begnügen zu bemerken, dass nach dem rechtwinkligen auch das beliebigwinklige sphärische Dreieck untersucht wird, und dass alle dafür geltenden Gleichungen mit Einschluss der Flächenformel hergeleitet werden.

Mit noch grösserer Kürze gehen wir über die zweite jener ersten sich unmittelbar anschliessenden Abhandlung Euler's: *Éléments de trigonométrie sphéroidique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits*[1]) hinweg. Sie bringt in Ausführung, was in der Einleitung zur ersten Abhandlung angekündigt war: eine Trigonometrie kürzester Linien auf einer von der Kugel verschiedenen Oberfläche, nämlich auf dem Sphäroid, d. h. dem Umdrehungsellipsoid.

118. Kapitel.

Bestimmte Integrale. Differentialgleichungen.

Wir haben im 109., im 110., im 117. Kapitel bestimmte Integrale auftreten sehen und uns überzeugen können, dass Euler in den Jahren 1730 bis 1733 mehrfach mit solchen Ausdrücken um-

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 258—293.

zugehen hatte und umzugehen wusste. Euler war es auch, der 1743 den ersten Aufsatz veröffentlichte, der seiner Ueberschrift *De inventione integralium si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur*[1] nach den bestimmten Integralen gewidmet war oder, mit Euler zu reden, der Auffindung von Integralen, wenn nach vollzogener Integration der veränderlichen Grösse ein bestimmter Werth beigelegt wird. Es ist der gleiche Aufsatz, von welchem (S. 665) als wichtig für die Lehre von den Reihen die Rede war. Allerdings kommen nur solche bestimmte Integrale vor, deren Integration auch unbestimmt vollzogen werden kann, und wo das eigentlich Fesselnde erst bei Einsetzung des bestimmten Werthes der Veränderlichen sich bemerklich macht.

Schon ein Jahr früher (1742) war Maclaurin's *Treatise of fluxions* erschienen, jenes hervorragende Werk, das uns im 110. und im 112. Kapitel beschäftigte, das jetzt abermals unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt. Wir meinen nicht wegen solcher bestimmten Integrale, wie sie in der Euler'schen von Maclaurin nacherfundenen Summenformel vorkommen, darüber hat das 110. Kapitel uns Aufschluss gegeben, wir meinen Maclaurin's Behandlung der elliptischen Integrale.

Ganz neu war auch dieser Gegenstand nicht. Wir haben im 100. Kapitel (S. 461—472) die Anfänge der Lehre von den elliptischen Integralen entstehen sehen. Wir könnten eine Abhandlung Euler's *Solutio problematum rectificationem ellipsis requirentium*[2]) von 1736 nennen, in welcher Aufgaben gelöst sind, welche mit der Rectification von Ellipsen zusammenhängen, z. B. die Aufgabe auf Ellipsen, welche über einer und derselben Axe $2a$ mit veränderlicher zweiter Axe $2b$ beschrieben sind, von dem Endpunkte A der gemeinschaftlichen Axe aus gleiche Bogenlängen abzuschneiden, beziehungsweise die Curve anzugeben, welche von der unendlichen Schaar solcher Ellipsen je gleiche Bögen, alle von dem gemeinsamen Anfangspunkte A aus gemessen, abschneidet. Gleichwohl sind diese Ergebnisse für die spätere Entwicklung der Wissenschaft nicht von solcher Tragweite gewesen, wie die Untersuchungen Maclaurin's.

Maclaurin[3]) hat sich dabei, wie in seinem ganzen *Treatise of fluxions*, geometrischer Methoden bedient, welche auf gewisse Eigenschaften der Kegelschnitte, insbesondere der gleichseitigen Hyperbel,

[1]) *Miscellanea Berolinensia* VII, 129—171 Berlin 1743). [2]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1736. T. VIII, 86—98. [3]) Felix Müller, Studien über Max Laurin's geometrische Darstellung elliptischer Integrale. Osterprogramm 1875 für die Königl. Realschule, Vorschule und Elisabethschule in Berlin.

deren Gleichung $x^2 - y^2 = a^2$ heisst, sich stützen. Sei (Fig. 144) EAE' eine solche gleichseitige Hyperbel mit A als Scheitelpunkt, S als Mittelpunkt, SA als Axe. Der Hyperbelpunkt E hat die Coordinaten $SG = \xi$, $EG = \eta$, die Berührungslinie EP hat die Gleichung $\xi x - \eta y = a^2$. Im Durchschnittspunkte C der EP mit der Abscissenaxe ist $x = SC = \frac{a^2}{\xi}$, mithin $CG = \xi - \frac{a^2}{\xi} = \frac{\eta^2}{\xi} = \eta \cdot \operatorname{tng} ESG$. Im Dreiecke CEG ist $CG = \eta \cdot \operatorname{tng} CEG$. Folglich ist $\operatorname{tng} CEG = \operatorname{tng} ESG$ und $\angle ESG = CEG = CSP$, wenn SP die von S auf die Berührungslinie EP gefällte Senkrechte ist, oder die Axe der gleichseitigen Hyperbel halbirt den Winkel, welchen der Leitstrahl r vom Mittelpunkte S an einen Hyperbelpunkt E mit der Senkrechten SP von S an die Berührungslinie in E bildet. Den Winkel $\alpha = PSG = GSE$ trägt man zum dritten Male als ESM auf, so dass M der Durchschnitt seines Schenkels SM mit der Scheitelberührenden AM ist.

Fig. 144.

Man hat zunächst $\xi = SE \cdot \cos\alpha$, $\eta = SE \cdot \sin\alpha$, $a^2 = SA^2 = \xi^2 - \eta^2$ $= SE^2(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2) = SE^2 \cdot \cos 2\alpha = SE^2 \cdot \cos MSA = SE^2 \cdot \frac{SA}{SM}$ und $SA^2 = SE^2 \cdot \frac{SA}{SM}$ gestattet die Folgerung $SE^2 = SA \cdot SM$, d. h. $SE = r$ ist das geometrische Mittel zwischen $SA = a$ und SM, welche letztere Strecke m heissen soll, so dass die gefundene Gleichung auch $r^2 = am$ geschrieben werden kann. Ist ferner $AN \perp SM$, so soll $SN = n$, $AM = \mu$, $AN = \nu$, $EP = t$, $SP = \varrho$ geschrieben werden, wo die Beziehungen $\mu = \sqrt{m^2 - a^2}$, $\nu = \sqrt{a^2 - n^2}$, $t = \sqrt{r^2 - \varrho^2}$ auf der Hand liegen. Da $2\alpha = ASM = NSA = PSE$, so sind die durch dieselben drei Buchstaben benannten rechtwinkligen Dreiecke einander ähnlich, und es ist $\frac{r}{t} = \frac{m}{\mu}$, $\frac{n}{a} = \frac{a}{m}$, $\frac{\varrho}{r} = \frac{n}{a}$ neben $r^2 = am$, woraus sich $\varrho^2 = \frac{a^3}{m}$ ergiebt. Auch eine Differentialbeziehung zwischen dem Hyperbelbogen $s = AE$ und dem Leitstrahle r weiss Maclaurin sich zu verschaffen, nämlich $\frac{ds}{dr} = \frac{m}{\mu} = \frac{m}{\sqrt{m^2 - a^2}}$. Aus $r^2 = am$ folgt $2r\,dr = a\,dm$, $dr = \frac{a\,dm}{2r} = \frac{a\,dm}{2\sqrt{am}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{m}}\,dm$ und $ds = \frac{m}{\sqrt{m^2 - a^2}}\,dr$ $= \frac{\sqrt{am}}{2\sqrt{m^2 - a^2}}\,dm$. Wird $a = 1$ gesetzt und der Anfang des Hyperbel-

bogens s, wie oben schon angedeutet ist, im Scheitel A angenommen, woselbst auch $m = a = 1$ wird, so ist $s = \int\limits_1^m \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{m^2 - 1}} dm$. Dieses Integral für den Hyperbelbogen ist mit Hilfe der vorher geometrisch gewonnenen Beziehungen in andere Formen zu bringen. Es war $\mu = \sqrt{m^2 - a^2} = \sqrt{m^2 - 1}$. Mithin ist $m = \sqrt{1 + \mu^2}$, $dm = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} d\mu$ und $s = \int\limits_0^\mu \frac{d\mu}{2\sqrt[4]{1+\mu^2}}$. Andererseits war $\frac{n}{a} = \frac{a}{m}$, und bei $a = 1$ ist $m = \frac{1}{n}$, $dm = -\frac{dn}{n^2}$, $s = \int\limits_1^n \frac{-dn}{2n\sqrt{n}\sqrt{1-n^2}}$. Die Gleichung $v = \sqrt{a^2 - n^2} = \sqrt{1 - n^2}$ liefert $n = \sqrt{1 - v^2}$, $dn = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} dv$, $s = \int\limits_0^v \frac{dv}{2\sqrt[4]{(1-v^2)^5}}$ u. s. w. Der wesentliche Grundzug aller dieser Umformungen ist ein geometrischer. Maclaurin vertauscht nicht eine Veränderliche mit einer anderen Veränderlichen, zwischen welcher und der ersten eine algebraische Gleichung stattfindet, er bringt vielmehr den Zuwachs des Hyperbelbogens in Verhältniss zu dem Zuwachse einer bestimmten Strecke, welche in der Figur hervortritt und in Folge geometrischer Sätze von einer anderen Strecke abhängt. Neben dem Hyperbelbogen ist auch der Ellipsenbogen und der Lemniscatenbogen durch mehrfach umgewandelte Integrale dargestellt und nicht minder der Unterschied zwischen Curvenbögen und der Länge von Berührenden[1]).

Genau den entgegengesetzten Gedanken hat D'Alembert verfolgt. Ihm sind die Umformungen, welchen er bestimmte Integrale unterwirft, durchaus analytische Verfahren. Geometrische Bedeutung als Maass eines Hyperbel- oder Ellipsenbogens hat für ihn nur das einfachste zur Ausführung der Rectification jener Curven hergestellte Integral und allenfalls die analytische Umwandlung anderer Integralformen auf diese, in so weit als dieselbe eine Zurückführung auf die Rectification der Ellipse und Hyperbel genannt wird. D'Alembert's französisch geschriebene Abhandlung *Recherches sur le calcul intégral*[2]) ist von ihm 1746 der Berliner Academie zugeschickt worden. Die Untersuchungen zur Integralrechnung zerfallen in zwei Abtheilungen, deren erste den besonderen Titel Integration rationaler Brüche[3]) führt.

[1]) Maclaurin, *Treatise of fluxions* pag. 652—660. [2]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746. T. II, 182—224. [3]) Ebenda T. II, 182—200.

Sie beginnt[1]) mit dem (S. 565) von uns besprochenen Versuche eines Beweises des algebraischen Fundamentalsatzes von der Zerfällbarkeit jeder ganzen algebraischen Function einer Veränderlichen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades, und daran schliessen sich Bemerkungen über die Integration rationaler Brüche nach ihrer Zerlegung in Partialbrüche mit Nennern ersten oder zweiten Grades. Die zweite Abtheilung[2]), von den Differentialen, welche sich auf die Rectification der Ellipse oder der Hyperbel beziehen, ist es eigentlich, um derenwillen die Abhandlung uns in diesem Kapitel beschäftigt. Nachdem D'Alembert ausdrücklich Maclaurin's Treatise of fluxions als das Werk genannt hat, in welchem zuerst Untersuchungen über auf die Rectification der Ellipse oder der Hyperbel zurückführbare Differentiale vorkommen, giebt er das Differential des Ellipsenbogens als $ds = \frac{\sqrt{a^2 + \frac{p-2a}{2a} x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, wo p den Parameter der Ellipse, d. h. die Doppelordinate im Brennpunkte bedeutet oder $p = \frac{2b^2}{a}$ ist, wenn a die grosse, b die kleine Halbaxe bezeichnet, die Mittelpunktsgleichung der Ellipse also $px^2 + 2ay^2 = a^2p$ oder $y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2)$ geschrieben werden kann. Eine Umwandlung erfolgt mittels $\frac{p}{2a} = q$ und $a^2 + (q-1)x^2 = az$. Dadurch wird $ds = \frac{dz \cdot \sqrt{az}}{2\sqrt{(qa+a)z - z^2 - qa^2}}$. Setzt man $qa + a \left(= \frac{b^2 + a^2}{a}\right) = f$ und $qa^2 (= b^2) = g^2$, so heisst die Gleichung $ds = \frac{dz \sqrt{az}}{2\sqrt{fz - z^2 - g^2}}$, und das Differential rechts vom Gleichheitszeichen beruht auf der Rectification einer Ellipse von den Halbaxen g und r, wo $fr - r^2 = g^2$, beziehungsweise $r = \frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} - g^2}$ ist. Darnach darf, wenn die Ellipse nicht imaginär sein soll[3]), $f^2 < 4g$ nicht stattfinden. Wäre dieses doch der Fall, so sähe man aus $fz - z^2 - g^2 = \frac{f^2}{4} - g^2 - \left(\frac{f}{2} - z\right)^2$, dass der Ausdruck $\sqrt{fz - z^2 - g^2}$ imaginär würde und mit ihm zugleich ds, welches folglich kein reelles Integral besitzen könnte. In einer Hyperbel[4]) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, in deren Gleichung man wieder $p = \frac{2b^2}{a}$ einführt, ist $ds = \frac{dx \sqrt{\frac{p+2a}{2a} x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746. T. II, 182—191. [2]) Ebenda T. II, 200—224. [3]) Ebenda T. II, 201: *l'Ellipse serait imaginaire aussi.* [4]) Ebenda T. II, 202.

Setzt man $\frac{p}{2a} = q$ nebst $(q+1)x^2 - a^2 = az$, so wird $ds = \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{z^2 + (a - qa)z - qa^2}}$. Auch hier bringt die neue Bezeichnung $qa^2 (= b^2) = g^2$ und $a - qa \left(= \frac{a^2 - b^2}{a}\right) = +f$ die neue Form $ds = \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{z^2 - g^2 \pm fz}}$ hervor und zeigt, dass ein solches Differential auf der Rectification einer Hyperbel mit den Halbaxen g und r beruht, wo $r^2 - g^2 = \pm fr$ ist[1]). Die beiden gewonnenen Differentiale des Ellipsen- und Hyperbelbogens bilden die oben erwähnte geometrisch entstandene Grundlage aller weiteren Rechnung. Ist z. B. $\int \frac{\sqrt{z}\,dz}{\sqrt{b^2 \pm fz - z^2}}$ zu ermitteln[2]), so setzt D'Alembert $z = \frac{b^2}{u}$ und erhält $\int \frac{-b^2\,du}{u\sqrt{u}\sqrt{u^2 \pm fu - b^2}} = -\frac{2\sqrt{u^2 \pm fu - b^2}}{\sqrt{u}} + \int \frac{\sqrt{u}\,du}{\sqrt{u^2 - b^2 \pm fu}}$, d. h. die Zurückführung auf den Hyperbelbogen. Als zweites Beispiel ist $\int \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{b^2 \pm fz - z^2}}$ gewählt[3]). Der Ausdruck $b^2 \pm fz - z^2$ ist immer durch Multiplication zweier reellen Factoren $\left(\sqrt{b^2 + \frac{f^2}{4}} \pm \frac{f}{2} + z\right) \cdot \left(\sqrt{b^2 + \frac{f^2}{4}} \mp \frac{f}{2} - z\right)$ entstanden, kann also $= (a - z)(m + z)$ gesetzt werden. Dann aber ist weiter $\int \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{(a-z)(m+z)}} = \int \frac{dz}{m\sqrt{z}} \left(\frac{m+z}{\sqrt{(a-z)(m+z)}} - \frac{z}{\sqrt{(a-z)(m+z)}}\right) = \int \frac{dz\sqrt{m+z}}{m\sqrt{z}\sqrt{a-z}} - \int \frac{dz\sqrt{z}}{m\sqrt{(a-z)(m+z)}}$. Das zweite dieser beiden neuen Integrale ist das im ersten Beispiele auf die Rectification einer Hyperbel zurückgeführte. Im ersten bringt $m + z = u$ die Umformung $\int \frac{du\sqrt{u}}{m\sqrt{(a+2m)u - u^2 - m(a+m)}}$ hervor, welches einem Ellipsenbogen entspricht. Diese beiden Beispiele, setzt D'Alembert hinzu, sind die einzigen, deren Umwandlung Maclaurin gelang. In ihnen ist unter dem Integralzeichen $\sqrt{z}$ bald im Zähler, bald im Nenner und ausserdem im Nenner die Quadratwurzel $\sqrt{b^2 \pm fz - z^2}$. Man sieht sofort, wie reichhaltige Abänderungen möglich sind. Innerhalb des Trinoms $b^2 \pm fz - z^2$ kann den einzelnen Gliedern bald das positive, bald das negative Vorzeichen beigelegt werden; $\sqrt{z}$ kann zu $z^{\frac{p}{2}}$ mit ungradem p, sowie $\sqrt{a + bz + cz^2}$ zu $(a + bz + cz^2)^{\frac{n}{2}}$ mit ungradem n erweitert werden. Alle diese Einzelfälle behandelt D'Alembert, d. h.

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746. T. II, 203. [2]) Ebenda T. II, 203. [3]) Ebenda T. II, 204.

er führt so gestaltete Integrale auf elliptische Integrale zurück. Auch bei ihnen bleibt er nicht stehen. Seine neunte Aufgabe[1]) verlangt die Umformung des Integrals $\int dx\,(ax+b)^p(f+gx+hx^2\pm x^3)^{\pm\frac{n}{2}}$ mit ganzzahlig positivem p und ganzzahlig ungradem n. Seine zwölfte Aufgabe bezieht sich auf $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+ex^3+fx^4}}$.

Der ersten Abhandlung von 1746 liess D'Alembert am 13. April 1747 eine zweite wieder aus zwei Abtheilungen bestehende folgen[3]). Diese beginnt also unter fortgesetzter Zählung der Abschnitte mit der dritten Abtheilung von den Differentialen, welche sich auf die Quadratur von Curven dritten Grades beziehen. Einfache Differentiation führt zu $d\left(\frac{\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}{x^q}\right)=\frac{dx}{2\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$ $\cdot[-2aqx^{-q-1}-2bqx^{-q}-2cqx^{-q+1}-2fqx^{-q+2}+bx^{-q}+2cx^{-q+1}$ $+3fx^{-q+2}]$. Ist nun $q=1$, so erkennt man leicht, dass $\frac{1}{x}\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}=\int\frac{k\,dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}+\int\frac{l\,dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$ $+\int\frac{m\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}+\int\frac{nx\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$. Das erste der vier rechts vom Gleichheitszeichen vorkommenden Integrale ist dadurch in Abhängigkeit von den drei anderen gebracht. Die beiden letzten (das dritte und das vierte Integral) sind in Folge der neunten Aufgabe der zweiten Abtheilung von 1746 auf Rectificationen von Kegelschnitten zurückzuführen. Eine Zurückführung von $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$ auf Kegelschnittbögen fehle, und doch führe auf dieses Integral in letzter Linie[4]) nicht bloss $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$, sondern jedes $\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$ mit ganzzahlig positivem n. In besonderen Fällen, welche mit ziemlichem Aufwande von Rechnung namhaft gemacht werden, erfolgt das Zurückführen von $\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$ auf Kegelschnittbögen, im Allgemeinen aber, gesteht D'Alembert in einer Anmerkung[5]) zu, sei ihm solches nicht gelungen. Alsdann hilft er sich durch die Einsetzung von $x=\frac{1}{u}$, welche $\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2+fx^3}}$ $=\int\frac{\sqrt{u}\cdot du}{\sqrt{k+lu+mu^2+nu^3}}$ hervorbringt. Das neue Integral hängt aber

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1746. T. II, 219. [2]) Ebenda T. II, 222. [3]) Ebenda Année 1748. T. IV, 249--291. [4]) Ebenda T. IV, 250. [5]) Ebenda T. IV, 257, Remarque II.

mit $\int \frac{du \sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}{\sqrt{u}}$ zusammen. Letzteres ist nämlich $= \int \frac{du\,(k + lu + mu^2 + nu^3)}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}} = \int \frac{l\,du \sqrt{u}}{\sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}} + \int \frac{du\,(k + mu^2 + nu^3)}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}$ und das zweite der rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Integrale weiss D'Alembert durch Kegelschnittbögen darzustellen[1], folglich gelangt man von $\int \frac{du \sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}{\sqrt{u}}$ zu $\int \frac{du \cdot \sqrt{u}}{\sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}$ oder umgekehrt, welches von beiden man vorziehen möge. Das Integral $\int \frac{du \sqrt{k + lu + mu^2 + nu^3}}{\sqrt{u}}$ stellt die Quadratur der Curve dritten Grades $t^2 u = k + lu + mu^2 + nu^3$ dar, und somit ist erzielt, was die Ueberschrift der dritten Abtheilung erwarten liess, eine Zurückführung von mit Irrationalitäten behafteten Integralen auf durch Curven dritten Grades begrenzte Flächenräume, insofern Kegelschnittbögen zur Auswerthung nicht ausreichen, während allerdings das Hauptgewicht auf die Ermittelung solcher Beziehungen zwischen den innerhalb der Irrationalgrösse vorkommenden Coefficienten gelegt ist, welche von jenen Quadraturen abzusehen gestatten und ausschliesslich von Kegelschnittbögen Gebrauch machen. D'Alembert hat unter dem 21. Juni 1752 noch eine dritte Abhandlung über Integralrechnung veröffentlicht[2], welche bezüglich der Auswerthung mit Irrationalitäten behafteter Integrale mittels Kegelschnittbögen nur einen Irrthum verbessert, der sich in den vorhergehenden Aufsatz eingeschlichen hatte. Auf die vierte Abtheilung, beziehungsweise die zweite von 1748, kommen wir weiter unten zurück.

Schon im vorigen Abschnitte erwies sich die Nothwendigkeit, das 100. Kapitel für die Differentialgleichungen in Anspruch zu nehmen, d. h. die Mathematiker begnügten sich nicht mehr damit Differentialgleichungen, zu welchen die Behandlung irgend einer Aufgabe geführt hatte, um der betreffenden Aufgabe willen zu integriren, das Integriren der Differentialgleichungen wurde ihnen allmälig an und für sich erforschungswürdig, und die frühere Hauptaufgabe sank zum Range eines Beispiels herab, bei welchem eine Differentialgleichung von einer vorbestimmten Form auftrat. Diese Verschiebung wurde nachgerade zu einer bleibenden, und gleich im I. Bande der Veröffentlichungen der Petersburger Akademie für 1726 finden sich Abhandlungen von Jacob Hermann, Johann Bernoulli, Christian

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748. T. IV, 254—255.
[2]) Ebenda Année 1750. T. VI, 361—378.

Goldbach, Niclaus II Bernoulli in unmittelbarer Folge, welche der Wahrheit unserer Behauptung als Stütze dienen.

Jacob Hermann reichte im Mai 1726 eine Abhandlung *De calculo integrali*[1]) ein. Nicht jedes Differential, sagt er, besitze ein algebraisches Integral, weit häufiger trete ein transcendentes Integral auf, dessen Werth sich nur mittels der Quadratur einer Curve ergebe. Daher sei es die eigentliche Aufgabe der Integralrechnung, Mittel an die Hand zu geben, welche sicher entscheiden lassen, ob eine vorgelegte Differentialgleichung integrirbar sei oder nicht, und wenn integrirbar ob algebraisch oder nur durch eine Quadratur, beziehungsweise welche Curve alsdann die einfachste sei, deren Quadratur zur Integration der Differentialgleichung hinreiche. Hermann schlägt vor, jede Differentialgleichung auf eine canonische Gleichung[2]) zurückzuführen, eine Benennung, welche er Harriot (Bd. II, S. 721) nachgebildet haben dürfte. Ist z. B. $du = R^\lambda dK$, wo R, K, aber auch in anderen Aufgaben etwa erscheinende Ausdrücke S, T u. s. w. Functionen beliebig vieler Veränderlichen darstellen, so möge $u = MR^{\lambda+1}$ das gesuchte Integral sein. Dessen Differentiation führt zu $du = (\lambda + 1)MR^\lambda dR + R^{\lambda+1}dM$ und die Vergleichung mit $du = R^\lambda dK$ zu $dK = (\lambda + 1)MdR + RdM$, welches die canonische Gleichung ist. Ganz entsprechend wird als Integral von $du = R^\lambda S^\mu dK$ die $u = MR^{\lambda+1}S^{\mu+1}$, als Integral von $du = R^\lambda S^\mu T^\nu dK$ die $u = MR^{\lambda+1}S^{\mu+1}T^{\nu+1}$ angenommen, und die entsprechenden canonischen Gleichungen sind $dK = (\lambda + 1)MSdR + (\mu + 1)MRdS + RSdM$ und $dK = (\lambda + 1)MSTdR + (\mu + 1)MRTdS + (\nu + 1)MRSdT + RSTdM$. Alsdann wird folgende allgemeine Vorschrift[3]) gegeben: Man solle in dem Elemente dR irgend ein Glied auslesen, welches bezüglich der Veränderlichen von höherer Dimension als die übrigen Glieder sei, und mit diesem Gliede in alle Glieder des Elementes dK dividiren, bei welchen die Division möglich sei; Vorzeichen und Zahlencoefficienten der Quotientenglieder solle man durch unbestimmte Coefficienten A, B, C, $D \cdots$ ersetzen und für die Summe der so veränderten Quotientenglieder Z, ferner $M = Z + N$ schreiben; die Substitution dieses Werthes von M in die canonische Gleichung und die Vergleichung der so entstehenden Glieder mit den homologen Bestandtheilen des Elementes dK gestatte die Bestimmung von A, B, C, $D \cdots$; was aber von dR gesagt sei, gelte ähnlich für SdR, für $STdR$ u. s. w. Nach mehreren Beispielen, in welchen nur eine Veränderliche vorkommt, so dass die Frage ausschliesslich auf die

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1726. T. I, 149—167.
[2]) Ebenda I, 151. [3]) Ebenda I, 152.

Auswerthung eines Integrals gerichtet ist, legt sich Hermann die Differentialgleichung vor[1]: $du = 3a^3y^2dy - 6a^2x^2ydy + 3ax^4dy - 6a^2xy^2dx + 12ax^3ydx - 6x^5dx = (3a^3x^{-5}y^2dy - 6a^2x^{-3}ydy + 3ax^{-1}dy - 6a^2x^{-4}y^2dx + 12ax^{-2}ydx - 6dx)x^5 = dK \cdot R^\lambda$. Er nimmt folglich $R = x$, $\lambda = 5$ und $dK = 3a^3x^{-5}y^2dy - 6a^2x^{-3}ydy + 3ax^{-1}dy - 6a^2x^{-4}y^2dx + 12ax^{-2}ydx - 6dx$. Die canonische Gleichung ist: $dK = 6Mdx + xdM$. Die in dem für dK angenommenen Ausdrucke mit dx behafteten Glieder heissen $(-6a^2x^{-4}y^2 + 12ax^{-2}y - 6)dx$. Ersetzung der Vorzeichen und Zahlencoefficienten durch A, B, C bringt $Ax^{-4}y^2 + Bx^{-2}y + C$ hervor und $M = Ax^{-4}y^2 + Bx^{-2}y + C + N$ nebst $dM = -4Ax^{-5}y^2dx - 2Bx^{-3}ydx + 2Ax^{-4}ydy + Bx^{-2}dy + dN$, und die canonische Gleichung wird: $3a^3x^{-5}y^2dy - 6a^2x^{-3}ydy + 3ax^{-1}dy - 6a^2x^{-4}y^2dx + 12ax^{-2}ydx - 6dx = 2Ax^{-3}ydy + Bx^{-1}dy + 2Ax^{-4}y^2dx + 4Bx^{-2}ydx + 6Cdx + 6Ndx + xdN$. Homologe und folglich einander gleich zu setzende Glieder sind $-6a^2x^{-4}y^2dx = 2Ax^{-4}y^2dx$, $12ax^{-2}ydx = 4Bx^{-2}ydx$, $-6dx = 6Cdx$, woraus $A = -3a^2$, $B = 3a$, $C = -1$ folgt. Setzt man diese Werthe von A, B, C in die umgewandelte canonische Gleichung ein und streicht Identisches auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens weg, so bleibt $3a^3x^{-5}y^2dy = 6Ndx + xdN$. Multiplication mit x^5 führt zu $3a^3y^2dy = 6Nx^5dx + x^6dN$, und das Integral dieser letzten Gleichung ist $a^3y^3 = Nx^6$, beziehungsweise $N = a^3x^{-6}y^3$. Nun folgt weiter $M = Ax^{-4}y^2 + Bx^{-2}y + C + N = -3a^2x^{-4}y^2 + 3ax^{-2}y - 1 + a^3x^{-6}y^3$ und $u = M \cdot R^{\lambda+1} = Mx^6 = -3a^2x^2y^2 + 3ax^4y - x^6 + a^3y^3 = (ay - x^2)^3$. In weiteren Beispielen treten bald drei Veränderliche x, y, z neben u auf, bald zweite Differentiale.

Johann Bernoulli brachte im Juni 1726 seine Abhandlung: *De integrationibus aequationum differentialium, ubi traditur methodi alicuius specimen integrandi sine praevia separatione indeterminatarum*[2]), von der Integration der Differentialgleichungen, wo ein Muster einer Integrationsmethode ohne vorherige Trennung der Veränderlichen mitgetheilt wird. Es ist die Abhandlung, von welcher (S. 460) vorankündigend die Rede war, in welcher der Kunstausdruck der homogenen Differentialgleichung eingeführt[3]) und deren Integration durch die Annahme $y = xz$, $dy = xdz + zdx$ gelehrt wurde, indem letztere Annahme die Trennung der Veränderlichen in der umgewandelten Differentialgleichung leicht gestatte. Auch Johann Bernoulli spricht dabei von canonischen Gleichungen[4]), versteht aber

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1726. T. I, 163—164. [2] Ebenda I, 167—184. (Vergl. Joh. Bernoulli *Opera* III, 108—124.) [3]) Ebenda I, 175. [4]) Ebenda I, 175—176.

darunter ganz Anderes als Hermann, nämlich diejenigen homogenen Gleichungen von aufeinanderfolgenden Dimensionen, welche alle überhaupt mögliche ganze Glieder enthalten, also $(ax + by)dx + (cx + ey)dy = 0$, $(ax^2 + bxy + cy^2)dx + (ex^2 + fxy + gy^2)dy = 0$, $(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ey^3)dx + (fx^3 + gx^2y + hxy^2 + iy^3)dy = 0$ u. s. w. Die canonische Form der homogenen Differentialgleichung gestattet aber die Integration ohne vorhergegangene Trennung der Veränderlichen[1]). Ist sowohl dx als dy mit einer homogenen ganzen Function n^{ten} Grades, die aus $n + 1$ Gliedern besteht, vervielfacht, so kommen in der homogenen Differentialgleichung $2n + 2$ Constante vor. Ebensoviele enthält das Product von $n + 1$ Factoren von der Gestalt $(x + \alpha y)^\pi$, und setzt man dieses $n + 1$-factorige Product $= C$ und differentiirt nach vorhergehender Logarithmirung, so erscheint eine homogene Differentialgleichung von Art der vorgelegten. Man erhält so nothwendigerweise die genügende Anzahl der Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Constanten α, π u. s. w. Sei z. B. $n = 1$, also $(x + \alpha y)^\pi \cdot (x + \beta y)^\tau = C$ das vorausgesetzte Integral von $(ax + by)dx + (cx + ey)dy = 0$. Logarithmirung liefert $\pi \log(x + \alpha y) + \tau \log(x + \beta y) = 0$. Differentiirung bringt dann $\frac{\pi\,dx + \alpha\pi\,dy}{x + \alpha y} + \frac{\tau\,dx + \beta\tau\,dy}{x + \beta y} = 0$ hervor oder $((\pi + \tau)x + (\beta\pi + \alpha\tau)y)dx + ((\alpha\pi + \beta\tau)x + (\alpha\beta\pi + \alpha\beta\tau)y)dy = 0$. Die Vergleichung mit der canonischen Form erfolgt mittels $\pi + \tau = a$, $\beta\pi + \alpha\tau = b$, $\alpha\pi + \beta\tau = c$, $\alpha\beta\pi + \alpha\beta\tau = e$, d. h. man erhält

$$\alpha = \frac{b + c - \sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}{2a}, \quad \beta = \frac{b + c + \sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}{2a},$$

$$\pi = \frac{ab - ac + a\sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}{2\sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}, \quad \tau = \frac{-ab + ac + a\sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}{2\sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae}}.$$

Ist, setzt Johann Bernoulli hinzu, $(x + \alpha y)^\pi \cdot (x + \beta y)^\tau$ mit constantem Werthe versehen, so muss das Gleiche auch für $(2ax + 2a\alpha y)^{\frac{\pi}{n}} \cdot (2ax + 2a\beta y)^{\frac{\tau}{n}}$ gelten, und das gesuchte Integral lässt sich unter Anwendung der Abkürzung $\sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 4ae} = m$ auch schreiben $(2ax + (b + c - m)y)^{b-c+m} \cdot (2ax + (b + c + m)y)^{c-b+m} = C$. Bernoulli geht auf beachtenswerthe Einzelfälle ein und schliesst mit der Bemerkung, bei höherer Dimension der mit dx und mit dy vervielfachten ganzen homogenen Function sei die Arbeit mühseliger, aber nicht schwieriger.

Christian Goldbach schrieb[2]) über die der Riccati'schen Differentialgleichung (S. 456—461) unter Einfügung eines weiteren

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1726. T. I, 178—180.
[2]) Ebenda I, 185—197.

Gliedes ähnlich gestaltete Gleichungsform $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$ und deren Integrirbarkeit, sowie einen zweiten kleinen Aufsatz[1] über einige besondere Differentialgleichungen. Er zeigte in diesem letzteren die Ueberführung von $(ax^\pi + bz^\tau x^{\pi-1} + cz^{2\tau} x^{\pi-2} + \cdots) dx + (mx^\pi z^{\tau-1} + nx^{\pi-1} z^{2\tau-1} + ox^{\pi-2} z^{3\tau-1} + \cdots) dz = 0$ durch $z^\tau = y$ in eine homogene Differentialgleichung, zeigte auch wie ebendasselbe für die Gleichung $(a + cx + fy) dx + (b + ex + gy) dy = 0$ durch $x = z + \frac{bf - ag}{cg - ef}$, $y = u + \frac{ae - bc}{cg - ef}$ erzielt werde. Er gab ohne weitere Herleitung das Integral der Gleichung $dy = dx(ay + bx^n + cx^{n-1} + ex^{n-2} + \cdots)$ in der Gestalt $y = -\frac{b}{a} x^n + \frac{nA - c}{a} x^{n-1} + \frac{(n-1)B - e}{a} x^{n-2} + \frac{(n-2)C - f}{a} x^{n-3} + \cdots$, wo $A, B, C \cdots$ die Coefficienten der jeweils unmittelbar vorhergehenden Glieder bedeuten.

Zwischen Goldbach's beiden Aufsätzen steht ein solcher von Niclaus II Bernoulli[2], die letzte Arbeit des im Juli 1726 verstorbenen geistvollen jungen Gelehrten. Ihren Hauptinhalt bildet die Riccati'sche Gleichung und deren Integrabilitätsbedingungen, in der Einleitung aber stehen einige andere Bemerkungen, welche der Vergessenheit entrissen zu werden verdienen. Wir haben (S. 223—224) von einem Aufsatze von Johann Bernoulli von 1697 gesprochen, in welchem $ady = ypdx + by^n qdx$, wo p und q irgend welche Functionen von x bedeuten, durch die Substitution $y = mz$, d. h. y gleich einem Producte zweier Functionen von x, integrirt wird. Wir haben gesagt, dass diese Methode sich bei der Integration der linearen Differentialgleichung erster Ordnung erhalten habe. Wir hätten dort auch hervorheben können, dass Johann Bernoulli den Uebergang jener sogenannten Bernoulli'schen Differentialgleichung in die lineare Differentialgleichung $\frac{a}{1-n} dv = vpdx + bqdx$ mittels der Substitution $y^{1-n} = v$ bemerkt hat[3]. Auf diese Dinge bezieht sich die Einleitung des Aufsatzes von Niclaus II Bernoulli von 1726. Ist eine Gleichung $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$ gegeben, und setzt man $x^{p+1} = u$, so geht sie in $\frac{a}{p+1} u^{\frac{m-p}{p+1}} y^n du + \frac{b}{p+1} y^q du = dy$ und nach Division durch y^n in $\frac{a}{p+1} u^{\frac{m-p}{p+1}} + \frac{b}{p+1} y^{q-n} du = y^{-n} dy$ über. Nun sei $y^{1-n} = v$, also $y^{-n} dy = \frac{dv}{1-n}$, so entsteht $dv = \frac{a(1-n)}{p+1} u^{\frac{m-p}{p+1}} du + \frac{b(1-n)}{p+1} v^{\frac{q-n}{1-n}} du$

[1] *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1726. T. I, 207—209. [2] Ebenda I, 198—207. [3] Joh. Bernoulli *Opera* I, 175.

oder, wenn u und v wieder durch x und y, ferner $\frac{a(1-n)}{p+1}$, $\frac{b(1-n)}{p+1}$, $\frac{m-p}{p+1}$, $\frac{1-n}{q-n}$ durch a, b, m, q ersetzt werden, die einfachere Gleichungsgestalt $ax^m dx + by^q dx = dy$. Diese sei aber unter der Voraussetzung $q = 1$ auch dann noch integrirbar, wenn an Stelle von ax^m irgend eine Function X von x trete, das habe Johannes Bernoulli gezeigt. Man sieht also, dass Niclaus II Bernoulli hier gleichfalls die Integrirbarkeit der linearen Differentialgleichung $Xdx + bydx = dy$ betont, einen Namen hat er ihr noch nicht beigelegt. Die von ihm vorgeschlagene Integrationsmethode weicht von der seines Vaters ab. Sein Verfahren ist folgendes, wobei wir uns die einzige Aenderung gestatten, die Basis des natürlichen Logarithmensystemes durch den erst 1737 dafür eingeführten (S. 645) Buchstaben e zu bezeichnen, während Niclaus II Bernoulli 1726 dafür c schrieb. Man setze y allerdings als ein Product, aber nicht als ein solches zunächst ganz unbestimmter Factoren m und z, sondern $y = e^{bx} \cdot z$. Alsdann ist $dy = be^{bx}zdx + e^{bx}dz$, und die Gleichung $Xdx + bydx = dy$ geht über in $Xdx + be^{bx}zdx = be^{bx}zdx + e^{bx}dz$, beziehungsweise in $dz = e^{-bx}Xdx$ mit getrennten Veränderlichen.

Bahnbrechend nach den verschiedensten Richtungen waren zwei zusammenhängende Abhandlungen Euler's: *De infinitis curvis ejusdem generis*[1]) und *Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis*[2]). Da finden wir zum ersten Male den Satz, der in moderner Bezeichnung $\frac{\partial^2 A}{\partial t \cdot \partial u} = \frac{\partial^2 A}{\partial u \cdot \partial t}$ lautet[3]), und der in dem 7. Kapitel der Euler'schen Differentialrechnung von 1755 auch auf höhere Differentialquotienten ausgedehnt erscheint (S. 734). Der partielle Differentialquotient wird schon im Aufsatze von 1734 als ein solcher definirt, der beispielsweise sich bilde, indem t als veränderlich, u dagegen als constant betrachtet, beziehungsweise behandelt werde. Euler's damaliger Beweis für den Satz von der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationsfolge ist in moderner Bezeichnung folgender. Sei $F(t, u)$ eine Function von t und u. Ihr Differential nach t ist $F(t + dt, u) - F(t, u)$. Das nach u genommene Differential dieses Ausdrucks ist $(F(t + dt, u + du) - F(t, u + du)) - (F(t + dt, u) - F(t, u)) = F(t + dt, u + du) - F(t, u + du) - F(t + dt, u) + F(t, u) = F(t + dt, u + du) - F(t + dt, u) - F(t, u + du) + F(t, u) =$

---

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1734 *et* 1735. T. VII, 174—183. Diese Abhandlung füllt nicht 9, sondern 19 Seiten, da die Pagination hinter 189 nochmals mit 180 beginnt. [2]) Ebenda VII, 184—200. [3]) Ebenda VII, 177.

$(F(t+dt, u+du) - F(t+dt, u)) - (F(t, u+du) - F(t, u))$ und die zuletzt geschriebene Form ist das zweite zuerst nach u und dann nach t genommene Differential. Da finden wir gleichfalls zum ersten Male ausgeführt, wovon wir eine Andeutung in einem Aufsatze des vorhergehenden VI. Bandes der Petersburger Veröffentlichungen erkannt haben (S. 822), nämlich die Benutzung eines integrirenden Factors. Euler sagt[1]) $dx - \frac{x\,da}{a}$ werde durch Vervielfachung mit $\frac{1}{a}$ integrirbar, und das Integral sei $\frac{x}{a} + c$, wo c eine constante von a unabhängige Grösse bedeute. Er sagt ferner[2]) $dx - \frac{n x\,da}{a}$ werde durch Vervielfachung mit $\frac{1}{a^n}$ integrirbar, und das Integral sei $\frac{x}{a^n}$ u. s. w. Da finden wir zum ersten Male die Bezeichnung einer Function durch den Buchstaben f, hinter welchem in Klammern die Grösse angegeben ist, welche der Function zu Grunde liegt[3]), die eine der (S. 712) angekündigten Stellen.

Man darf nie ausser Augen lassen, dass der Druck der akademischen Veröffentlichungen im 18. Jahrhunderte längere Zeit in Anspruch nahm, und dass die Zeit der Einreichung einer Abhandlung zwar das Erfinderrecht ihres Verfassers ausser Zweifel, die Unabhängigkeit eines Nacherfinders jedoch durch ihr Datum allein keineswegs in Frage stellt. So ist der VII. Band der Petersburger Veröffentlichungen für die Jahre 1734 und 1735 erst 1740 erschienen und zuverlässig ohne Einfluss auf Abhandlungen gewesen, welche Fontaine, welche Clairaut am 4. März 1739 der Pariser Akademie vorlegten.

Fontaine's Abhandlung war die frühere. Sie kam vermuthlich durch Schuld des Verfassers, der sie nicht rechtzeitig zum Drucke fertig gestaltete, in den Veröffentlichungen der Pariser Akademie überhaupt nie zum Abdrucke, sondern bildet einen Bestandtheil der 1764 besonders herausgegebenen *Mémoires de mathématiques recueillis et publiés avec quelques pièces inédites* von Fontaine (S. 567), so dass wir berechtigt sind, die Abhandlung dem Verfasser eines etwaigen IV. Bandes dieser Vorlesungen über Geschichte der Mathematik zum

[1]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annos* 1734 *et* 1735. T. VII, 186 (zweiter Zählung). [2]) Ebenda VII, 187 (zweiter Zählung). [3]) Ebenda VII, 187 (zweiter Zählung): *Si* $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ *denotet functionem quamcunque ipsius* $\frac{x}{a} + c$.

Berichte zu überlassen, eine Berechtigung, von welcher wir insbesondere mit Rücksicht auf den Umstand Gebrauch machen, dass Fontaine's sehr seltener Band von 1764 uns nicht zugänglich war.

Clairaut's Abhandlung *Recherches générales sur le calcul intégral*[1]) zeigt, dass der Satz von der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationsfolge bei Functionen von zwei unabhängigen Veränderlichen Clairaut ebensowenig als Euler entgangen war. Clairaut beweist ihn dadurch, dass er sagt, jede solche Function müsse, wenn sie in eine Reihe entwickelt werde, aus Gliedern $rx^m y^n p^q$ bestehen, wo p einen Parameter der Function bedeute. Für jedes einzelne dieser Glieder finde augenscheinlich der betreffende Satz statt, also auch für deren Gesammtheit. Aber auch der Gedanke des integrirenden Factors war in Clairaut's Geiste aufgetaucht. Die Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ ist, sagt er, integrirbar und liefert, so oft der partielle Differentialquotient von M nach y dem von N nach x gleich ist (was Clairaut in das Symbol $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ kleidet), als Integral eine einer Constanten gleich zu setzende Function von x und y, welche er φ nennt. Finde aber die Bedingungsgleichung nicht statt, so könne man sie durch Vervielfachung der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ mit einem Factor μ herbeiführen, welcher $\frac{d(\mu M)}{dy} = \frac{d(\mu N)}{dx}$ hervorbringen müsse, oder, was auf das Gleiche herauskomme, welcher die Gleichung $\mu\frac{dM}{dy} + M\frac{d\mu}{dy} - \mu\frac{dN}{dx} - N\frac{d\mu}{dx} = 0$ befriedige. Ist $\mu Mdx + \mu Ndy = d\varphi$ und dividirt man durch das Integral φ, so entsteht $\frac{Mdx + Ndy}{R} = \frac{d\varphi}{\varphi} = d\log\varphi$, wobei $R = \frac{\varphi}{\mu}$. Nun sei, setzt Clairaut hinzu, $d\log\varphi$ als Differential eines Logarithmen von der Dimension -1. Gleicher Dimension müsse $\frac{M}{R}$ sein, d. h. R sei von einer um eine Einheit höheren Dimension als M. Weiter aber sei $\log\varphi$ selbst eine Function oder mit Rücksicht darauf $\frac{Mdx + Ndy}{R}$ das vollständige Integral einer Function, mithin $\frac{1}{R}$ ein integrirender Factor, der gefunden werde, indem man für R die allgemeine ganze Function von x und y setze, deren Dimension die von M um eine Einheit übertreffe. Als Beispiel wird die Integration von $(ix + ky)dx + (lx + my + np)dy = 0$ versucht, in welcher Differentialgleichung das Fehlen eines constanten Bestandtheiles hp in dem Factor von dx die Allgemeinheit nicht be-

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1739. pag. 425—436.

einträchtige, da es keiner Schwierigkeit unterworfen sei, einen solchen, wenn er vorkomme, durch eine einfache Umformung zu beseitigen. Hierauf wird, da M vom ersten Grade ist, R vom zweiten Grade gewählt, d. h. $R = x^2 + bxy + cpx + ey^2 + fpy + gp^2$ gesetzt. Ist $\frac{M}{R}$ (beziehungsweise $\frac{N}{R}$) der partielle Differentialquotient der Integralfunction nach x (nach y), so muss, indem wir von hier an Clairaut's Schreibweise durch die heutige ersetzen, $\frac{\partial\left(\frac{M}{R}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{N}{R}\right)}{\partial x}$ sein, oder $R\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial R}{\partial y} - R\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial R}{\partial x} = 0$, d. h. unter Einsetzung von $\frac{\partial M}{\partial y} = k$, $\frac{\partial N}{\partial x} = l$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 2x + by + cp$, $\frac{\partial R}{\partial y} = bx + 2ey + fp$, es muss sein: $(k + l - bi)x^2 + 2(m - ei)xy + (kc - fi + 2n)px + (bm - ek - el)y^2 + (bn + cm - fl)py + (gk - gl + nc)p^2 = 0$. Aus den sechs Gleichungen, welche man erhält, wenn jeder Coefficient für sich $= 0$ gesetzt wird, findet Clairaut die mit einigen Rechen- oder Druckfehlern behafteten Werthe von b, c, e, f, g, mithin R, und dann ergiebt sich ihm die vollständige Differentialgleichung und deren Integral. Will man Clairaut's Gedanken verstehen, so muss man offenbar davon ausgehen, dass er — wenn er es auch nicht ausdrücklich ausspricht — M und N als ganze Functionen von x und y betrachtet, die überdies unter Zuziehung des constanten Parameters p beide homogen von der gleichen Dimension sind.

Im darauf folgenden Jahrgange hat Clairaut abermals eine Abhandlung: *Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre*[1]) der Oeffentlichkeit übergeben. Ihr erster Abschnitt stimmt in der Hauptsache mit der Arbeit von 1739 überein, deren Form nur noch klarer und durchsichtiger geworden ist. So ist z. B. der Satz von der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationsfolge in ein viel helleres Licht gesetzt. Clairaut erörtert die Sache jetzt folgendermassen, wobei wir uns wieder als einzige Aenderung den Gebrauch der geschwungenen ∂ zum Zeichen partieller Differentiation gestatten. Sei $Adx + Bdy$ das vollständige Differential einer Function, so muss diese gefunden werden, indem man Adx ausschliesslich nach x, oder Bdy ausschliesslich nach y integrirt, das erste Mal aber die Integrationsconstante durch Y bezeichnet, weil sie, nur nach x constant, y enthalten wird, und das andere Mal aus ähnlichem Grunde die Integrationsconstante durch X bezeichnet. Man hat also $\int Adx + Y = \int Bdy + X$. Diese Gleichung partiell nach y differen-

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1740, pag. 293—323.

tiirt giebt $\int \frac{\partial A}{\partial y} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} = B$ und differentiirt man neuerdings partiell nach x, so entsteht $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$, was bewiesen werden sollte. Clairaut erklärt in einer Fussnote, auch Fontaine sei, wie er sich aus einem Manuscripte habe überzeugen können, im Besitz des Satzes $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ gewesen, und das Gleiche gelte für Euler, dessen hierher gehörige Abhandlung in den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie sich zur Zeit unter der Presse befinde. Er selbst habe 1739 noch in keiner Verbindung mit Euler gestanden und erst ziemlich viel später von seinem geistigen Zusammentreffen mit jenem hervorragenden Mathematiker Kenntniss erhalten. In Clairaut's Beweise hatte sich als Zwischenergebniss $\int \frac{\partial A}{\partial y} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} = B$ oder $\frac{\partial Y}{\partial y} = B - \int \frac{\partial A}{\partial y} dx$ herausgestellt, und diese Gleichung wird dann zur Auffindung von Y benutzt, so dass damit die Integration der vollständigen Differentialgleichung erledigt ist. Clairaut geht hierauf zur Aufsuchung des integrirenden Factors μ für den Fall, dass die gegebene Differentialgleichung keine vollständige ist, über und benutzt das gleiche Beispiel wie 1739 mit der kleinen Veränderung, dass $p = 1$ gewählt ist, dass also $(ix + ky)dx + (lx + my + n)dy = 0$ integrirt werden soll. Die Rechnung ist diesmal richtig geführt oder gedruckt.

Ein zweiter selbst in drei Kapitel zerfallender Abschnitt ist den Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen gewidmet. Das 1. Kapitel nimmt drei Veränderliche x, y, z an oder eine Differentialgleichung $Mdx + Ndy + Pdz = 0$. Damit diese vollständig sei, müssen die Bedingungen $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$ erfüllt werden. Die Integration verlangt alsdann $\int Mdx$ unter ausschliesslicher Betrachtung von x als veränderlich zu berechnen, die hinzutretende Integrationsconstante K wird y und z enthalten. Nun ist rückwärts die Gleichung $\int Mdx + K = \text{const.}$ nach y und nach z zu differentiiren, und so gewinnt man Mittel, die Grösse K nach den im ersten Abschnitte gelehrten Regeln aufzufinden. Auch hier kann ein integrirender Factor μ die unvollständige Differentialgleichung $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ in eine vollständige verwandeln, und dieses μ wird alsdann drei partielle Differentialgleichungen erfüllen müssen, aber es giebt auch Differentialgleichungen mit drei Veränderlichen, welche der Integration überhaupt widerstreben, und bei welchen also der Versuch μ aufzufinden ein vergeblicher sein muss. Eliminirt man, sagt Clairaut, zwischen den drei partiellen Differentialgleichungen

die Grössen $\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}, \frac{\partial \mu}{\partial z}$, so fällt μ von selbst mit heraus, und es bleibt nur $N\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial N}{\partial x} + M\frac{\partial N}{\partial z} - N\frac{\partial M}{\partial z} + P\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, welche Gleichung mithin für sich erfüllt sein muss, wenn die Integration von $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ möglich sein soll. Die Meinung ist die, dass die mehrerwähnten drei partiellen Differential gleichungen

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial \mu}{\partial z} + \mu\frac{\partial M}{\partial z} = P\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$N\frac{\partial \mu}{\partial z} + \mu\frac{\partial N}{\partial z} = P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y},$$

wenn man die erste mit P, die zweite mit N, die dritte mit M vervielfacht und dann addirt, als Summe

$$\mu\left[N\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial N}{\partial x} + M\frac{\partial N}{\partial z} - N\frac{\partial M}{\partial z} + P\frac{\partial M}{\partial y} \quad M\frac{\partial P}{\partial y}\right] = 0$$

liefern, womit wir aber keineswegs behauptet haben wollen, Clairaut habe sich gerade dieses Eliminationsverfahrens bedient. Was er analytisch gezeigt oder doch behauptet hatte, bestätigt er alsdann geometrisch. Sei (Fig. 145) versucht, die Oberfläche herzustellen, welche der Differentialgleichung $dz = \omega dx + \vartheta dy$ genügt, und dabei zu ermitteln, ob es immer eine solche geben könne. Man legt durch die Oberfläche zwei benachbarte Schnitte $PN\nu$ und pnl senkrecht zur x-Axe und zwei andere gleichfalls benachbarte Schnitte QNn, $q\nu l$ senkrecht zur y-Axe. Ausgehend von der Oberflächengleichung erkennt man, dass QN die Gleichung $dz = \omega dx$ und PN die Gleichung $dz = \vartheta dy$ besitzen muss. Nun sei $NM = z$ eine Ordinate der Curve $PN\nu$. Die Nachbarordinate $\nu\mu$ ist $z + dz = z + \vartheta dy$. Geht man von n auf der Curve pnl nach l, so findet sich lk, indem vorher NM durch $nm = z + \omega dx$ ersetzt wird und dann ϑ durch das, was es wird, wenn x in $x + dx$ und z in $z + \omega dx$ übergeht, d. h. durch $\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}dx + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\omega dx$.

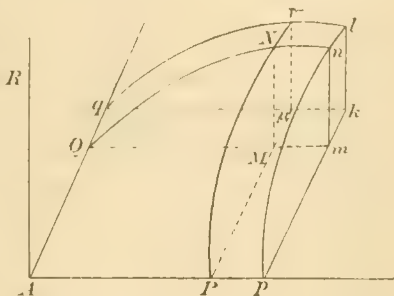


Fig. 145.

Man hat also $lk = z + \omega dx + \vartheta dy + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}dxdy + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\omega dxdy$.

Andererseits kann man auch auf qvl nach l gelangen. Das geschieht, indem man erst NM durch $\nu\mu = z + \vartheta dy$ ersetzt und dann mit ω die Veränderung vornimmt, welche auf dem Uebergange von y in $y + dy$, von z in $z + \vartheta dy$ beruht. Man erhält $lk = z + \vartheta dy + \omega dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy dx + \frac{\partial \omega}{\partial z} \vartheta dy dx$. Damit beide Werthe von lk übereinstimmen, was nothwendig der Fall sein muss, wenn eine Oberfläche überhaupt vorhanden sein soll, ist erforderlich, dass $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot \omega = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \cdot \vartheta$ sei, eine Bedingung, von welcher nach einer Fussnote Clairaut's auch Fontaine Kenntniss gehabt haben muss. Früher war $Mdx + Ndy + Pdz$ die Form der gegebenen Differentialgleichung, welche auch $dz = -\frac{M}{P} dx - \frac{N}{P} dy$ geschrieben werden kann, d. h. die Beziehungen $\omega = -\frac{M}{P}$, $\vartheta = -\frac{N}{P}$ finden statt, nebst $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{M}{P^2} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{P} \frac{\partial M}{\partial y}$ u. s. w. Durch Einsetzung dieser Werthe nimmt aber die Bedingungsgleichung die frühere Form $M \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial N}{\partial x} + M \frac{\partial N}{\partial z} - N \frac{\partial M}{\partial z} + P \frac{\partial M}{\partial y} - M \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ an. Das 2. Kapitel behandelt die Gleichung mit noch mehr Veränderlichen $0 = Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + Rds + \cdots$. Clairaut zeigt, dass hier, wenn die Integration möglich sein soll, je drei Veränderliche das Dasein einer Bedingungsgleichung nöthig machen, n Veränderliche also zunächst so viele, als Dreiergruppen aus ihnen gebildet werden können, d. h. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Aber diese Bedingungsgleichungen sind nicht alle von einander unabhängig, die Nothwendigkeit einiger derselben fällt somit weg, und schliesslich müssen bei n Veränderlichen noch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Bedingungsgleichungen nach dem Wegfall von deren $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ übrig bleiben. Das 3. Kapitel behandelt die Differentialgleichungen von der Gestalt $\omega = Mdx + Ndy + Pdz + \cdots$ für den Fall, dass M, N, $P \cdots$ keine Constanten in sich schliessen. Hier sind Clairaut's Worte in gleicher Weise zu deuten, wie eine Aeusserung in seinem Aufsatze von 1739 (S. 857). Er meint M, N, $P \cdots$, welche von vornherein als homogen gelten, so dass ihre Dimensionen theils durch Veränderliche x, y, $z \cdots$, theils durch einen constanten Parameter p hergestellt werden, enthalten diesen Parameter überhaupt nicht, sind also homogene Functionen von x, y, $z \cdots$. Beschränken sich die Veränderlichen auf x, y, z und setzt man $y = xu$, $z = xt$, ist ferner m der Grad der Homogenität, sodass $M = x^m F$, $N = x^m G$, $P = x^m H$ wird, wo F, G, H nur t und u enthalten, erwägt man

endlich $dy = xdu + udx$, $dz = xdt + tdx$, so geht $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ über in $x^m dx(F + Gu + Ht) + x^{m+1}Gdu + x^{m+1}Hdt = 0$ beziehungsweise in $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = 0$ mit soweit getrennten Veränderlichen, dass die Integration bezüglich x sofort vollzogen werden kann, ohne dass es eines weiteren integrirenden Factors bedürfte. Dabei bleibt aber Clairaut nicht stehen. Er frägt, welcher integrirende Factor μ es war, der die Umwandlung von $Mdx + Ndy + Pdz = 0$ in $\frac{dx}{x} + \frac{Gdu + Hdt}{F + Gu + Ht} = 0$ bewirkt habe? Unmittelbar zeigt sich $\mu = \frac{1}{x^{m+1}(F + Gu + Ht)}$. Aber dafür lässt sich auch schreiben $\mu = \frac{1}{x \cdot x^m F + xu \cdot x^m G + xt \cdot x^m H} = \frac{1}{xM + yN + zP}$ oder die neue keines integrierenden Factors mehr bedürftige Differentialgleichung ist $\frac{Mdx + Ndy + Pdz}{Mx + Ny + Pz} = 0$. Clairaut ist damit der Erfinder der in spätere Lehrbücher übergegangenen Methode, die Integration der homogenen Differentialgleichungen als ein Beispiel für die Benutzung eines integrirenden Factors zu behandeln. Clairaut zieht noch eine letzte Folgerung. Wenn $x^m dx(F + Gu + Ht) + x^{m+1}Gdu + x^{m+1}Hdt = 0$ integrirbar sein soll, so muss $\frac{x^{m+1}}{m+1}(F + Gu + Ht) = \text{const.}$ das Integral sein, ohne dass weitere Functionen von t und u hinzuträten, weil sonst bei rückwärts vollzogener Differentiation in der Differentialgleichung Glieder vorkommen müssten, welche keinerlei Factor x enthielten. Wird sowohl in der Differentialgleichung als in ihrem Integrale $u = \frac{y}{x}$, $t = \frac{z}{x}$ u. s. w. gesetzt, so zeigt sich $\frac{Mx + Ny + Pz}{m+1} = \varphi$ als Integral von $Mdx + Ndy + Pdz = 0$, insofern M, N, P homogene Functionen m^{ten} Grades von x, y, z sind, φ also ebenfalls homogene Function vom Grade $m + 1$ ist. Ist aber $Mdx + Ndy + Pdz = d\varphi$, so bedeutet dieses, es sei $M = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $N = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $P = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $\frac{Mx + Ny + Pz}{m+1} = \frac{x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{m+1} = \varphi$ und mithin $(m+1)\varphi = x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Das ist aber Euler's Satz von den homogenen Functionen. Clairaut erkennt, wie wir (S. 734) gesagt haben, in einer Fussnote Euler's Erfinderrechte offen an, betont aber zugleich, auch Fontaine habe unabhängig von Euler, dessen Arbeiten über diesen Gegenstand er nicht kennen konnte, den Satz entdeckt.

Wir müssen, nachdem wir der Entwicklung der Lehre von den Differentialgleichungen erster Ordnung so weit nachgegangen sind, auf einen mehrere Jahre älteren Aufsatz Clairaut's von 1734 zurückgreifen, auf die *Solution de plusieurs problèmes, où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée*[1]). In ihm ist nämlich ganz gelegentlich gezeigt, wie man die singuläre Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung mittels wiederholter Differentiation erhalte[2]), und wie die so erzielte Lösung in der That durch keinen der willkürlichen Constanten beigelegten besonderen Werth aus dem allgemeinen Integrale hervorgehe. Eines der von Clairaut gewählten Beispiele ist $dy^2 - (x+1)\,dy\,dx + y\,dx^2 = 0$, dessen allgemeines Integral eine gerade Linie bedeutet, während die singuläre Lösung die Gleichung einer Parabel liefert, wie man leicht erkennt, wenn man das Ergebniss wiederholter Differentiation in der Form $\left(2\frac{dy}{dx} - x - 1\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ schreibt und entweder aus $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ durch Integration die Folgerung $\frac{dy}{dx} = a$, oder aus $2\frac{dy}{dx} - x - 1 = 0$ ohne Integration die Folgerung $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2}$ zieht. In diesem Aufsatze Clairaut's von 1734 befindet sich die zweite (S. 712) angekündigte Stelle: eine Function der Veränderlichen u ist durch Πu bebezeichnet, jedenfalls in gegenseitiger Unabhängigkeit von Euler's $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ (S. 855), da beide Abhandlungen gleichzeitig geschrieben, beide auch nicht sofort gedruckt wurden.

Wir wenden uns zu den Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Man war wiederholt zu solchen gekommen und hatte bald diesen, bald jenen Kunstgriff zu Hilfe gezogen, um sie zu integriren. Euler war der Erste, welcher 1728 in der Abhandlung *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus*[3]) die Zurückführung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung[4]) auf die erste Ordnung sich als eigentliche Aufgabe stellte, und welcher als Mittel zur Lösung dieser Aufgabe die Einführung neuer Veränderlichen in der Art erkannte, dass er, wenn x die unabhängige Veränderliche, d. h. dx constant war, $x = e^{\alpha v}$ und $y = e^{v}t$ setzte[5]). So wurde

---

[1]) *Histoire de l'Académie des sciences de Paris.* Année 1734, pag. 196—215. [2]) Ebenda pag. 209—213. [3]) *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1727. T. III, 124—137. [4]) *gradus* ist hier mit Ordnung zu übersetzen. [5]) Euler nannte 1727 die Grundzahl des natürlichen Exponentialsystems noch nicht e, sondern c. Wir gestatten uns die kleine Abänderung.

$dx = \alpha e^{\alpha v} dv$, $dy = e^v (dt + t dv)$, $d^2x = \alpha e^{\alpha v}(d^2v + \alpha dv^2)$, $d^2y = e^v(d^2t + 2dt\,dv + t d^2v + t dv^2)$. Aber wegen der Annahme dx sei constant, musste $d^2x = 0$ d. h. $d^2v = -\alpha dv^2$ genommen werden, und so ging der Werth von d^2y in die Form über $d^2y = e^v(d^2t + 2dt\,dv + (1-\alpha) t dv^2)$. Diese Einsetzungen erfüllen z. B. ihren Zweck bei der Gleichung $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} d^2y$. Sie verwandeln dieselbe in

$$ae^{\alpha v(m+p)}\alpha^p dv^p = e^{(n+p-1)v} t^n (dt + t dv)^{p-2}(d^2t + 2dt\,dv + (1-\alpha) t dv^2).$$

Die Exponentialgrösse hebt sich durch Division weg, wenn $\alpha v(m+p) = (n+p-1)v$, d. h. $\alpha = \frac{n+p-1}{m+p}$. Mit anderen Worten, die Einsetzung von $x = e^{\frac{(n+p-1)v}{m+p}}$, $y = e^v t$ bringt

$$a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p dv^p = t^n(dt + t dv)^{p-2}\left(d^2t + 2dt\,dv + \frac{m-n+1}{m+p} t dv^2\right)$$

hervor, eine Gleichung, welche der ursprünglichen gegenüber so weit vereinfacht ist, dass v selbst nicht mehr in ihr vorkommt, sondern nur dv. Sei nun neuerdings $dv = z dt$ oder $v = \int z dt$. Wir hatten oben $d^2v = -\alpha dv^2$ erkannt, welches jetzt zu $d^2v = -\alpha z^2 dt^2$ wird. Andererseits führt die Differentiation von $dv = z dt$ zu $d^2v = z d^2t + dz\,dt$, und da beide Werthe von d^2v übereinstimmen müssen, also $-\alpha z^2 dt^2 = z d^2t + dz\,dt$ sich zeigt, so ist nothwendigerweise $d^2t = -\frac{dz\,dt}{z} + \frac{1-n-p}{m+p} z dt^2$ und aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen v und t ist mittels $v = \int z dt$ eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen z und t hervorgegangen. Ist $a = m = n = p = 1$, also $x dx dy = y d^2y$ gegeben, und vollzieht man die nothwendigen Einsetzungen auf einen Schlag, so werden sie $x = e^{\int z dt}$, $y = e^{2\int z dt} t$ heissen müssen. Aehnlich werden gewisse andere Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt. Das Gemeinsame des Verfahrens liegt wesentlich in der Einführung einer Exponentialgrösse für die eine, einer mit einer Veränderlichen vervielfachten Exponentialgrösse für die andere Veränderliche. Zum Schluss der Abhandlung gestattete Euler einen Ausblick auf künftige Untersuchungen, indem er bemerkte, eine Benutzung von Exponentialgrössen führe auch in zahlreichen Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung zur Integration.

Es dauerte 16 Jahre, bis Euler seine dahin gerichteten Arbeiten herausgab und unvermuthet die Lehre von den linearen Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung als einen Gegenstand des Nachdenkens von bisher nicht geahnter Fruchtbarkeit enthüllte.

Im Stillen war Euler schon früher dahin gelangt. Wir entnehmen einem in der Bibliothek der Stockholmer Akademie aufbewahrten und neuerdings zum Theil veröffentlichten[1]) Briefe Euler's an Johann Bernoulli vom 15. September 1739, das Ersterer damals schon mit der Integration der Differentialgleichung $0 = y + a\frac{dy}{dx} + b\frac{d^2y}{dx^2} + c\frac{d^3y}{dx^3} + d\frac{d^4y}{dx^4} + e\frac{d^5y}{dx^5} +$ etc., also mit der Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten im Reinen war, und dass er dieselbe in Beziehung zu der algebraischen Gleichung $1 - ap + bp^2 - cp^3 + dp^4 - ep^5 +$ etc. $= 0$ zu setzen wusste. Aus Johann Bernoulli's Antworten[2]) vom 9. December 1739 und vom 14. April 1740 ist zu entnehmen, dass dieser Euler's Methode aus dessen Andeutung nicht ganz vollständig zu errathen vermochte, sowie dass er schon vor 1700 die Integration einer anderen linearen Differentialgleichung höherer Ordnung zu vollziehen wusste, nämlich die von $0 = y + ax\frac{dy}{dx} + bx^2\frac{d^2y}{dx^2} + cx^3\frac{d^3y}{dx^3} +$ etc. Bernoulli versprach Euler die Mittheilung seines Verfahrens auf einem besonderen Blatte, und auch dieses ist in Stockholm aufgefunden worden. Nach dem über dessen Inhalt Veröffentlichten[3]) ging Bernoulli folgendermassen zu Wege. Er vervielfachte seine Gleichung mit x^p, so dass sie zu $0 = x^p y + ax^{p+1}\frac{dy}{dx} + bx^{p+2}\frac{d^2y}{dx^2} + cx^{p+3}\frac{d^3y}{dx^3} +$ etc. wurde. Nun setzte er $z = \frac{d\left(\frac{x^{p+1}y}{p+1}\right)}{dx} = x^p y + \frac{x^{p+1}}{p+1}\frac{dy}{dx}$ oder $ax^{p+1}\frac{dy}{dx} = a(p+1)z - a(p+1)x^p y$. Fortgesetzte Differentiation führt zu $bx^{p+2}\frac{d^2y}{dx^2} = -2b(p+1)^2 z + b(p+1)x\frac{dz}{dx} + b(p+1)(p+2)x^p y$ u. s. w. Die Gleichung nimmt folglich die Gestalt an $0 = \alpha x^p y + a_, z + b_, x\frac{dz}{dx} + c_, x^2\frac{d^2z}{dx^2} +$ etc. und erstreckt sich zu einer um die Einheit niedrigeren Ordnung als die ursprüngliche Gleichung. Ausserdem kommt p in α vor und kann so gewählt werden, dass $\alpha = 0$ wird. Dann ist die Form der ursprünglichen Gleichung unter Erniedrigung ihrer Ordnung wieder vollständig vorhanden, und man kann das einmal erprobte Verfahren abermals anwenden, so oft es nöthig ist.

---

[1]) Eneström, *Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Bibliotheca mathematica* 1897 pag. 43—50. [2]) *Corresp. math.* (Fuss) II, 28—29 und 36. [3]) Eneström l. c. pag. 49 Note 1.

Wir kommen zu Euler's Aufsatz: *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum*[1], über die Integration von Differentialgleichungen höherer Ordnung, in welchem er 1743 durch den Druck bekannt machte, worüber er 1739 nur gegen Johann Bernoulli sich geäussert hatte, die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten. Er schrieb sie in der Form $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \cdots$, und man darf wohl die Wahl dieser unbedingt weit durchsichtigeren Form, als es die sonst im Drucke übliche unter Anwendung von Differentialen war, als einen Fortschritt bezeichnen. Wesentlicher sind folgende neue Wahrheiten, welche im Drucke zum ersten Male ausgesprochen wurden. Bei der Integration der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung müssen n willkürliche Constanten auftreten[2], denn jede Integration, welche eine Constante mit sich führt, erniedrigt die Ordnung der Differentialgleichung um eine Einheit und n solcher Integrationen sind folglich erforderlich. Ist $y = p$ ein Integral von $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \cdots$, so ist auch $y = \alpha p$ ein Integral, wenn α eine Constante bedeutet[3]. Man suche daher n particuläre Integrale[4] $y = p$, $y = q$ etc., vervielfache jedes mit einer Constanten $\alpha, \beta \cdots$ und bilde deren Summe, so ist $y = \alpha p + \beta q + \cdots$ die gesuchte vollständige Integralgleichung. Nachdem diese Sätze vorausgeschickt sind, nimmt Euler die Substitution $y = e^{\int p dx}$ vor[5], durch welche, nachdem p als constant angenommen, mithin $\int p dx = px$ gesetzt ist, die gegebene Gleichung $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \cdots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$ sich verwandelt in $0 = A + Bp + Cp^2 + \cdots + Np^n$. Sei nun $pz - q$ ein Factor von $A + Bz + Cz^2 + \cdots + Nz^n$ oder $z = \frac{q}{p}$ eine Wurzel der Gleichung $0 = A + Bz + Cz^2 + \cdots + Nz^n$, so muss $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$ ein particuläres Integral der vorgelegten Differentialgleichung sein. Der Zusammenhang zwischen der Differentialgleichung

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \cdots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$$

und der algebraischen Gleichung

$$0 = A + Bz + Cz^2 + \cdots + Nz^n$$

---

[1] *Miscellanea Berolinensia* T. VII, 193—242. [2] Ebenda VII, 194—195. [3] Ebenda VII, 198. [4] Ebenda VII, 200: *valores particulares* im Gegensatz zur *aequatio integralis completa*. [5] Ebenda VII, 201.

ist also folgender[1]): Erfüllt die Wurzel $z = \frac{q}{p}$ der algebraischen Gleichung $q - pz = 0$ die genannte algebraische Gleichung n^{ten} Grades, so erfüllt $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$ als Integral der Differentialgleichung $qy - p\frac{dy}{dx} = 0$ die gegebene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, und ebensoviele von einander verschiedene reelle Factoren $A + Bz + Cz^2 + \cdots + Nz^n$ besitzt, ebensoviele particuläre Integrale der Differentialgleichung $0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \cdots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$ sind ermittelt. Eine erste Schwierigkeit besteht in dem Auftreten mehrfacher Wurzeln der Gleichung in z. In solchem Falle schreibt Euler vor[2]), die Substitution $y = e^{\frac{qx}{p}}u$ in die Differentialgleichung vorzunehmen, und er findet mittels derselben, dass dem k-fachen Factor $(q - pz)^k$ das mit k Constanten behaftete particuläre Integral $y = e^{\frac{qx}{p}}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \varkappa x^{k-1})$ entspricht. Eine zweite Schwierigkeit besteht in dem paarweisen Auftreten complexer Wurzeln[3]) der Gleichung in z. Ein solches Paar complexer Wurzeln vereinigt sich zu $p + qz + rz^2$ oder zu $p - 2z\sqrt{pr}\cos\varphi + rz^2$ mit $\cos\varphi = \frac{-q}{2\sqrt{pr}}$, und diesem Factor entspricht die Differentialgleichung $0 = py - 2\sqrt{pr}\cos\varphi\frac{dy}{dx} + r\frac{d^2y}{dx^2}$, zu deren Integration die Substitution $y = e^{fx\cos\varphi}u$ führt. Auch das wiederholte Auftreten eines Factors $p - qz + rz^2$ weiss Euler zu bewältigen[4]). Elf Aufgaben zur Einübung der allgemein geschilderten Methode beschliessen die Abhandlung.

Euler kam 1750 in dem Aufsatze: *Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota*[5]) auf die Untersuchung zurück und zeigte hier zunächst, wie man die Sache nicht machen solle, d. h. er zeigte, zu welchen fast unüberwindlichen Rechnungsschwierigkeiten es führe, wenn man auch nur bei der unvollständigen linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten versuchte von dem 1743 gezeigten Wege abzuweichen. Dann vollzog er aber den Uebergang zur vollständigen linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten[6]) $X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \cdots$. Die von Euler benutzte Methode besteht darin, dass

---

[1]) *Miscellanea Berolinensia* T. VII, 203—204. [2]) Ebenda VII, 204—206. [3]) Ebenda VII, 206—207. [4]) Ebenda VII, 208—210. [5]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, 3—35. [6]) Ebenda T. III, 13.

die Differentialgleichung mit $e^{\alpha x}dx$ vervielfacht und dann integrirt wird, so dass man erhält $\int e^{\alpha x}Xdx = \int [e^{\alpha x}Aydx + e^{\alpha x}Bdy + e^{\alpha x}C\frac{d^2y}{dx} + \cdots]$. Die versuchsweise anzusetzende Form des rechts vom Gleichheitszeichen sich befindenden Integrals möge (wenn wir annehmen, die vorgelegte Differentialgleichung sei zweiter Ordnung, schliesse also mit $\frac{Cd^2y}{dx^2}$ ab) etwa $e^{\alpha x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx}\right)$ heissen. Durch Differentiation der angenommenen Gleichung $\int [e^{\alpha x}Aydx + e^{\alpha x}Bdy + e^{\alpha x}C\frac{d^2y}{dx}] = e^{\alpha x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx}\right)$ erhalten wir: $e^{\alpha x}\left(Aydx + Bdy + C\frac{d^2y}{dx}\right) = e^{\alpha x}\left(\alpha A'ydx + (A' + \alpha B')dy + B'\frac{d^2y}{dx}\right)$ und daraus: $B' = C$, $A' = B - \alpha C = \frac{A}{\alpha}$, mithin $A - B\alpha + C\alpha^2 = 0$, woraus α und dann A' und B' sich finden, d. h. man hat $\int e^{\alpha x}Xdx = e^{\alpha x}\left(A'y + \frac{B'dy}{dx}\right)$ beziehungsweise $e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}Xdx = A'y + \frac{B'dy}{dx}$, und das ist eine Differentialgleichung von ganz ähnlicher Gestalt wie die ursprünglich gegebene, nur von einer um die Einheit erniedrigten Ordnung. Man vervielfache sie weiter mit $e^{\beta x}dx$ u. s. f. Dabei zeigt sich $\alpha + \beta = \frac{B}{C}$, d. h. α und β sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $A - B\alpha + C\alpha^2 = 0$. Bei der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung treten n solcher Exponentialgrössen $e^{\alpha x}$ auf, in welchen jedes α eine der Wurzeln einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades ist. Auch hier treten die Schwierigkeiten gleicher reeller Wurzeln und complexer Wurzeln der betreffenden algebraischen Gleichung auf, und Euler weiss sich mit ihnen abzufinden.

Wir haben (S. 705) von einem Aufsatze Euler's über Reihen: *De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum*[1]), gesprochen, der fast ebensosehr der Lehre von den Differentialgleichungen, als der von den Reihen angehöre. Er schliesst sich unmittelbar an den über lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten an, über welchen wir soeben berichtet haben. Wir haben bei seiner ersten Erwähnung nicht mehr zugesagt, als dass wir in Kürze darauf zurückkommen würden, und dem entsprechend werden wir uns damit begnügen, an einer Aufgabe den Zusammenhang zwischen Reihenlehre und Differentialgleichungen aufzudecken. Euler verlangt[2]), das allgemeine Glied einer mit 1 beginnenden Reihe aus der Bedingung zu ermitteln, dass jedes Glied

[1]) *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum* 1750 *et* 1751. T. III, 36—85. [2]) Ebenda III, 43.

demjenigen, dessen Stellenzeiger um die Einheit grösser ist, gleich sein solle, möge man den Stellenzeiger ganzzahlig wählen oder nicht. Gehört also das Glied y zum Stellenzeiger x, das Glied y' zum Stellenzeiger $x+1$, so soll $y'=y$ sein. Weil y' das ist, was aus y wird, wenn x in $x+1$ übergeht, so muss (nach Taylor's Reihe) $y'=y + \frac{dy}{1\cdot dx} + \frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \cdots$ sein, und in Verbindung mit $y'=y$ erhalten wir $0=\frac{dy}{1\cdot dx} + \frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot dx^2} + \frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \cdots$ als Differentialgleichung des allgemeinen Gliedes der betreffenden Reihe. Sie ist von unendlich hoher Ordnung, und die ihr nach den Vorschriften von 1743 entsprechende algebraische Gleichung wird unendlichen Grades sein, nämlich $0=\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots = e^z - 1 = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n - 1^n$ unter der Voraussetzung $n=\infty$. Aber $a^n - b^n$ ist durch $a^2 - 2ab\cos\frac{2k\pi}{n} + b^2$ theilbar, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Bedenkt man nun erstens, dass z ein Factor von $\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$ ist, und zweitens dass, wenn $a=1+\frac{z}{n}$, $b=1$ ist, $a^2-2ab\cos\frac{2k\pi}{n}+b^2 = \left(1+\frac{z}{n}\right)^2 - 2\left(1+\frac{z}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n} + 1 = 2\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)+\frac{z^2}{n^2} = 2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\cdot \left(1+\frac{z}{n}+\frac{z^2}{2n^2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$ wird, und dass wegen $\cos\frac{2k\pi}{n} = 1 - \frac{4k^2\pi^2}{2n^2}$ ebensowohl $2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=\frac{4k^2\pi^2}{n^2}$ als $2n^2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right) = 4k^2\pi^2$ wird, so nimmt jener allgemeine Factor die Gestalt $\frac{4k^2\pi^2}{n^2}\left(1+\frac{z}{n}+\frac{z^2}{4k^2\pi^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(4k^2\pi^2 + \frac{4k^2\pi^2}{n}z + z^2\right)$ an. Des Weiteren ist $\frac{1}{n^2}$ sowohl von z als von k unabhängig und braucht deshalb bei der Ermittelung der Factoren von e^z-1 nicht beachtet zu werden, und man hat als solche z enthaltende Factoren nur z selbst und $4k^2\pi^2+\frac{4k^2\pi^2}{n}z+z^2$ mit ganzzahligem k. Der Factor z bringt das particuläre Integral $y=C$ hervor. Das aus $4k^2\pi^2+\frac{4k^2\pi^2}{n}z+z^2$ entstehende particuläre Integral heisst $e^{\overline{\frac{4k^2\pi^2 x}{n}}}(\alpha\sin 2k\pi x + \mathfrak{A}\cos 2k\pi x)$. Es geht durch $n=\infty$ in $\alpha\sin 2k\pi x + \mathfrak{A}\cos 2k\pi x$ über. Das allgemeine Glied der Reihe heisst also, indem k alle ganzzahligen Werthe von $k=1$ an annimmt und die Bedingung zu berücksichtigen ist, dass $y=1$ sein muss, wenn $x=0$ ist:

$$y = 1 + \alpha \sin 2\pi x + \beta \sin 4\pi x + \gamma \sin 6\pi x + \cdots$$
$$+ \mathfrak{A}(\cos 2\pi x - 1) + \mathfrak{B}(\cos 4\pi x - 1) + \mathfrak{C}(\cos 6\pi x - 1) + \cdots,$$

wo $\alpha, \mathfrak{A}, \beta, \mathfrak{B}, \gamma, \mathfrak{C} \cdots$ ganz beliebige constante Werthe besitzen.

Zwischen die Abhandlungen Euler's von 1743 und 1750, welche wir ihres inneren Zusammenhanges wegen nicht trennen wollten, fallen Untersuchungen von D'Alembert. Sie bilden den vom 13. April 1747 datirten 4. Abschnitt seines Aufsatzes über Integralrechnung[1]), dessen Besprechung wir uns (S. 849) aufgespart haben. Ungleich mit unseren Berichten über andere Schriftsteller halten wir uns nicht an die Bezeichnungen des Verfassers. Er benutzt nicht x, sondern y als unabhängig Veränderliche, er setzt $\frac{dx}{dy} = z$, $\frac{d^2x}{dy^2} = u$, $\frac{d^3x}{dy^3} = k$, er benutzt neben φ auch Δ als Functionalzeichen und klammert das Argument der Function nicht ein, lauter ungewohnte Dinge, welche das Verständnis nur erschweren und deshalb von uns in die heute übliche Schreibweise umgewandelt werden. Sei $y = x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\left(\frac{dy}{dx}\right)$ zur Integration vorgelegt. D'Alembert sagt, aus jeder solchen Gleichung lasse sich durch Differentiation $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + x\varphi'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + F'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$ finden und behauptet, ohne an einem Beispiele seine Behauptung zu bestätigen, es sei leicht, nunmehr x durch $\frac{dy}{dx}$ auszudrücken; ebenso könne auch $y = \int \frac{dy}{dx}\, dx$ alsdann durch $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt werden. In einem Zusatze ist erklärt, genau das gleiche Verfahren führe zur Integration von $\frac{d^n y}{dx^n} = x\varphi\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right) + F\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)$. In einem zweiten Zusatze wird der besondere Fall $y = x\frac{dy}{dx} + F\left(\frac{dy}{dx}\right)$ erörtert. Aus dieser Gleichung gehe $\left(x + F'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ hervor, und diese wieder führe entweder mittels $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ zu einer Geraden, oder mittels $x + F'\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ zu einer Curve. Eine Einwirkung von Clairaut's Abhandlung von 1734 (S. 862) ist hier ersichtlich. In anderen in dieser Veröffentlichung von 1748 enthaltenen Aufgaben[2]) sind n Differentialgleichungen zwischen $n+1$ Veränderlichen, von denen eine als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, gegeben, und D'Alembert verbindet ein Eliminationsproblem mit dem der Inte-

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748. T. IV, 275–291.
[2]) Ebenda IV, 283 (Problème V) und IV, 286 (Problème VI, wofür durch einen Druckfehler Problème IV steht).

gration. Das Erstere führt ihn dazu, die vorgelegten Gleichungen zu addiren, nachdem jede derselben mit Ausnahme der ersten mit einem zunächst unbestimmten Factor vervielfacht ist, während die Factoren nachher so gewählt werden, dass gewisse Bedingungen zur Erfüllung kommen, ein Gedanke, der wenige Jahrzehnte später sich in der Lehre von den algebraischen Gleichungen als ungemein fruchtbar erwies. In zweiter Beziehung ist D'Alembert hier als Begründer der Lehre von den simultanen Differentialgleichungen aufgetreten. Ein allerdings ziemlich dunkel gehaltener Zusatz[1]) macht auf die Möglichkeit der Zurückführung einer Differentialgleichung höherer Ordnung auf mehrere von niedrigerer Ordnung aufmerksam.

D'Alembert ist in dem zwei Jahre später gedruckten Schlusse der Abhandlung[2]) darauf zurückgekommen, und zwar mit Bezug auf die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten. Damals war der VII. Band der Miscellanea Berolinensia längst gedruckt, der III. Band der Novi Commentarii Academiae Petropolitanae kaum geschrieben. D'Alembert kannte also nur Euler's Behandlung der unvollständigen linearen Differentialgleichung, und wenn er seine Methode auf die vollständigen linearen Differentialgleichungen anwandte, so war das ein Fortschritt, von dem er noch nicht wissen konnte, dass Euler ihn gleichzeitig ebenfalls vollzog.

Doch wir müssen zu den simultanen Gleichungen des Bandes für das Jahr 1748 zurückkehren, welche, wie es vielfach bei den Anfängen einer Lehre sich zeigt, von besonders einfacher Gestalt sind. Zuerst[3]) behandelt D'Alembert die zwei Gleichungen

$$dx + (Cx + Dy)\,dt = 0$$
$$dy + (Kx + Ly)\,dt = 0,$$

wo t als die unabhängige Veränderliche gilt. Multiplication der zweiten Gleichung mit v und darauf folgende Addition zur ersten liefert die combinirte Gleichung $dx + v\,dy + ((C + Kv)x + (D + Lv)y)\,dt = 0$. D'Alembert will, dass $(C + Kv)x + (D + Lv)y$ ein Vielfaches von $x + vy$ sei, mit anderen Worten, er will, dass $C + Kv = \frac{D + Lv}{v}$ sei, und er erkennt, dass dieses der Fall, wenn $v = \frac{L - C}{2K} \pm \frac{1}{2K}\sqrt{(L - C)^2 + 4DK}$ ist, zwei Werthe von v, welche er p und p' nennt. Nun setzt er $x + vy = u$, $dx + v\,dy = du$, $(C + Kv)x + (D + Lv)y = (C + Kv)(x + vy) = (C + Kv)u$ und erhält für die combinirte Gleichung die neue Gestalt $du + (C + Kv)u\,dt = 0$,

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748. T. IV, 289, Nr. LIII.
[2]) Ebenda Année 1750. T. VI, 369—374. [3]) Ebenda Année 1748. T. IV, 283.

welche sich durch $u = ge^{-(C+Kp)t}$ integrirt. In diesem Integrale ist g eine willkürliche Constante, während eine andere willkürliche Constante, welche wir sogleich auftreten sehen werden, g' heisst. Setzen wir nämlich für r einmal p und einmal p', nennen $x + py = u$ und $x + p'y = u'$, wo aus $y = \frac{u - u'}{p - p'}$, $x = \frac{pu' - p'u}{p - p'}$ folgt, so hat man für u und u' die beiden Gleichungen $u = ge^{-(C+Kp)t}$, $u' = g'e^{-(C+Kp')t}$. Die Constanten g und g' werden vermöge der Werthe bestimmt, welche x und y bei $t = 0$ annehmen. Eine weitere Aufgabe behandelt[1]) die drei Gleichungen.

$$dx + (ax + by + cz)dt = 0$$
$$dy + (ex + fy + gz)dt = 0$$
$$dz + (hx + my + nz)dt = 0.$$

D'Alembert multiplicirt die zweite Gleichung mit ν, die dritte mit μ und addirt dann zur ersten. Er erhält die combinirte Gleichung $dx + \nu dy + \mu dz + ((a + e\nu + h\mu)x + (b + f\nu + m\mu)y + (c + g\nu + n\mu)z)dt = 0$. Dann wird $a + e\nu + h\mu = \frac{b + f\nu + m\mu}{\nu} = \frac{c + g\nu + n\mu}{\mu}$ gesetzt, damit unter der weiteren Abkürzung $x + \nu y + \mu z = u$ die combinirte Gleichung die Gestalt $du + (a + e\nu + h\mu)u\,dt$ annehme, welche durch $x + \nu y + \mu z = ke^{-(a+e\nu+h\mu)t}$ integrirt wird[2]). Es handelt sich darum, die zweckentsprechenden Werthe von μ und ν zu finden. Aus $a + e\nu + h\mu = \frac{b + f\nu + m\mu}{\nu}$ ergiebt sich $\mu = \frac{b + (f - a)\nu - e\nu^2}{-m + h\nu}$, und setzt man diesen Werth von μ in $a + e\nu + h\mu = \frac{c + g\nu + n\mu}{\mu}$ ein, so erhält man eine Gleichung in ν, welche dadurch vom 4ten auf den 3ten Grad sich erniedrigt, dass ν^4 in ihr den Coefficienten $e^2h - e^2h = 0$ erhält. Es giebt also drei Werthe von ν, zu deren jedem ein Werth von μ gehört, mithin drei Werthepaare $\nu = p$, $\mu = m$; $\nu = p'$, $\mu = m'$; $\nu = p''$, $\mu = m''$. Die eine Integralgleichung liefert demnach deren drei, und aus ihnen lässt sich x, y, z jedes einzeln als Function von t darstellen. D'Alembert übersieht keineswegs die Schwierigkeiten, welche durch das Auftreten gleicher oder complexer Wurzeln in den algebraischen Hilfsgleichungen entstehen, wir wollen indessen hier auf diese Ergänzungsbemerkungen nicht näher eingehen.

Haben wir D'Alembert als denjenigen Mathematiker kennen gelernt, der sich zuerst mit simultanen Differentialgleichungen be-

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748. T. IV, 286. [2]) Bei D'Alembert steht g statt k. Wir haben k vorgezogen, weil g schon innerhalb der zweiten simultanen Differentialgleichung eine bestimmte Bedeutung hatte

schäftigte, so ist sein Verdienst um die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen kaum geringer[1]). Die Aufgabe von der schwingenden Saite war erstmalig von Brook Taylor (S. 369) in Angriff genommen worden. Er hatte sie sich in dem Sinne gestellt, dass er durch mathematische Erwägung die Geschwindigkeit jedes einzelnen Punktes der Saite und hierauf die Anzahl der Schwingungen innerhalb einer gegebenen Zeit zu finden beabsichtigte. Johann Bernoulli lenkte dann 1727 in einem im II. Bande der Commentarien der Petersburger Akademie veröffentlichten[2]) Briefe an seinen Sohn Daniel Bernoulli dessen Aufmerksamkeit auf den Gegenstand und brachte selbst im III. Bande jener Veröffentlichungen einen Aufsatz *De chordis vibrantibus*[3]), von den schwingenden Saiten. Johann Bernoulli ging ebenso wie Taylor von der Voraussetzung aus, dass alle Punkte der Saite gleichzeitig ihre Gleichgewichtslage verlassen, oder anders ausgedrückt, dass die Saite stets als Ganzes schwinge. Von dieser unrichtigen, weil zu engen Annahme aus kam Johann Bernoulli für die Gestalt der Saite, welche sich durch ihre Schwingung ergebe, zu der gleichen Meinung, welche auch Taylor schon besass, sie sei die einer *compagne de la cycloide*, d. h. also (Bd. II, S. 803) einer Sinuslinie. D'Alembert liess in dem Aufsatze *Sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*[4]) jene einengende Annahme fallen und ersetzte sie durch die folgenden, welche in der That mit den Vorgängen der Natur in sehr angenäherter Uebereinstimmung sich befinden. Erstens sollen die Schwingungen unendlich klein sein, so dass, wenn ein Punkt P aus seiner Ruhelage um ein Stückchen $PM = y$ entfernt und dadurch nach dem senkrecht über P befindlichen Punkte M gebracht wird und A der eine Befestigungspunkt der Saite ist, die Gleichung $AM = AP = s$ gerechtfertigt erscheine. Zweitens soll die Saite überall gleich dick sein. Drittens soll die spannende Kraft F dem Gewichte der Saite proportional oder $F = mpl$ sein, wo l die Länge der Saite, p das Gewicht ihrer Längeneinheit, m einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Viertens endlich soll die Beschleunigung des Punktes M in der Richtung MP sich durch $\mp F\frac{d^2y}{ds^2}$ ausdrücken, wo das Vorzeichen davon abhängt, ob die durch die Saite gebildete Curve in M gegen die Ruhelage concav

---

[1]) Einen vorzüglichen Ueberblick über die hier in Frage kommenden Abhandlungen von D'Alembert, Euler und Daniel Bernoulli gab Riemann in der Einleitung zu seiner berühmten Habilitationsschrift von 1854: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. [2]) Johann Bernoulli, *Opera* III, 125. [3]) Ebenda III, 198—210. [4]) *Histoire de l'Académie de Berlin*. Année 1747. T. III, 214—219.

oder convex ist. D'Alembert kommt[1]) von diesen Annahmen aus durch der Mechanik angehörende Betrachtungen zu einer Gleichung $\alpha = \beta$, welche wir in die gegenwärtig gebräuchliche Form umsetzen müssen. Wenn D'Alembert $AM = AP = s$ schreibt und dabei an den Bogen AM denkt, so konnte er ebenso gut die Abscisse AP als namengebend betrachten und x schreiben. Alsdann ist $y = \varphi(t, x)$, und die übrigen bei D'Alembert auftretenden Buchstaben bedeuten: $p = \frac{\partial y}{\partial t}$, $q = \frac{\partial y}{\partial x}$, $\alpha = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\nu = \frac{\partial^2 y}{\partial t \cdot \partial x}$, $\beta = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, und die erwähnte Differentialgleichung $\alpha = \beta$ heisst $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, unterscheidet sich also von der heute gewöhnlichen Schreibart $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nur durch das Fehlen des positiven Coefficienten a^2. Wenn y, mithin eine Strecke, zu der Strecke x und zugleich zur Zeit t in einem Abhängigkeitsverhältnisse steht, so wird die darin enthaltene begriffliche Schwierigkeit dadurch gehoben, dass auch die Zeit durch eine Strecke versinnlicht wird[2]). Sei a der Raum, welcher von einem unter dem Einflusse des Gewichtes p stehenden Körpers in einer Zeit Θ durchlaufen wird, und lässt man Θ durch eine an sich beliebig lange Strecke darstellen, so muss auch jedes t als Strecke gezeichnet werden. Nach der oben erläuterten, den einzelnen Buchstaben beigelegten Bedeutung ist $dp = \alpha dt + \nu dx$, $dq = \nu dt + \beta dx = \nu dt + \alpha dx$, mithin $dp + dq = (\alpha + \nu)(dt + dx)$ und $dp - dq = (\alpha - \nu)(dt - dx)$. D'Alembert zieht daraus den Schluss[3]), $\alpha + \nu$ müsse eine Function von $t + x$, $\alpha - \nu$ eine Function von $t - x$ sein. Er begründet ihn nicht näher, meint aber offenbar, nur wenn die in seinem Schlusse ausgesprochenen Abhängigkeiten stattfinden, sei eine Integration der beiden Differentialgleichungen ausführbar. Dann folgt aber weiter bei Vollziehung der Integration, dass $p + q$ eine Function von $t + x$ und $p - q$ eine Function von $t - x$ sein muss, etwa $p + q = \varphi(t + x)$, $p - q = \Delta(t - x)$, $p = \frac{\varphi(t + x) + \Delta(t - x)}{2}$, $q = \frac{\varphi(t + x) - \Delta(t - x)}{2}$. Ferner soll $y = \int (pdt + qdx)$ sein, oder $y = \frac{1}{2}\int \varphi(t + x)\, d(t + x) + \frac{1}{2}\int \Delta(t - x)\, d(t + x) = \Psi(t + x) + \Gamma(t - x)$, wo Ψ und Γ zunächst ganz unbestimmte Functionalzeichen sind. Der Natur der Aufgabe innewohnende Bedingungen lehren Einiges über sie. Bei $t = 0$ ist die Ruhelage noch nicht gestört, mithin $y = 0$. Ebenso ist $y = 0$ in den beiden Befestigungspunkten der Saite, bei $x = 0$ und bei $x = l$. Man weiss also:

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1747. T. III, 216. [2]) Ebenda T. III, 215—216. [3]) Ebenda T. III, 216.

$$1.\quad \Psi(x) + \Gamma(-x) = 0$$
$$2.\quad \Psi(t) + \Gamma(t) = 0$$
$$3.\quad \Psi(t+l) + \Gamma(t-l) = 0\,.$$

Aus 2. folgt $\Gamma(t) = -\Psi(t)$, also auch $\Gamma(t-x) = -\Psi(t-x)$, und man ist schon berechtigt $y = \Psi(t+x) - \Psi(t-x)$ zu schreiben. Durch $\Gamma(t-x) = -\Psi(t-x)$ geht aber 1. über in $\Psi(x) - \Psi(-x) = 0$ oder in $\Psi(x) = \Psi(-x)$. Die Ψ-Function muss also, damit sie bei Ersetzung ihrer Argumentes durch den entgegengesetzten Werth ungeändert bleibe, eine solche sein, welche, in eine Reihe entwickelt, nur grade Potenzen des Argumentes enthält[1]), oder, wie es etwas später heisst[2]), $\psi(x)$ muss eine grade Function von x sein. Dazu kommt noch mit Rücksicht auf 3. die Bedingung $\Psi(t+l) = \Psi(t-l)$, wodurch nachgewiesen ist, dass die Function Ψ ihren Wert unverändert wiedererhält, wenn das Argument sich um die Constante $2l$ vergrössert, oder dass $\Psi(z) = \Psi(z+2l)$ sein muss. Wird y nach t partiell differentiirt, so entsteht die Geschwindigkeit des betreffenden Punktes der schwingenden Saite $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \Psi(t+x)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi(t-x)}{\partial t}$, welche, wenn $t=0$ gesetzt wird, seine Anfangsgeschwindigkeit ist und eine ungrade Function sein muss, wenn die Aufgabe überhaupt möglich sein soll[3]).

Unmittelbar hinter diesem an den fruchtbarsten neuen Wahrheiten überreichen Aufsatze ist eine zweite weit umfangreichere, auch inhaltlich sich anschliessende und deshalb durch Ziffern, welche die Paragraphennummerirung der ersten Veröffentlichung einfach fortsetzen, in kleinere Absätze abgetheilte Arbeit D'Alembert's gedruckt[4]). Sie will der eigentlichen Gestalt der schwingenden Saite näher kommen und bedient sich zu diesem Zwecke einer erzeugenden Curve, *courbe génératrice*, OTK (Fig. 146). Ihre Definition liegt in der Gleichung $y = \Psi(x)$. Aus den ermittelten Eigenschaften der Function Ψ folgt, dass der zu O symmetrisch liegende Punkt K von O um $2l$ entfernt sein muss, und dass $OS = l$, wenn T der senkrecht über S gelegene Höhepunkt der Curve ist. Die unter einander parallelen Geraden QP JF, BA sind so gezeichnet, dass die erstere mit QN einen Winkel von 45° bildet, dann wird, wenn QN als Maass von t gewählt ist, auch $PN = t$ sein. Q ist der Anfangspunkt der Saite, welche zugleich auch Abscissenaxe ist, $QG = Qg = x$ und $QN + QG = PN$

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1747. T. III, 217. [2]) Ebenda T. III, 218: *Ψ s) doit être une fonction paire de s.* [3]) Ebenda T. III, 219: *si la fonction de s, qui exprime cette vitesse initiale, n'était pas une fonction impaire de s, le problème serait impossible.* [4]) Ebenda T. III, 220–249.

$+ NA = QB = t + x$ nebst $QN - Qg = NP - NF = QJ = t - x$. Wegen der Gleichung der erzeugenden Curve ist demnach $BD = \Psi(t+x)$, $JE = \Psi(t - x)$ und $\Psi(t+x) - \Psi(t-x) = BD - JE = CD - DE$.

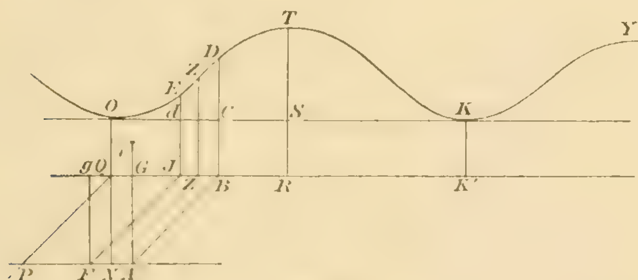


Fig. 146.

Wird diese Differenz als $G\gamma$ gezeichnet, so ist γ der Ort, nach welchem der Punkt G der Saite in einer Schwingung gelangt. D'Alembert nennt nun σdt den Weg, welchen jeder Punkt der Saite im ersten Augenblicke der Bewegung (also bei $t = 0$) zurückzulegen das Bestreben hat. Alsdann ist $\frac{d\Psi(x)}{dx} + \frac{d\Psi(-x)}{dx} = \sigma$, $\Psi(x) + \Psi(-x) = \int \sigma dx$. Ferner war $\Psi(x) - \Psi(-x) = 0$. Mithin ist $\Psi(x) = \frac{1}{2}\int \sigma dx + \text{Const.}$, und rückwärts ist die Anfangsgeschwindigkeit σ jedes Punktes der Saite proportional $\frac{d\Psi(x)}{dx}$, d. h. proportional den Differenzen von Ordinaten der erzeugenden Curve, getheilt durch die Differenzen der zugehörigen Abscissen. Ganz frei ist aber die Wahl der betreffenden Function $\Psi(x)$ nicht. Diese muss den Gesetzen gehorchen, welche in Bezug auf Gradheit und Ungradheit der Functionen im ersten Aufsatze bekannt geworden waren. Dabei verändern sich, wenn als Anfangslage der Saite nicht eine Gerade, sondern eine Curve angenommen wird, die Functionalbedingungen so sehr, dass in diesem Falle $\Psi(x)$ als eine ungrade Function erscheint[1]), und unter ihrer Voraussetzung werden betreffende Functionen zu ermitteln gesucht.

Die Behauptung D'Alembert's von den die freie Wahl von $\Psi(x)$ hemmenden Beschränkungen sollte einen Streitpunkt zwischen ihm und **Euler** bilden. Man kann, sagte Euler in einer im nächstfolgenden Bande der Veröffentlichungen der Berliner Academie abgedruckten Abhandlung *Sur la vibration des cordes*[2]) eine Saite von gegebener Länge, gegebenem Gewichte und gegebener Spannung in irgend eine von der graden Gestalt nur unendlich wenig abweichende, sonst aber

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1747. T. III, 230—231.
[2]) Ebenda Année 1748. T. IV, 69—85.

ganz beliebige Form bringen und sich alsdann die Aufgabe stellen, die Schwingungen der plötzlich losgelassenen Saite zu bestimmen, welche auch durch eine geometrische Construction lösbar wird. Er erhielt als eine Gleichung der Curve, welche die Saite bildet, und welche für sich allein genüge, die ganzen Bewegungserscheinungen zu begreifen, dass y gleich der Summe einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern sein müsse, deren jedes aus einem mit einem Coefficienten vervielfachten Sinus bestehe[1], also $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$.

Nun nahm nach weiteren zwei Jahren D'Alembert wieder das Wort[2]. Der wesentliche Punkt seiner Entgegnung ist darin erkannt worden[3]), dass D'Alembert, an den functionalen Bedingungen seiner früheren Untersuchung festhaltend, verlangte, dass y sich durch t und x derart darstelle, dass die verschiedenen Gestalten, welche die schwingende Saite zu erhalten vermöge, sich aus einer und derselben Gleichung herauslesen lassen. Neben dieser Verschiedenheit zwischen den Anschauungen von D'Alembert und Euler, dass Ersterer eine analytisch erfassbare, Letzterer irgend eine empirisch herzustellende Anfangsveränderung der schwingenden Saite beanspruchte, blieb zwischen Beiden und Taylor der Streitpunkt, ob eine nicht in allen Theilen regelmässige Curve oder ausschliesslich eine einfache Sinuslinie die Schwingungscurve bilde.

Daniel Bernoulli suchte in zwei zusammenhängenden Abhandlungen[4] Klarheit darüber zu verbreiten. Er begann mit physikalischen Betrachtungen, aus welchen wir nur hervorheben, dass die Gehörsempfindung der sogenannten Obertöne als eine solche bezeichnet wird, über welche alle Musiker einig seien[5]), und in der That gehört die Entdeckung der Obertöne schon dem Pater Mersenne an (S. 369), deren Bestätigung zahlreichen Physikern und Praktikern. Wenn aber eine angestrichene Saite mehrere Töne gleichzeitig vernehmen lässt, wenn jeder Einzelton einer in eine Sinuslinie gekrümmten Saite entstammt, so muss bei dem Entstehen mehrerer Töne die Saite gleichzeitig in mehreren Sinuslinien schwingen, und eine Darstellung von deren Vereinigung muss geometrisch möglich sein. Bernoulli meint das so (Fig. 147). Wenn ein Ton, der der Curve $AmanB$ entspricht, sich mit einem Tone vereinigt, dessen ebenfalls ganz regelmässig ausschauende Curve ihre Axe ausser in A und B auch in der Mitte zwischen diesen beiden Punkten schneidet, so kann bei der unendlich

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1748. T. IV, 85. [2]) Ebenda Année 1750. T. VI, 355–360. [3]) Riemann l. c. [4]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 147–172 und 173–195. [5]) Ebenda T. IX, 152.

kleinen Weite der Schwingungen die $AmanB$ selbst als geradlinige Axe gedacht werden, um welche sich die zweite Toncurve schlängelt, und so entsteht die Curve $ApaqB$, welche den beiden gemeinschaftlich vernehmbaren Tönen entspricht, und welche zugleich den Bedingungen der Symmetrie und der Periodicität genügt, welche für solche Curven gefordert werden müssen. Aehnlich verhält es sich, wenn noch mehr Töne gleichzeitig vernommen werden. Die allgemeinste Gleichung der Curve ist $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$, also genau dieselbe Gleichungsform, welche Euler 1748 erhalten hatte[1]). Bernoulli knüpfte an diese synthetische und geometrische Behandlung der Aufgabe auch noch analytische Betrachtungen, über welche wir ebenso hinweggehen, wie über den ganzen zweiten Aufsatz, dessen Hauptinhalt dahin zusammengefasst worden ist[2]), dass Daniel Bernoulli in ihm die Schwingungen eines masselosen gespannten Fadens untersuchte, der in einzelnen Punkten mit endlichen Massen beschwert ist, und dabei zeigte, dass die Schwingungen desselben stets in eine der Zahl der beschwerten Punkte gleiche Anzahl von solchen Schwingungen zerlegt werden kann, deren jede für alle Massen gleich lange dauert.

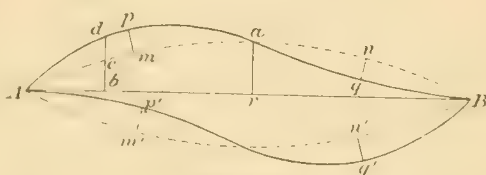


Fig. 147

An den zweiten Aufsatz Daniel Bernoulli's schliesst im Drucke unmittelbar eine letzte von uns zu berücksichtigende Abhandlung Euler's an: *Remarques sur les mémoires de Daniel Bernoulli*[3]). Euler drückt seine Bewunderung über Bernoulli's theils physikalische, theils geometrisch combinirende Auffassung der Aufgabe aus und würde ihr einen weit höheren Rang zuweisen, als D'Alembert's und seine eigenen Bemühungen beanspruchen dürften, wenn Bernoulli's Auflösung in der That die allgemeine wäre, was aber von der Gleichung $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$ nicht behauptet werden könne. Denke man sich etwa die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ als eine unendliche geometrische Reihe bildend, so könne die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Reihe summirt werden, und man gelange zur Gleichung $y = \frac{c \sin \frac{\pi x}{a}}{1 - n \cos \frac{\pi x}{a}}$. Letztere sei unbedingt viel durchsichtiger als die

1) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 157. 2) Riemann l. c. 3) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 196—222

erste Form, und man würde sich sehr uneigentlich ausdrücken[1], wollte man sagen, die Curve mit dieser Gleichung sei aus unendlich vielen Sinuslinien combinirt. Er selbst habe seiner Zeit die Gleichung $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$ nur als die in einem besonderen Falle zutreffende aufgestellt, und die Hauptfrage, ob alle durch schwingende Saiten gebildete Curven in jener Gleichung enthalten seien oder nicht, bleibe zu erörtern[2]. Euler leugnet die Möglichkeit. Es sei doch sicher, dass man zu Anfang die Saite in irgend eine Gestalt bringen könne, bevor sie losgelassen ihre Schwingungen beginne, und dass, selbst wenn man behaupten wolle, die Gestalt der Saite werde allgemach in eine aus Sinuslinien combinirte übergehen, dieses doch immer eine grössere Zeit beanspruchen müsse, und dass die Anfangsschwingungen sich keiner solchen Combination unterordnen würden. Bestimmte Eigenschaften von $\sin \frac{n\pi x}{a}$, z. B. diejenige, zugleich mit x in den entgegengesetzten Werth überzugehen, bei Zunahme des x um a eine Periodicität an den Tag zu legen, müssen sich auf y übertragen, und keine Curve, welcher derartige Eigenschaften abgehen, z. B. keine algebraische Curve, könne in der mehrerwähnten Gleichungsform enthalten sein[3]. Nur soviel sei an der Bernoulli'schen Darstellung zweifellos, dass, wenn P, Q, R Functionen von x und t seien, welche $y = P$, $y = Q$, $y = R$ als Integrale von $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Fa}{2M} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ erscheinen lassen, auch $y = \alpha P + \beta Q + \gamma R$ ein Integral sein müsse[4].

Man sieht hier die Frage nach der Darstellbarkeit irgend eines Werthes, z. B. einer algebraischen Function, durch eine Sinusreihe verstohlen auftauchen, aber nur um um so rascher wieder zu verschwinden. Die Zeit ihrer Beantwortung war noch nicht gekommen. Fourier, der Mathematiker, welcher in überraschender Weise leisten sollte, was Euler, ohne Widerspruch zu befürchten, für unmöglich erklärte, war noch nicht geboren. Lagrange, den man freilich irrigerweise ehedem als Vorgänger Fourier's auf diesem Gebiete zu rühmen liebte, schrieb erst an seiner ersten Abhandlung, welche 1759 in einer neuen Abhandlungssammlung, in den Turiner Veröffentlichungen, erscheinen sollte.

---

[1]) *Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1753. T. IX, 197: *ce serait parler fort improprement.* [2]) Ebenda T. IX, 198: *La question principale que j'ai à déveloper est donc si toutes les courbes d'une corde mise en mouvement sont comprises dans l'équation rapportée, ou non?* [3]) Ebenda T. IX, 200—201. [4]) Ebenda T. IX, 208—209.

Register.

—

A.

B.

C.

D.

E.

F.

I.

J.

M.

N.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Y.

Z.

4 vols.